Matemáticas II

TEORÍA

Academia Rada

www.academiarada.com

Telf. 959 25 19 49

TEMA 1. MATRICES Y DETERMINANTES.

1. DEFINICIÓN DE MATRIZ.

Se llama **matriz** de orden **mxn** a todo conjunto rectangular de elementos a_{ij} dispuestos en m líneas horizontales (filas) y n verticales (columnas) de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Abreviadamente suele expresarse en la forma A = (a_{ij}), con i =1, 2,..., n. Los subíndices indican la posición del elemento dentro de la matriz, el primero denota la fila (i) y el segundo la columna (j). Por ejemplo el elemento a_{25} será el elemento de la fila 2 y columna 5

Dos matrices son iguales cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales.

2. TIPOS DE MATRICES.

Vamos a describir algunos tipos de matrices que aparecen con frecuencia debido a su utilidad, y de los que es conveniente recordar su nombre.

2.1. ATENDIENDO A SU FORMA.

Matriz fila: Es una matriz que solo tiene una fila, es decir m =1 y por tanto es de orden lxn.

Ej: A = (a_{11} a_{12}…, a_{n1})

Matriz columna: Es una matriz que solo tiene una columna, es decir, n =1 y por tanto es de orden m x1.

$$\text{Ej: } A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada: Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir m = n. En estos casos se dice que la matriz cuadrada es de orden n, y no n x n.

Los elementos a_{ij} con i = j, o sea a_{ii} forman la llamada diagonal principal de la matriz cuadrada.

Ej: Ejemplo de matriz cuadrada para n = 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta: Dada una matriz A, se llama traspuesta de A, y se representa por A^t, a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas. La primera fila de A es la primera fila de A^t, la segunda fila de A es la segunda columna de A^t, etc.

De la definición se deduce que si A es de orden m x n, entonces A^t es de orden n x m.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades de la trasposición de matrices:
a) Dada una matriz A, siempre existe su traspuesta y además es única.

b) $(A^t)^t = A$.

Matriz simétrica: Una matriz cuadrada A es simétrica si $A = A^t$, es decir, si $a_{ij} = a_{ij}$ Y i, j.

$$\text{Ej: } A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 \\ -3 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.2. ATENDIENDO A SUS ELEMENTOS.

Matriz nula es aquella que todos sus elementos son O y se representa por O.

Matriz diagonal: Es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz unidad o identidad: Es una matriz escalar con los elementos de la diagonal principal iguales a 1.

$$I_1=(1),\ I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular: Es una matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos que están a un mismo lado de la diagonal principal. Las matrices triangulares pueden ser de dos tipos:

a) **Triangular Superior:** Si los elementos que están por debajo de la diagonal principal son todos nulos. Es decir, a_{ij} 0 Y i < j.
b) **Triangular Inferior:** Si los elementos que están por encima de la diagonal principal son todos nulos. Es decir, $a_{ij}=0$ Y j < i.

3. OPERACIONES CON MATRICES.

3.1. SUMA Y RESTA.

La suma (resta) de dos matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ de la misma dimensión, es otra matriz $S = (S_{ij})$ de la misma dimensión que los sumandos y con término genérico = $s_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, es decir, sumamos (restamos) los elementos que ocupan el mismo lugar. Por tanto, para poder sumar dos matrices estas han de tener la misma dimensión.

La suma de las matrices A y B se denota por A + B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

3.2. PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA MATRIZ.

El producto de una matriz A por un número real k es otra matriz B = (b_{ij}) de la misma dimensión que A y tal que cada elemento b_{ij} de B se obtiene multiplicando a_{ij} por k, es decir, $_{ij}$j = k•a_{ij}.

$$2\begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 1 & 2\times 8 & 2\times -3 \\ 2\times 4 & 2\times -2 & 2\times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

El producto de la matriz A por el número real k se designa por k•A. Al número real k se le llama también escalar, y a este producto, producto de escalares por matrices.

3.3. PRODUCTO DE DOS MATRICES.

Dadas dos matrices A y B, su producto es otra matriz P cuyos elementos se obtienen multiplicando las filas de A por las columnas de B.

Es evidente que el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de B. Es más, si A tiene dimensión m x n y B dimensión n x p, la matriz P será de orden m x p. Es decir:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 & (-1)\cdot(-3) + 2\cdot 1 + 3\cdot 5 \\ 4\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 4\cdot(-3) + 1\cdot 1 + 2\cdot 5 \\ (-1)\cdot 2 + 2\cdot 1 + 5\cdot 2 & (-1)\cdot(-3) + 2\cdot 1 + 5\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 13 & -1 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices:

a) El producto de matrices en general no es conmutativo.
b) Si A es una matriz cuadrada de orden n se tiene A • I_n = I_n• A = A.

c) Recuerda que el resultado "hereda" el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda.

4. DETERMINANTES.

El determinante es un número asociado a cada matriz cuadrada.

4.1. CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ÓRDENES 1, 2 Y 3.

Es fácil comprobar que aplicando la definición se tiene:

- Orden 1: $A=(a_{11})$ det $(A)=a_{11}$
- Orden 2: Multiplicamos en cruz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\text{Ej: } A = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 = 6$$

- Orden 3: Aplicamos la regla de Sarrus

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

$$\text{Ej: } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (-5) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 \cdot (-1) - [0 \cdot (-5) \cdot 3 + (-2) \cdot (-3) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 \cdot 1] =$$

$$-23 - [-8] = -15$$

4.2. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES:

a) $|A^t| = |A|$.

b) Si los elementos de una fila o columna son todos ceros ⇨ $|A|=0$.

c) Si dos filas o columnas son iguales ⇨ |A|=0.

d) Si un determinante tiene dos filas o columnas proporcionales su valor es cero

$$Det(A^1, kA^1, A^3) = k.Det(A^1, A^1, A^3) = 0$$

e) Si se intercambian entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo

$$Det(A^1, A^2, A^3) = -Det(A^2, A^1, A^3)$$

f)

Ej: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ como puede comprobarse.

g) Si se multiplica una fila o columna por un número el determinante queda multiplicado por dicho número.

$$Det(kA^1, A^2, A^3) = k.Det(A^1, A^2, A^3)$$

h) Si una fila o columna puede descomponerse en suma de otras dos, por ejemplo, $A^1 = B + C$, entonces:

$Det(B + C, A^2, A^3) = Det(B, A^2, A^3) + Det(c, A^2, A^3)$

i) Si a una fila o columna se le suma una combinación lineal de las restantes, el valor del determinante no varía.

$$Det(A^1, A^2, A^3) = Det(A^1 + \alpha A^2 + \beta A^3, A^2, A^3)$$

j) Si una fila o columna es combinación lineal de las restantes, el valor del determinante es cero.

$$Det(A^1, A^2, \alpha A^1 + \beta A^2) = Det(A^1, A^2, \alpha A^1) + Det(A^1, A^2, \beta A^2) = 0 + 0 = 0$$

5. CALCULO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA.

Sea A una matriz cuadrada y a_{ij} uno de sus elementos. Llamamos **menor complementario** del elemento a_{ij} a la submatriz M_{ij} que se obtiene al suprimir de la matriz A la fila i y la columna j. Ej:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 9 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad M_{23} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Se llama **adjunto** del elemento a_{ij} y se designa por A_{ij}, al determinante del menor complementario del elemento precedido del signo +, s i + j es par, o -, si i + j es impar.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det\left(M_{ij}\right)$$

Se llamará **matriz adjunta** de A, y se representa por Adj (A), a aquella que tiene por elementos los adjuntos de los de A.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 9 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Ej:

$$\Rightarrow A_{23} = (-1)^{2+3} \det\left(M_2\right.$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$$

Cálculo de un determinante por los adjuntos de una fila (del mismo modo se haría por los adjuntos de una columna).

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \text{alj ...a2J} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \text{aij} & & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \text{am2...} & & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \text{Si} & & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si desarrollamos el determinante por la primera fila:

$$\det(A) = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} + \ldots + a_{1n} A_{1n}$$

Este procedimiento se puede realizar a partir de cualquier fila o columna. Por tanto, será interesante elegir una fila o columna en el que la mayoría de sus elementos sean cero.

Este método lo usaremos siempre que tengamos determinante de orden mayor que tres.

6. MATRIZ INVERSA.

Una matriz cuadrada que posee inversa se dice que es invertible o regular; en caso contrario recibe el nombre de singular. Para que una matriz posea inversa su determinante ha de ser distinto de cero.

Propiedades de la matriz inversa:

a) La matriz inversa, si existe, es única

b) $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$

c) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

d) $(A^{-1})^{-1} = A$

e) $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$

Hay varios **métodos para calcular la matriz inversa** de una matriz dada:

- Directamente
- Método de Gauss
- Método de los adjuntos

6.1. MÉTODO DIRECTO.

Calcularemos la matriz inversa resolviendo la ecuación resultante de la propiedad:

$A^{-1} \bullet A = A \bullet A^{-1} = I$

Ej: Hallar, si es posible, la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz A posee inversa pues det

$$\left(A\right) = 3 \neq 0$$

Debemos encontrar una matriz

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tal que:}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a - c & 2b - d \\ a + c & b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales si son iguales elemento a elemento, por 10 que obtenemo sistema:

$$\begin{cases} 2a - c = 1 \\ a + c = 0 \\ 2b - d = 0 \\ b + d = 1 \end{cases} \text{Resolviendo el sistema} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{1}{3} \\ c = \dfrac{-1}{3} \\ d = \dfrac{2}{3} \end{array}$$

NOTA: este método no lo usaremos debido a la complejidad a medida que aumenta el orden de la matriz.

6.2. MÉTODO DE GAUSS.

El método consiste en partiendo de $\langle A \mid I \rangle$ llegar a $\langle I \mid A^{-1} \rangle$ usando las siguientes transformaciones:

a) Se pueden intercambiar dos filas entre sí.

b) Multiplicar una fila por un número distinto de cero.

c) Sumar o restar a una fila otra multiplicada por un número.

Ej: Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ Hacemos la transformación: } \begin{cases} f_2 \to \frac{1}{2} f_2 \\ f_3 \to f_3 - 4f_1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) f_3 \to f_3 - f_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -4 & -1/2 & 1 \end{array}\right); f_3 \to 2f_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & -1 & 2 \end{array}\right); \begin{cases} f_1 \to f_1 + f_3 \\ f_2 \to f_2 - \frac{3}{2} f_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

6.3. MÉTODO DE LOS ADJUNTOS.

Si tenemos una matriz tal que det (A)≠0, la matriz inversa viene dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot [\mathrm{Adj}(A)]^t$$

Ej: Calcular la matriz inversa de A

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Det (A) = -2≠ 0. La matriz tiene inversa.

Calculamos los adjuntos de cada elemento:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$Adj\,(A) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Adj\,(A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(Adj\ A)^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7/2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

7. ECUACIONES MATRICIALES.

Son ecuaciones en las que la incógnita es una matriz, X.

Antes de empezar a operar con las matrices dadas conviene despejar la matriz incógnita.

Veamos cómo se despeja la matriz incógnita X en algunas ecuaciones:

1. **X.A=B**

- La matriz A que se encuentra multiplicando a X pasa al otro miembro multiplicando por la inversa. Por tanto, para que la ecuación tenga solución A debe ser inversible.
- Puesto que el producto de matrices no es conmutativo, a la hora de multiplicar por la matriz inversa conviene observar si ha de hacerse por la derecha o la izquierda.
- En este caso como A multiplica a X por la derecha, la inversa de A multiplica a B por la derecha, quedando $X = B \cdot A^{-1}$.

2. **A.X+B=C**
- Pasando B al segundo miembro: A • X = C- B
- Multiplicando por la izquierda por A-1: X = (C - B) • A^{-1}

3. **A.X+B.X=C**
  - Sacando factor común X: (A + B) • X = C
  - Multiplicando por la izquierda por $(A + B)^{-1}$: X = $(A + B)^{-1}$ • C

8. RANGO DE UNA MATRIZ.

El rango de una matriz es el orden del mayor de los menores distintos de cero.

El rango de una matriz A se representa por rg(A).

Consecuencia: el rango no puede ser mayor al número de filas o de columnas

Propiedades:

a) Si se suprime o añade una fila o columna que es combinación lineal de las existentes el rango no varía.
b) Si todos los menores de orden n son nulo, entonces los de orden n+l también son nulos.
c) Si un menor de orden n es no nulo y todos los de orden n+l son nulos, entonces el rango es n.

Cálculo del rango usando determinantes.

Si a un menor M de orden h de la matriz A se le añade la fila p y la columna q de A (que antes no estaban en el menor), obtenemos un menor N de orden h+l que se dice obtenido de M orlando este menor con la fila p y la columna q.

El método para el cálculo del rango es un proceso iterado que sigue los siguientes pasos:

a) Antes de comenzar el método se busca un elemento no nulo, ya que si todos los elementos son O, el rango será O. El elemento encontrado será el menor de orden k=1 de partida.
b) Se orla el menor de orden k hasta encontrar un menor de orden k+l no nulo. Cuando se encuentra un menor de orden k+l no nulo se aplica a éste el método.
c) Si todos los menores orlados obtenidos añadiéndole al menor de partida los elementos de una línea i_0 son nulos, podemos eliminar dicha línea porque es combinación de las que componen el menor de orden k.

d) Si todos los menores de orden k+l son nulos el rango es k. (Si aplicamos bien el método en realidad, al llegar a este punto, la matriz tiene orden k). Ej: Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 10 & 0 \\ 0 & 13 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

Para calcular su rango buscamos un menor no nulo. En este caso el menor de orden 2.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$, por lo que partiremos de él.

Ahora buscamos los menores de orden 3 que resultan de orlarlo para ver si alguno de ellos es distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & 10 \\ 0 & -13 & -8 \end{vmatrix} = 8 - 234 + 130 + 96 = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & -13 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 78 - 72 = 0$$

Todos los menores de orden 3 son nulos, por tanto, el rango es 2.

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES

1. DEFINICIÓN.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de m ecuaciones con n incógnitas de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

donde a_{ij} son los coeficientes, x_i las incógnitas y b_i son los términos independientes.

Representación matricial.

El anterior sistema se puede expresar en forma matricial, usando el producto de matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

De modo simplificado suele escribirse A·X= B , donde la matriz A de orden m x n se denomina matriz de coeficientes. También usaremos la matriz ampliada, que representaremos por A', que es la matriz de coeficientes a la cual le hemos añadido la columna del término independiente:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Diremos que dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

A partir de un sistema de ecuaciones, podemos obtener otro equivalente a éste haciendo una serie de operaciones en el sistema. Las operaciones más habituales son:

- Multiplicar o dividir la ecuación por un número.
- Sumar o restar ecuaciones de un mismo sistema.

2. CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES.

Un sistema de ecuaciones se puede clasificar en función de sus soluciones de la siguiente forma:

a) **Sistema compatible:** tiene solución. Distinguimos:
   - Determinado: tiene solución única.
   - Indeterminado: tiene infinitas soluciones.

b) **Sistema incompatible:** no tiene solución.

3. TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS.

Permitir conocer si un sistema de ecuaciones tiene solución a partir del estudio del rango de la matriz asociada al sistema y del rango de la matriz ampliada de éste.

Dado un sistema de ecuaciones con matriz de coeficientes A, matriz ampliada A' y rangos respectivos r y r' se verifican:

- Si rango(A) = rango(A') = número de incógnitas= Sistema compatible determinado.
- Si rango(A) = rango(A') < número de incógnitas=Sistema compatible indeterminado.
- Si rango(A)≠ rango(A') =Sistema incompatible.

Sistemas de ecuaciones lineales Homogéneos:

Un sistema de ecuaciones se dice homogéneo si ninguna de sus ecuaciones tiene término independiente. Para su estudio se utiliza el Teorema de Rouché-Frobenius para sistemas homogéneos:

Como un sistema homogéneo es aquel que tiene todos sus términos independientes nulos, podemos observar que rango(A) = rango (A') siempre, luego siempre son compatibles, ya que tienen al menos la solución (0, 0, 0,..., 0) que se denomina solución trivial. Puesto que, en la práctica, esta solución carece de interés, suele decirse que un sistema homogéneo posee solución sólo si esta es distinta de la trivial.

- Si rg(A)≠ nº de incógnitas: Tenemos un sistema homogéneo compatible, lo que quiere decir que tiene infinitas soluciones.
- Si rg(A) = nº de incógnitas: Tenemos un sistema homogéneo incompatible, lo que quiere decir que sólo tiene la solución trivial.

4. MÉTODO DE CRAMER.

Lo utilizaremos para resolver un sistema de ecuaciones cuando el determinante de la matriz del sistema es distinto de cero.

El valor de cada incógnita se obtiene de la siguiente forma:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{23} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

TEMA 3. VECTORES. ECUACIONES DE RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO.

1. VECTORES.

1.1. DEFINICIONES.

Un vector es un segmento orientado. Lo representamos por $\vec{AB}$ o por $\vec{v}$. El punto A es el origen y el punto B el extremo.

Características de un vector:

a) Módulo: Es la longitud del vector. Lo representamos por $|\vec{AB}|$ o por $|\vec{v}|$

Si el vector $\vec{AB} = (v_1, v_2, v_3)$, su módulo se calcula:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

b) Dirección: es la dirección que pasa por los puntos A y B. Si dos vectores son paralelos, tienen la misma dirección.

c) Sentido: es el recorrido de la recta cuando nos trasladamos de A a B.

En todo vector tenemos dos sentidos opuestos; el que va de A a B, y el que va de B a A.

Cálculo de las coordenadas de un vector conociendo su extremo y su origen:

$A = (a_1, a_2, a_3)$
$B = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{AB}$ = extremo - origen = $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Ej: Calcular las coordenadas del vector AB y su módulo sabiendo: A = (2, -3, 1) y B = (1, 7, 5).

$$\vec{AB} = (1 - 2, 7 - (-3), 5 - 1) = (-1, 10, 4)$$
$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 10^2 + 4^2} = \sqrt{117}$$

Un vector es unitario si su módulo vale 1.

1.2 OPERACIONES CON VECTORES.

- **Suma y resta:** se realiza sumando o restando coordenada a coordenada.

  Ej: Sean los vectores $\vec{u} = (2, 4)$ y $\vec{v} = (-3, 1)$, calcula $\vec{u} + \vec{v}$

  $$\vec{u} + \vec{v} = (2, 4) + (-3, 1) = (2 + (-3), 4 + 1) = (-1, 5).$$

- **Producto de un número por un vector:** se multiplican las dos coordenadas del vector por el número, el resultado es un vector

  Ej: sea $\vec{u} = (2, 4)$, calcular $3\vec{u}$

$3\vec{u} = (6, 12)$

- Producto escalar de dos vectores: el resultado es un número y se calcula de la siguiente manera:

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \text{ y } \vec{v} = (v_1, v_2),\ \vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

Otra forma de calcular dicho producto es:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Si dos vectores son perpendiculares, forman 90^0, su producto escalar es cero.

$$\text{Ej: } \vec{u} = (2, 4, -1) \text{ y } \vec{v} = (-3, 1, 7)$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\cdot(-3) + 4\cdot 1 + (-1)\,7 = -6 + 4 - 7 = -9$$

Aplicación: Cálculo del ángulo que forman dos vectores:

Se obtiene aplicando la fórmula de definición de producto escalar.

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{u.v}{\|u\|.\|v\|}}$$

Ejemplo:

Halla el ángulo que forman los vectores

$$\vec{u} = (3, 2, 6) \text{ y } \vec{v} = (-4, 5, 1)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -12 + 10 + 6 = 4$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7;\ |\vec{v}| = \sqrt{16 + 25 + 1} = \sqrt{42}$$
$$\cos\alpha = \frac{u.v}{\|u\|.\|v\|} = \frac{4}{7\sqrt{42}}.$$

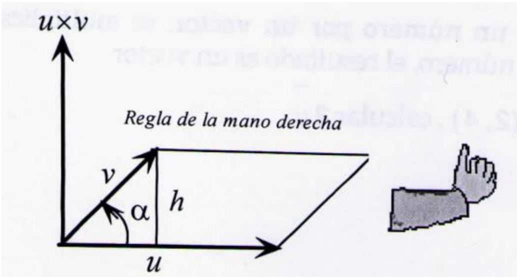
Buscando con la calculadora el ángulo cuyo coseno es $\frac{4}{7\sqrt{42}}$, se obtiene $\alpha = 84{,}94º$

- **Producto vectorial de dos vectores:** $\vec{u} \times \vec{v}$ el resultado es un vector que verifica:

Módulo: $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|\,.sen\,\alpha$

Dirección: Perpendicular al plano determinado por los vectores u x v

Sentido: Viene dada por la regla de la mano derecha: Si giramos con la mano el primer vector hasta hacerle coincidir con el segundo por el camino más corto, el dedo pulgar señala el sentido del vector $\vec{u} \times \vec{v}$.



Se calcula: $\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$

Siendo: $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

Ej: Calcula el producto vectorial de los vectores u = (1,7,-3) y v = (-5,0,4)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \right) = (28,\ 11,\ 35)$$

Aplicación: El módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo definido por los dos vectores.

Propiedades del producto vectorial:

- El producto vectorial es anticonmutativo: u x v = -v x u
- El producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo
- El producto $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a cada uno de los vectores u y v

- **Producto mixto**: producto mixto de tres vectores u, v y w es el número que se obtiene al realizar el producto escalar del primero por el producto vectorial de los otros dos.

Se expresa por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$. Por tanto, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$

$\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

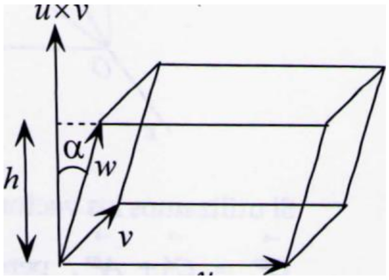
$\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$

el producto mixto viene definido por el valor del siguiente determinante:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Aplicación:

El producto mixto de u, v y w, en valor absoluto, es el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores.



Combinación lineal de vectores:

Dados tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, diremos que el vector v es combinación lineal de ellos, si existen tres números reales

α, β y λ tales que $\vec{v} = \alpha.\vec{a} + \beta.\vec{b} + \lambda.\vec{c}$

Un conjunto de vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, . . . , $\vec{v}_n$, son linealmente independientes, si la relación $\lambda_1.\vec{v}_1 + \lambda_2.\vec{v}_2 + \dots + \lambda_n.\vec{v}_n = 0$, sólo se verifica cuando todos los coeficientes son nulos, es decir, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots\dots\dots = \lambda_n = 0$.

En el espacio, el máximo número de vectores linealmente independientes que pueden existir es tres.

Un conjunto de vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, . . . , $\vec{v}_n$ son linealmente dependientes, si se pueden expresar en la forma $\lambda_1.\vec{v}_1 + \lambda_2.\vec{v}_2 + \dots + \lambda_n.\vec{v}_n = 0$ y existe algún $\lambda_i \neq 0$.

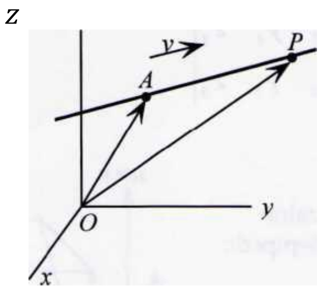
En la práctica veremos si tres vectores son linealmente independientes en el espacio si su producto mixto es distinto de cero, es decir, calculando el determinante que forman dichos vectores.

2. ECUACIÓN DE LA RECTA.

Una recta queda determinada cuando se conoce un punto y un vector, llamado vector director. Vector director es aquel que tiene la misma dirección de la recta.

a) Ecuación vectorial:

En el siguiente sistema de referencia, también llamado de coordenadas cartesianas, conocemos el punto A y el vector director v .



Si utilizamos los vectores de posición de los puntos A y P resulta:

$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$, pero existe un número real λ tal que $\vec{AP} = \lambda\ \vec{v}$, por tanto, $\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda\ \vec{v}$

Se llama vectorial porque la conocemos a través de los vectores de posición de cada uno de sus puntos.
Si las coordenadas de cada uno de los vectores son:
$\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$, $\vec{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, se obtiene
$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(v_1, v_2, v_3)$ con $\lambda \in \Re$ que es la ecuación vectorial de la recta expresada en coordenadas. Para cada valor que le demos a λ, se obtiene un punto de la recta y si le damos todos los valores de los números reales, se obtienen todos los puntos.

b) Ecuación paramétrica:

Se obtienen a partir de la ecuación vectorial expresando por separado cada variable.

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \quad \text{con } \lambda \in \Re \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{cases}$$

c) Ecuación continua:

Se obtiene a partir de la ecuación paramétrica eliminando λ en el sistema.

$$\lambda = \frac{x - a_1}{v_1};\ \lambda = \frac{y - a_2}{v_2};\ \lambda = \frac{z - a_3}{v_3}.$$

Igualando los valores de λ, se obtiene la ecuación continua: $\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2} = \dfrac{z - a_3}{v_3}$

d) Ecuación general o implícita (intersección de dos planos):

Se obtiene multiplicando en cruz las igualdades de la ecuación continua.

$$r:\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

El vector director de la recta se calcula haciendo el producto vectorial de los dos vectores normales de cada plano $u_r = n_r \wedge m_r$.

Ej: Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A (1, -2, 3) y tiene como vector director a $\vec{v}$ = (-1, 4, 6).

Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (1, -2, 3) + \lambda(-1, 4, 6)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 3 + 6\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-3}{6}$

Ecuación general: $r:\begin{cases} 4a + y - 2 = 0 \\ -6y + 4z - 24 = 0 \end{cases}$

3. ECUACIÓN DEL PLANO.

Para determinar la ecuación de un plano necesitamos un punto y dos vectores linealmente independientes (no proporcionales).

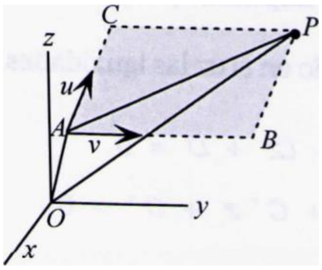
a) Ecuación vectorial:

En el sistema de referencia, conocemos el punto A y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ .Un punto cualquiera, P, del plano se puede expresar: $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$

Existen dos números reales ʎ y µ tales que $\vec{AP}$ = ʎ.u+µ.v

Por tanto, $\vec{OP}$ = $\vec{OA}$ + ʎ.u+µ.v que es la ecuación vectorial dcl plano. Si las coordenadas de cada uno de los vectores son:

$\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$; $\overrightarrow{OA}(a_1, a_2, a_3)$; $u = (u_1, u_2, u_3)$; $v = (v_1, v_2, v_3)$, se obtiene $(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$ que es la ecuación vectorial del plano expresada en coordenadas.



b) Ecuación paramétrica:

Se obtienen a partir de la ecuación vectorial expresando por separado cada variable.

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

c) Ecuación general o implícita:

Se obtiene eliminando λ y μ en la ecuación paramétrica.

Si las consideramos como un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} \lambda u_1 + \mu v_1 = x - x_0 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 = y - y_0 \\ \lambda u_3 + \mu v_3 = z - z_0 \end{cases}$$

como el rango de la matriz de coeficientes es 2, para que tenga solución, el rango de la matriz ampliada ha de ser también 2 lo que exige que el determinante de dicha matriz sea nulo, es decir,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Esta es la ecuación implícita del plano. Si desarrollamos el determinante y simplificamos, la ecuación toma la forma $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$

Vector normal del plano: es un vector perpendicular al plano. Una vez quo tengamos la ecuación general del plano obtener las coordenadas del vector normal es fácil:

$\vec{n}$= (A, B, C) siendo la ecuación general del plano: $\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$

Ej: Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(1,0,1) y por vectores directores:

Ecuación vectorial: (x, y, z) = (1,0,1) + ʎ (2,-1,0) + μ (0,3,2)

Ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1\lambda + \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$$

Ecuación general:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+2y-3z+2=0$$

4. POSICIONES RELATIVAS.

4.1 ENTRE DOS RECTAS.

Para estudiar la posición relativa de dos rectas podemos utilizar varias técnicas.

4.1.1. Considerando un punto y un vector de cada recta.

Supongamos que disponemos de $\vec{V}r$ y $\vec{V}s$, vectores directores de ambas rectas, como también de P_r y P_s, un punto perteneciente a cada una de las rectas.

Construiremos una matriz M, 2x3, en la que metemos los vectores directores y otra matriz M^*, 3x3, en la que ponemos tantos los vectores directores como un nuevo vector PrPs construido a partir de los puntos de cada recta. Seguidamente analizamos sus rangos:

- Rango de M = 1. Eso significa que los vectores directores son iguales o proporcionales, las rectas tienen la misma dirección, pudiendo pasar dos cosas:

Si el rango de M* = 1, Coincidentes.

Si el rango de M* = 2, Paralelas.

Rango de M = 2. Los vectores no tienen la misma dirección. Puede ocurrir:

a) Si el rango de M*= 2, Secantes.

b) Si el rango de M* = 3, Se cruzan.

4.1.2. Consideremos las rectas r y s dadas por sus ecuaciones generales:

$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{cases}$$

Las matrices de los coeficientes, M, y la ampliada; M', son:

$$M = \begin{pmatrix} A & & C \\ A' & & C' \\ A'' & & C'' \\ A''' & \text{A}^{\text{m}}\text{r} & C''' \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

Para estudiar la posición relativa habrá que resolver el sistema, por tanto el estudio lo haremos a partir del rango:

	rg(M)	rg(M')	Sistema	Posición de dos rectas
Caso 1	3	4	Incompatible	Se cruzan
Caso 2	3	3	Compatible determinado	Secantes
Caso 3	2	3	Incompatible	Paralelas
Caso 4	2	2	Compatible indeterminado	Coincidentes

4.2. ENTRE RECTA Y PLANO.

Consideramos la recta r y el plano π en forma general:

$$\equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Estudiar las posiciones de la recta y el plano equivale a discutir el sistema formado por sus ecuaciones. Las matrices de los coeficientes, M, y la ampliada; M', son:

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

	rg(M)	rg(M')	Sistema	Posición entre recta y plano
Caso 1	3	3	Compatible determinado	Secantes
Caso 2	2	3	Incompatible	Paralelos
Caso 3	2	2	Compatible indeterminado	Recta contenida en el plano

4.3. ENTRE DOS PLANOS.

Consideramos los planos dadas por las ecuaciones generales:

$$\begin{cases} \Pi \equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ \Pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

Estudiar las posiciones de dos planos equivale a discutir el sistema formado por sus ecuaciones. Las matrices de los coeficientes, M, y la ampliada; M', son:

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

	Rg(M)	Rg(M')	Sistema	Posición de dos planos
Caso 1	2	2	Compatible determinado	Secantes
Caso 2	1	2	Incompatible	Paralelos
Caso 3	1	1	Compatible indeterminado	Coincidentes

4.4. ENTRE TRES PLANOS.

Consideremos tres planos dados por sus ecuaciones generales:

$$\begin{cases} \Pi \equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ \Pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ \Pi'' \equiv A''x+B''y+C''z+D''=0 \end{cases}$$

Estudiar las posiciones de tres planos equivale a discutir el sistema formado por sus ecuaciones. Las matrices de los coeficientes, M, y la ampliada; M', son:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} A & B & D \\ A' & B & D' \\ A'' & B'\,C & D'' \end{pmatrix}$$

	rg(M)	rg(M')	Sistema	Posición de dos rectas
Caso l	3	3	Compatible determinado	Secantes en un punto
Caso 2	2	3	Incompatible	-Secantes dos a dos. -Dos paralelos cortados por el otro
Caso 3	2	2	Compatible indeterminado	-Secantes y distintos. -Dos coincidentes y uno distinto
Caso 4	1	2	Incompatible	-Planos paralelos distintos dos a dos. -Planos paralelos y dos coincidentes.
Caso 5	1	1	Compatible indeterminado	Planos coincidentes

5. HAZ DE PLANOS.

Dada una recta r: $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'Y+C'z+D'=0 \end{cases}$

se llama haz de planos secantes de arista r, al conjunto de todos los planos que pasan por r.

El haz de planos viene definido por la siguiente ecuación:
$\alpha(Ax+By+Cz+D)+ß(A'x+B'y+C'z+D')=0$

Es decir, es la combinación lineal de los dos planos que determinan la recta r.
Para ß = 0, se obtiene el primer plano y para = 0, obtenemos el segundo.

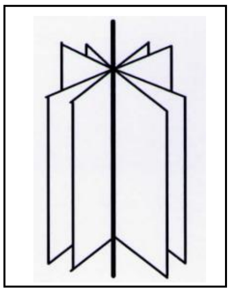
De los dos parámetros α y β, puede eliminarse uno, lo que supone una mayor simplicidad en los cálculos, aunque se paga el precio de perder un plano.

$$Ax + By + Cz + D + \alpha(A'x + B'y + C'z + D') = 0$$

Esta ecuación es más operativa que la primera al depender de un sólo parámetro Pero se pierde el plano A'x + B'y + C'z + D' = 0

Ej: Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r:

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 3x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$



y es paralelo a la recta s:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

Haz de planos que pasa por r: 2x - y +3 + λ (3x + y + z - 2) = 0 ó bien,

$$(2 + 3\lambda)x + (-1 + \lambda)y + \lambda z + (3 - 2\lambda) = 0$$

Si es paralelo a s, los vectores (-1,2,-1) y (2 + 3λ,-1+λ,λ) son perpendiculares, por tanto, el producto escalar es nulo: -1(2 + 3-) + 2(—1 + λ) - 1(3 - 2λ) = 0

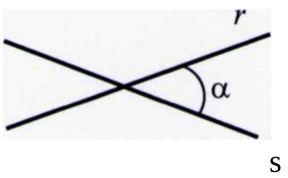
Resolviendo la ecuación obtenemos λ = -2.

Sustituyendo en la ecuación del haz, obtenemos 4x + 3y + 2z -7 = 0.

TEMA 4. PROBLEMAS MÉTRICOS.

1. ÁNGULO FORMADO POR DOS RECTAS.

Ángulo de dos rectas es el menor de los ángulos formados por sus respectivos vectores de dirección.



$$r : \frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} = \frac{z-a_3}{u_3}$$

$$s : \frac{x-b_1}{v_1} = \frac{y-b_2}{v_2} = \frac{z-b_3}{v_3}$$

De la definición de producto escalar, se obtiene:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|\,u.v\,|}{\|\,u\,\|\,.\,\|\,v\,\|} = \frac{|\,u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\,|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}}.$$

Tomamos el valor absoluto a fin de obtener el menor de los ángulos que forman las rectas.

Ej: Calcula el ángulo que formado por las rectas r y s siendo:

$$r : \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{5} \;\; ; \;\; s : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

Los vectores de dirección de las respectivas rectas son

$$\vec{u} = (1, -1, 5) \text{ y } \vec{v} = (2, 1, -1)$$

por tanto:

$$\cos\alpha = \frac{|\,1.2+(-1).1+5.(-1)\,|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+5^2}.\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|\,2-1-5\,|}{\sqrt{27}\sqrt{6}} = \frac{4}{9\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 71{,}68°$$

2. ÁNGULO FORMADO POR DOS PLANOS.

Dos planos

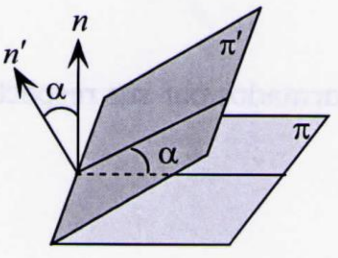
$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \quad y \quad \pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

determinan al cortarse cuatro ángulos diedros que son iguales dos a dos.

Se llama ángulo de los dos planos al más pequeño de los ángulos diedros. Dicho ángulo es igual o suplementario al que forman los vectores perpendiculares de cada plano

$$n = (A, B, C)$$
$$n' = (A', B', C')$$

También hemos de tomar el valor absoluto a fin de obtener el menor de los ángulos.



$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|n.n'|}{\|n\|.\|n'\|} = \frac{|A.A' + B.B' + C.C'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}}$$

Ej: Calcula el ángulo que forman los planos

$$\pi_1 : 2x - y - 3 = 0 ; \pi_2 : x + y - z = 0$$

Los vectores perpendiculares a cada uno de los planos son:

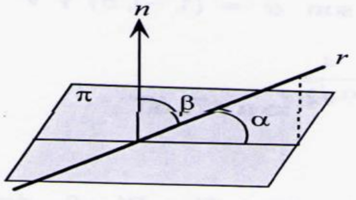
$$\vec{n}_1 = (2, -1, 0) \text{ y } \vec{n}_2 = (1, 1, -1).$$

$$\cos\alpha = \frac{|n_1.n_2|}{\|n_1\|.\|n_2\|} = \frac{|2-1+0|}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}}, \ \alpha = 75{,}03^{\circ}$$

3. ÁNGULO FORMADO POR UNA RECTA Y UN PLANO.

Es el ángulo formado por la recta y la proyección de dicha recta sobre el plano.
Teniendo en cuenta que ay p son complementarios, sen α = cos ß
Además,

$$\vec{n} = (A, B, C)$$
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$



$$\boxed{\text{sen}\alpha = \cos\beta = \frac{|n.v|}{\|n\|.\|v\|} = \frac{|Av_1 + Bv_2 + Cv_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}}$$

Ej: Calcula el ángulo que forma la recta $\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{-1}$ con el plano de ecuación x +3y+z-5=0

Vector perpendicular al plano: $\vec{n}=(1,3,1)$

Vector director de la recta $\vec{v}=(1,2,-1)$

$$sen\,\alpha=\frac{|1.1+3.2+1.(-1)|}{\sqrt{1+9+1}\sqrt{1+4+1}}=\frac{|1+6-1|}{\sqrt{11}\sqrt{6}}=\frac{6}{\sqrt{66}};\ \alpha=47{,}6^{\circ}$$

4. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

Distancia entre dos puntos A y B es el módulo del vector que une dichos puntos.

Si las coordenadas de los puntos son A (W_0, Y_0, Z_0) y B (X_1, Y_1, Z_1)

$\vec{AB}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$ y entonces:

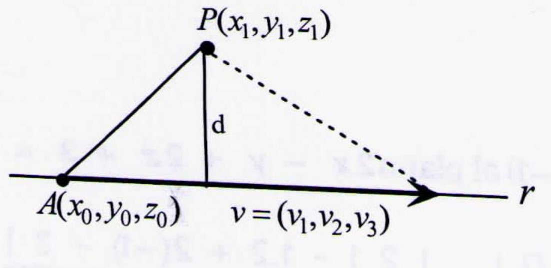
$$d(A,B)=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$

Ej: Calcula la distancia entre los puntos A (1, 3, 0) y B (-l, 2, 3)

$$d(A,B)=\sqrt{(-1-1)^2+(2-3)^2+(3-0)^2}=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$$

5. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

A es un punto de la recta y $\vec{v}$ es un vector director de la recta



$$d(P,r)=\frac{|\vec{AP}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Ej: Halla la distancia del punto P (1, -2, 2) a la recta dada por las siguientes ecuaciones paramétricas.

$$\begin{cases}x=2-\lambda\\ y=1+2\lambda\\ z=-1-\lambda\end{cases}$$

Un punto de la recta es A (2, 1, -1)

$\vec{AP} = (-1, \ -3, \ 3)$

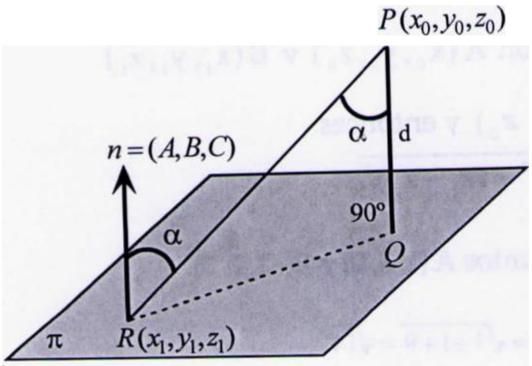
$\vec{v} = (-1, 2, -1)$, vector director de la recta.

$$\vec{AP} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-3, -4, -5);$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{6}$$

$$d(P, r) = \frac{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (-5)^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{50}{6}} = \sqrt{\frac{25}{3}}$$

6. DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO.



Dado el plano π : Ax + By + Cz + D = 0 , el vector $\vec{n}$ = (A , B, C) es perpendicular al plano.

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ej: Calcula la distancia del punto P (l, 2, -1) al plano 2x - y + 2 z + 3=0

$$d(p, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2.1 - 1.2 + 2(-1) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = = \frac{1}{3}$$

7. DISTANCIA DE DOS RECTAS PARALELAS.

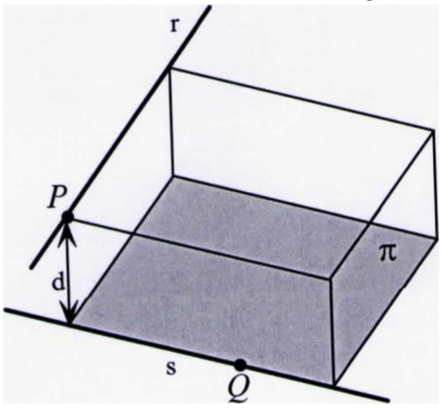
Sean las rectas

$$r : \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$ y

$$s: \frac{x-b_1}{v_1} = \frac{y-b_2}{v_2} = \frac{z-b_3}{v_3}$$, paralelas.

La distancia de dos rectas paralelas es igual a la distancia de un punto cualquiera de una recta a la otra recta: $d(r,s) = d({}_r r\ , s)$

8. DISTANCIA DE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN.



Siendo

$$r: \frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3};\ s: \frac{x-x_1}{v_1} = \frac{y-y_1}{v_2} = \frac{z-z_1}{v_3}$$

Para hallar la distancia entre dichas rectas procedemos de la forma siguiente:

$$d(r,s) = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{A_r A_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s\right)\right|}{\left|\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s\right|}$$

Ej: Dadas la rectas r:

$$\begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \quad y\ s: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}$$

a. Estudia su posición relativa comprobando que se cruzan.

b. Halla la mínima distancia entre ellas.

Un punto de r es P (5, -1, 8) y un vector $\vec{u}$ = (1, 0, 2)

Un punto de s es Q (2, 2, -1) y un vector $\vec{v}$ = (3, -1, 4)

Vector $\overrightarrow{PQ}$ = (-3, 3, -9)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 9 + 18 - 6 - 12 = 9 \neq 0$$

por tanto, las rectas se cruzan.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (2, 2, -1)$$

$$d(r, s) = \frac{|\,2.5 + 2(-1) - 8 + 9\,|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{3} = 3$$

TEMA 5: FUNCIONES.

1. CONCEPTO DE FUNCIÓN. DOMINIO Y RECORRIDO.

Las funciones son la aplicación más evidente de las matemáticas en nuestra vida diaria. La idea base del concepto de función, es la de relación de dependencia entre magnitudes o variables. Al estudiar un fenómeno cualquiera, se suele observar que las magnitudes o cantidades que intervienen presentan una relación entre ellas, de forma que una de las magnitudes depende de la otra.

Veamos algunas situaciones cotidianas en las que nos encontramos con dos magnitudes que dependen una de la otra:

1. El consumo de combustible de nuestro vehículo depende de la velocidad que llevemos. En este caso llamamos variable independiente a la velocidad y variable dependiente al consumo del vehículo.
2. El número de escalones de una escalera va a depender de la altura del edificio, por lo tanto, la variable independiente es la altura del edificio y la variable dependiente el número de escalones.

- Definición:

Una función real de variable real f es una aplicación que asigna a cada número x de un subconjunto de R un único número real y. Escribimos y=f(x) y decimos que y es la imagen de x por f.

$$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

La x recibe el nombre de variable independiente y la y de variable dependiente, ya que el valor de y depende del valor de x.

Nota: Para que una gráfica represente una función, a cada valor de x sólo le puede corresponder un valor de y.

- Definición:

El subconjunto de números reales "x" para los que la función está definida se llama dominio de f, y se representa como Dom(f).

Al conjunto donde toma valores la variable dependiente "y", se le llama imagen o recorrido de f, y su representación es Rec(f).

Nota: Cuando necesitamos calcular el dominio de una función que viene expresada por su fórmula, tenemos que tener en cuenta si no se puede realizar alguna de las operaciones para ciertos valores de la variable independiente.

Ejemplos:
El cálculo del dominio dependerá del tipo de funciones con el que nos encontremos.
Distinguimos:

1. Funciones polinómicas: Dom (f) = R

Ej: $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

2. Funciones racionales: son un cociente de polinomios

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

El dominio son todos los números reales menos los que hagan cero el denominador.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \mid Q(x)=0\}$.

Ej: $f(x) = \frac{4x-2}{x^2-4}$; $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

3. **Funciones irracionales:** son raíces de polinomios, distinguimos dos casos:

a) Índice impar:

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Ej: $f(x) = \sqrt[3]{x-6}$

b) Índice par: el dominio serán los valores de x que hagan al radicando mayor o igual que cero.

Ej: $f(x) = \sqrt{3x-18}$

$3x - 18 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6 \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = [6, +\infty)$.

4. **Funciones logarítmicas:** el dominio serán los valores de x que hagan al argumento del logaritmo positivo.

Ej: $f(x) = \log(5-x) \Rightarrow 5 - x > 0 \Rightarrow 5 > x$.

$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 5)$.

5. Funciones exponenciales:

Dom (f) = $\mathbb{R}$.

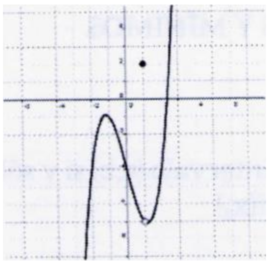
Ej: $f(x) = e^{2x - x^2}$

2. CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDADES

Una idea intuitiva del concepto de función continua es si la función puede dibujarse de un solo trazo, sin necesidad de levantar el lápiz del papel.

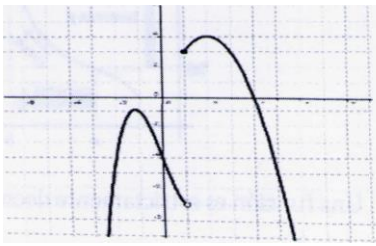
En caso de que se produzca alguna interrupción en el dibujo se dice que la función es discontinua. Los casos de discontinuidades que veremos serán:

Evitable:

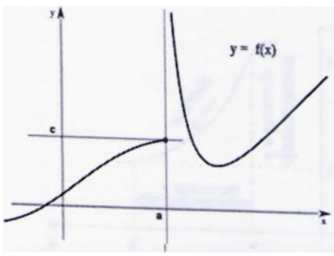


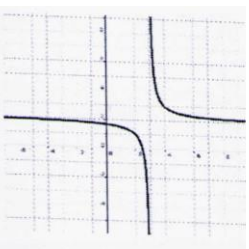
-Inevitable, distinguiremos 2 tipos:

- Salto finito:



- Salto infinito:



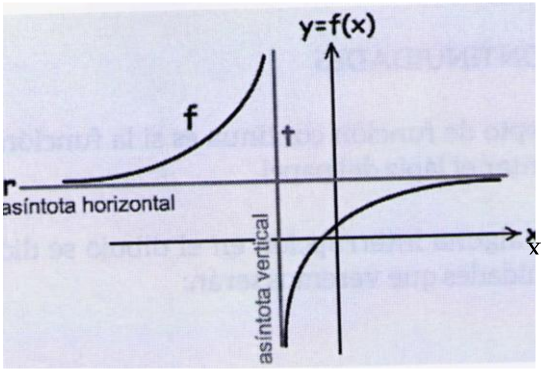


3. ASÍNTOTAS.

Definición:

La recta x=k es una asíntota vertical, si cuando x se acerca a k, la función se va hacia el infinito.

La recta y=k es una asíntota horizontal, si cuando x se va hacia el infinito (+∞ ó -∞) el valor de la función se va aproximando a k.

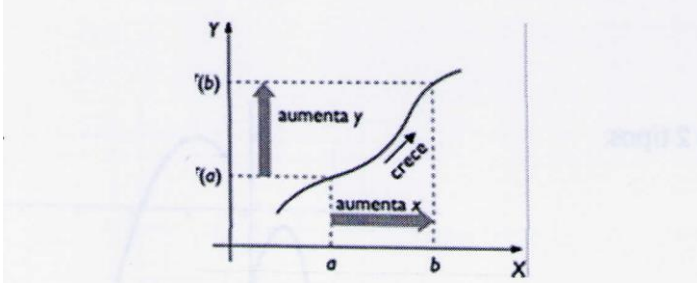


4. CRECIMIENTO, DECRECIMIENTO, MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

Definición:

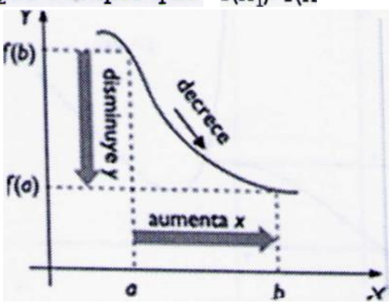
- Una función es estrictamente creciente en un intervalo (a,b) si y sólo si:

$\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$ tales que $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$



- Una función es estrictamente decreciente en un intervalo (a,b) si y sólo si:

$\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$ tales que $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x$



Definición:

Dada una función continua en un punto x=a, se dice que presenta un **máximo relativo**, si a la izquierda de dicho punto la función es creciente y a la derecha la función es decreciente.

Si, por el contrario, la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha hay un **mínimo relativo**.

Si se verifica que f(a)>f(x) para cualquier valor x del dominio, y no sólo para los valores de "alrededor", se habla de **máximo absoluto** en x=a.

Y, de forma análoga, diremos que en x=a hay un mínimo **absoluto** si f(a)<f(x) para cualquier x del dominio.

Nota:

A los máximos y mínimos relativos se les llama extremos relativos o simplemente extremos.

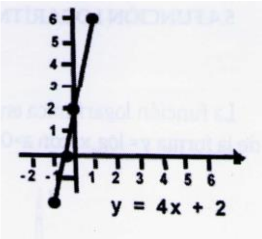
5. ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES.

5.1. FUNCIÓN LINEAL.

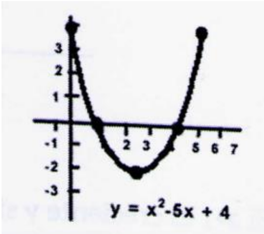
Es una función polinómica de grado 1. Su representación gráfica es una recta y para representarla basta hacer una tabla de valores.

Ej: $y = 4x + 2$.

X	Y
0	2
1	6



5.2. FUNCIÓN CUADRÁTICA. LA PARÁBOLA



Es de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba U.

Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo ∩.

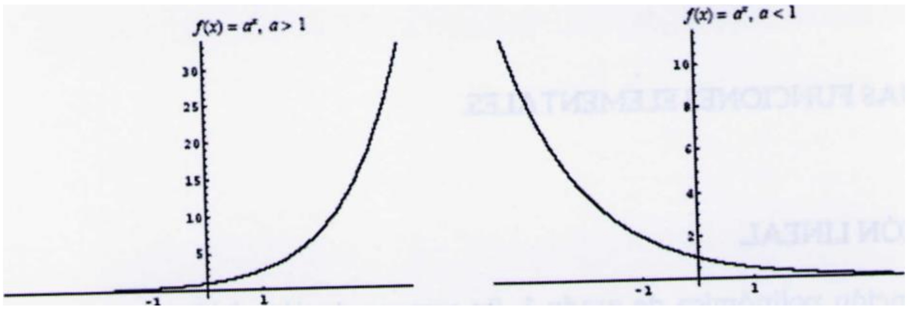
Para representar una parábola necesitamos conocer el vértice y los puntos de corte con los ejes.

Cálculo del vértice: $x_v = \frac{-b}{2_a}$, $= y_v$ una vez que conozcamos xv sustituimos en la expresión de la parábola.

5.3. FUNCIÓN EXPONENCIAL.

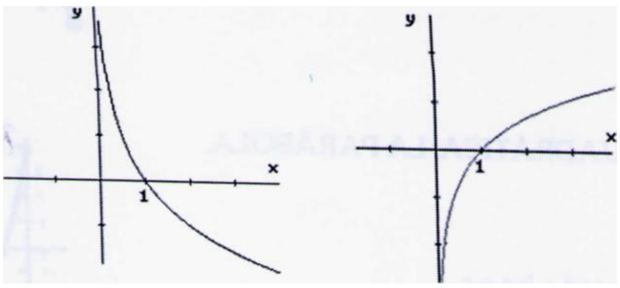
La función exponencial es de la forma y = ax, siendo a un número mayor que cero.

Si a> 1, la función es creciente, y si $0 < a < 1$ es decreciente.



5.4. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

La función logarítmica en base a es la función inversa de la función exponencial en base a, es de la forma $y = \log_a x$, con $a>0$, $a \neq 1$.



Si a>l es creciente y si 0<a<1 es decreciente.

6. SIMETRÍA, PERIODICIDAD, CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD.

Definición:

- Una función f es simétrica respecto al eje de ordenadas o par cuando para cualquier valor x de su dominio se verifica f(-x)=f(x).
- Una función f es simétrica respecto al origen o impar cuando para cualquier valor x de su dominio se verifica f(-x)=-f(x).

Definición:

- Una función es periódica cuando los valores que toma se van repitiendo cada cierto intervalo, que se llama período. Una función periódica cumple que f(x+T)=f(x), donde T es el período.

Definición:

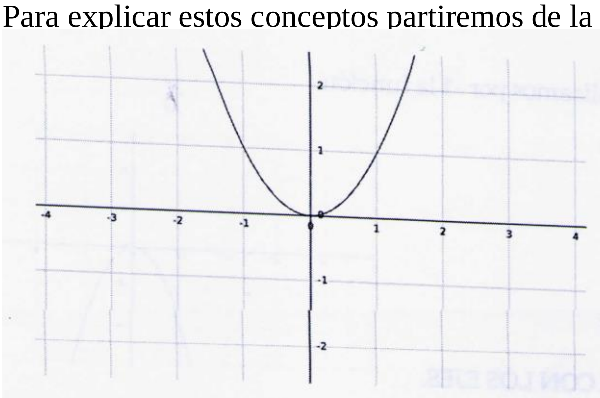
- Una función es cóncava si su gráfica tiene la forma "∩".
- Una función es convexa si su gráfica tiene la forma "U".

Nota: Es importante que cuando hablemos de la concavidad o convexidad de una función, acompañemos la explicación con su dibujo correspondiente pues, aunque la idea establecida actualmente es la presentada aquí, la definición anterior suele ser objeto de discrepancias.

1. TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES.

En ocasiones resulta útil conocer la gráfica de funciones elementales, tales como y = $\sqrt{x}$ o y = In x, para representar, a partir de ellas, otras funciones que presenten únicamente un desplazamiento o una inversión. Por este motivo resulta interesante saber determinar el efecto que se consigue cuando se le suma o resta una cantidad constante a la función o a la variable independiente.

Para explicar estos conceptos partiremos de la función elemental y = x^2

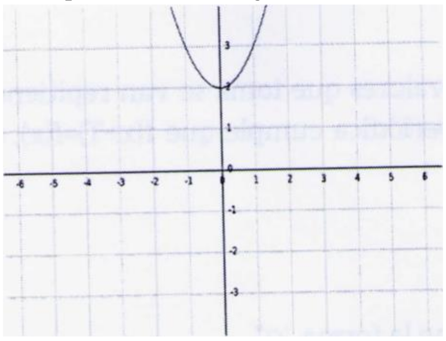


Recordemos tres tipos de transformaciones:

- Desplazamiento vertical.

Se produce cuando se le suma, a toda la función de partida, una constante. Si la constante es positiva se sube la función hacia arriba, mientras que si es negativa el desplazamiento es hacia abajo.

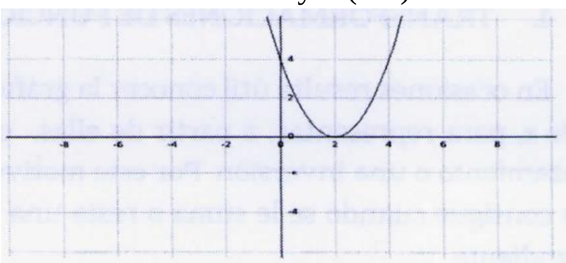
Veamos que ocurre con y$= x$



- Desplazamiento horizontal.

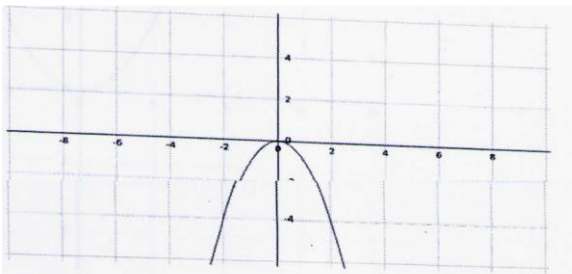
Se produce cuando se le suma exclusivamente a la variable independiente una constante. Si es positiva el desplazamiento es hacia la izquierda mientras que si es negativa, la función de traslada a la derecha.

Vemos este afecto con $y = (x-2)^2$



- Inversión.

Se produce cuando multiplicamos por -1 la función.
Veamos esto con $y = - x^2$



2. PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES.

Al representar una función gráficamente lo haremos sobre unos ejes coordenados, por lo que nos interesa saber por donde se cortan la función y lo ejes para ello resolveremos los siguientes sistemas:

Eje x: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$ Eje y: $\begin{cases} x = 0 \\ y = f(0) \end{cases}$

Ej: $f(x)= 2x^2 + x -3$

Eje x: $0 = 2x^2 + x -3$, resolviendo la ecuación $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{3}{2}$

Los punto de corte con el eje x son: $P_1 = (1, 0)$ y $P_2 = (-\frac{3}{2}, 0)$.

Eje y: sustituyendo en la función x = 0, obtenemos y = -3.

El punto de corte con el eje y es $P_3 = (0, -3)$.

9. VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número es, informalmente, su "valor positivo". Si el número es positivo ó 0, entonces su valor absoluto es sí mismo. Si un número es negativo, entonces su valor absoluto es su opuesto, el valor positivo correspondiente. Por ejemplo, el valor absoluto de 3, escrito |3| , es 3 mismo porque 3 es positivo. El valor absoluto de -3, sin embargo, escrito |-3|, es 3.

Por tanto la función valor absoluto es aquella que no toma valores negativos.

Así $|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$

Para "quitarle" el valor absoluto a una función, tendremos que ver para que valores de x la función es positiva o cero. En dichos valores la función se quedará tal cual, y en los valores en que la función sea negativa habrá que cambiarla de signo.

Ej: f (x) = |2x-6|

Primero resolvemos $2x-6 \geq 0$; $x \geq 3$. Por tanto la función será:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-6 & si \quad x \geq 3 \\ -(2x-6) & si \quad x < 3 \end{cases}; \quad f(x) = \begin{cases} 2x-6 & si \quad x \geq 3 \\ -2x+6 & si \quad x < 3 \end{cases}$$

TEMA 6: LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. CÁLCULO DE LÍMITES.

El límite de una función es el valor que toma la función cuando x se "acerca" a a.

Se escribe:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Para calcular el valor del límite se sustituye, en la función, x por el valor a.

Ej: $\lim_{x \to 2} 3x^2 - x - 7 = 3 \cdot 2^2 - 2 - 7 = 3$

El límite puede ser:

-Determinado, si nos da como resultado final: un valor real o +∞ o -∞.

-Indeterminado, si nos da alguna de estas expresiones:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{k}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty - \infty \quad 0 \cdot \infty \quad 1^{\infty}$$

Veamos cómo se pueden resolver estas indeterminaciones.

2. CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO x TIENDE A UN NÚMERO.

En este caso las indeterminaciones que encontramos son:

$$\frac{0}{0} \text{ y } \frac{k}{0} . \frac{0}{0}$$

distinguimos dos casos.

CASO 1:

La función está formada por un cociente de polinomios. Para resolver la indeterminación se factorizan los polinomios y se simplifican los factores comunes.

Ej: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \frac{0}{0}$

Primero se sustituye para saber con qué tipo de indeterminación nos encontramos.

Factorizamos el numerador: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

Factorizamos el denominador: $x^2 - 2x = x(x-2)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{x} = \frac{4}{2} = 2$$

CASO 2:

En la función aparecen raíces cuadradas. Para resolver la indeterminación se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado de la raíz.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x-2}-2}{x-3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x-2}-2}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{2x-2}-2\right)\left(\sqrt{2x-2}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{2x-2}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{2x-2}\right)^2-2^2}{(x-3)\left(\sqrt{2x-2}+2\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{2x-2-4}{(x-3)\left(\sqrt{2x-2}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{(x-3)\left(\sqrt{2x-2}+2\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{2x-2}+2\right)} =$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2}{\left(\sqrt{2x-2}+2\right)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$\frac{k}{0}$:

El resultado de esta indeterminación es ∞, lo único que tenemos que determinar es el signo. Para ello estudiaremos los límites laterales. Si ambos límites son iguales ese valor será el resultado, si son distinto, no existe límite.

Ej: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x-1} = \frac{3}{0}$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x+1}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x+1}{x-1} = +\infty$$

Al ser distinto los límites laterales, no existe l $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x-1}$.

3. CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO x TIENDE A ∞

Veamos cómo se opera con infinito:

- Suma: $a \in R$
  $a + \infty = \infty$
  $\infty + \infty = \infty$
  $\infty + 0 = \infty$
  $-a + \infty = \infty$

- Diferencia : $a \in R$
  $\infty - a = \infty$
  $\infty - 0 = \infty$
  $\infty - \infty =$ INDETERMINADO.
  $-\infty - \infty = -\infty$
  $0 - \infty = \infty$

- Producto: $a \in R$
  $\infty \cdot a = \infty$ si $a>0$
  $\infty \cdot a = -\infty$ si $a<0$
  $-\infty \cdot a = -\infty$ si $a>0$
  $-\infty \cdot a = -\infty$ si $a<0$
  $\infty \cdot \infty = \infty$
  $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$
  $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$
  $\infty \cdot 0 =$ INDETERMINADO

- Cociente : $a \in R$
  $0 : a = 0$
  $\infty : a = \infty$ si $a > 0$ o $-\infty$ si $a<0$
  $a : \infty = 0$
  $a : 0 = \infty$
  $\infty : 0 = \infty$
  $0 : \infty = 0$
  $\infty : \infty =$ INDETERMINADO

- Potencia: $a \in R$.

$$a^{\infty} = \begin{cases} \infty & si \quad a > 1 \\ 0 & si \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$a^{-\infty} = \begin{cases} 0 & si \quad a > 1 \\ \infty & si \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

En este caso las indeterminaciones que encontramos son:

$$\frac{\infty}{\infty} \text{ y } \infty - \infty.$$

$\frac{\infty}{\infty}$:

CASO 1:

La función está formada por un cociente de polinomios. Se resuelve dividiendo el numerador y el denominador por la x de mayor grado.

$$\text{Ej: } \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2/x^3-1/x^3}{x^3/x^3-1/x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x-1/x^3}{1-1/x^3}=\frac{0-0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

CASO 2:

En la función aparecen raíces cuadradas. Para resolver la indeterminación se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado de la raíz.

$\infty-\infty$: multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado de la raíz.

4. ASÍNTOTAS.

Las asíntotas son rectas a las cuales la función se va aproximando indefinidamente, cuando por lo menos una de las variables (x o y) tienden al infinito.

Las asíntotas se clasifican en:

-Verticales: (paralela al eje y). Se tienen si existe un número a tal que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

Entonces la asíntota es x = a.

El punto a, es un valor que no pertenece al dominio de la función.

Ej: $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$

Dom (f) = $\Re$ -{3}

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x}{(x-3)^2} = +\infty \rightarrow x = 3$$

-Horizontales: (paralela al eje x). Si existe el límite:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

La recta "y = b" es la asíntota horizontal.

-Oblicuas: Si existen los límites:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m;\ \lim_{x\to\infty} f(x)-mx=n;\text{ siendo } m\neq 0$$

La recta "y = mx+n" es la asíntota oblicua.

5. CONTINUIDAD

Una función f(x) es continua en el punto x = a si verifica:

-Existe f(a)

- Existe $\lim_{x\to a} f(x) \Rightarrow \left(\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)\right)$
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Si una función no es continua se dice que es discontinua en un punto si no es continua en dicho punto. Gráficamente si una función es discontinua en x = a, se observará un "salto" o un "hueco". Tenemos dos tipos de discontinuidad:

Evitable: No existe

f(a) o $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

Inevitable:

$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$

Dentro de este grupo distinguimos:

Salto finito: los dos límites laterales son finitos.

Salto infinito: si uno o ambos límites laterales son infinitos.

TEMA 7: DERIVADAS.

1. REGLAS DE DERIVACIÓN.

TABLA DE DERIVADAS

SIMPLES		1. COMPUESTAS	
$y=k$	$y'=0$		
$y=x$	$y'=1$		
$y=x^n$	$y'=n\cdot x^{n-1}$	$y=(f(x))^n$	$y'=n\cdot(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y=\sqrt[n]{x}$	$y'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y=\sqrt[n]{f}$	$y'=\frac{f}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}$
$y=a^x$	$y'=a^x Lna$	$y=a^{f(x)}$	$y'=a^{f(x)}Lna\cdot f'(x)$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=e^{f(x)}$	$y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x}\cdot\log_a e$	$y=\log_a f(x)$	$y'=\frac{1}{f(x)}\log_a e\cdot f'(x)$
$y=Lnx$	$y'=\frac{1}{x}$	$y=Ln(f(x))$	$y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$
$y=senx$	$y'=\cos x$	$y=sen(f(x))$	$y'=\cos(f(x))\cdot f'(x)$
$y=\cos x$	$y'=-senx$	$y=\cos(f(x))$	$y'=-sen(f(x))\cdot f'(x)$
$y=tgx$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x$	$y=tg(f(x))$	$y'=\frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}=(1+tg^2(f(x)))\cdot f'(x)$
$y=\cot gx$	$y'=\frac{-1}{sen^2x}=-1-\cot g^2x$	$y=\cot g(f(x))$	$y'=\frac{-f'(x)}{sen^2(f(x))}=(-1-\cot g^2(f(x)))\cdot f'(x)$

Derivadas de sumas, restas, productos y cocientes de funciones:

1. $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$

   Ej: $y=3x^2-2x^4+1 \Rightarrow y'=6x-8x^3$

2. $(k\cdot f(x))'=k\cdot f'(x)$

   Ej: $y=3x^5 \Rightarrow y'=15x^4$

3. $(f\cdot g)(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

   Ej: $y=x^2\cos x \Rightarrow y'=2x\cos x+x^2(-\operatorname{sen} x)$

4. $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

   Ej: $y=\frac{2x^2}{x^3-1}$; $y'=\frac{4x(x^3-1)-2x^2(3x^2)}{(x^3-1)^2}$

2. DERIVABLIDAD.

Una función f(x) es derivable en x = así:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}\left(\lim_{h\to a^+} f'(x)=\lim_{h\to a^-} f'(x)\right)$$

NOTA: Derivable = Continúa

No Continua = No derivable

Ej: Estudie la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & si \quad x<-1 \\ 2x+2 \quad si & -1\le x\le 2 \\ -x^2+8x & si \quad x>2 \end{cases}$$

Comenzamos estudiando la continuidad

$(-\infty,-1)\cup(-1,2)\ \cup(2,+\infty)$ la función es continua por ser una función polinómica.

Tenemos que estudiar la continuidad en los puntos conflictivos; x = -1 y x =2

x = -1

f(-1) = 2.(-1) + 2 = 0

$\lim_{x\to -1^-} x^2+2x+1=0$

$\lim_{x\to -1^+} 2x+2=0$

f es continua en x = -1

x = 2

f(2) = 2.2+2 = 6

$\lim_{x\to 2^-} 2x+2=6$

$\lim_{x\to 2^+} -x^2+8x=12$

f no es continúa en x = 2

Luego f es continua en R — {2}

Para estudiar la derivabilidad derivamos la función:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & si \quad x < -1 \\ 2 & si \quad -1 < x < 2 \\ -2x + 8 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

$(-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$, la función es derivable por ser una función polinómica En x = 2 la función no es derivable por no ser continua.

Vemos que pasa en x = -1

$$\lim_{x \to -1^-} 2x + 2 = 0$$

$$\lim_{x \to -1^+} 2 = 2$$

La función no es derivable en x = -1 Por tanto f es derivable $\Re - \{-1, 2\}$