PROBLEMAS, CUESTIONES Y EJERCICIOS DE

FÍSICA

JAIME CARRASCOSA ALÍS

Doctor en Didáctica de las Ciencias
Catedrático de Física y Química

SALVADOR MARTÍNEZ SALA

Licenciado en Ciencias Físicas
Catedrático de Física y Química

ÍNDICE

Generalitat Valenciana.
Valencia (España)

Versión revisada. Valencia. 29 de febrero de 2016.

PRESENTACIÓN

¿Qué es este libro? ¿Uno más de problemas?

Éste es un libro de cuestiones, ejercicios y problemas de Física, elaborado por profesores con una larga experiencia docente. Nuestro interés en este tema tiene su origen en las graves dificultades que muchos estudiantes tienen para resolver problemas de Física. Una reflexión crítica de nuestro propio trabajo en el aula nos ha llevado a cuestionar no pocas de nuestras ideas y comportamientos iniciales respecto a las diversas causas de dichas dificultades así como a la búsqueda de nuevas orientaciones que nos permitan, a profesores y alumnos, hacer frente de una forma más eficaz al "problema de los problemas".

Afortunadamente, en ese proceso de búsqueda de alternativas hemos contado con la ayuda de otros colegas que también están trabajando sobre el mismo tema y hemos tenido acceso a muchas de las investigaciones más importantes que desde la Didáctica de las Ciencias se han realizado en el campo de la resolución de problemas de lápiz y papel. Durante varios años hemos tratado de plasmar las nuevas orientaciones didácticas en ejemplos concretos de resolución de problemas, que hemos ensayado con nuestros propios alumnos, desarrollando un trabajo que creemos satisfactorio y gratificante tanto para ellos como para nosotros. En este libro hemos incluido gran parte de esos problemas, acompañados también de numerosos ejercicios de manejo y de cuestiones para la clarificación de conceptos físicos importantes.

¿Cuáles son sus contenidos y en qué orden se presentan?

Los contenidos que se incluyen en este libro corresponden a los siguientes temas:

Aprender a resolver problemas

1. Cinemática del punto
2. Dinámica del punto
3. Trabajo y energía
4. Sistemas de partículas
5. Sólido rígido
6. Campo gravitatorio
7. Campo eléctrico
8. Movimiento ondulatorio
9. Naturaleza de la luz
10. Física nuclear

Anexo sobre cálculo vectorial

Nuestro propósito es revisar continuamente estos contenidos tratando de mejorarlos y ampliarlos incluyendo más problemas complementarios y también otros nuevos capítulos.

El libro cuenta con una introducción ("Aprender a resolver problemas: una asignatura pendiente") del profesor Daniel Gil, en la que se exponen de forma breve y concreta las orientaciones que hemos intentado dar a muchos de los problemas que en él se incluyen y cuya lectura, o mejor aún, realización de las actividades que en él se proponen, recomendamos vivamente antes de comenzar a trabajar en los restantes temas.

El orden en que se presentan los distintos capítulos así como la secuenciación de los propios contenidos de cada uno de ellos, obedece a una lógica interna que permite ir avanzando en la construcción de un cuerpo coherente de conocimientos de Física. Ello hace aconsejable que los capítulos se vayan trabajando siguiendo el orden en que se presentan en el índice. No obstante, dado que el cálculo vectorial constituye un prerrequisito para gran parte de los temas tratados, es **necesario** asegurarse primero de que se domina este tema, por lo que conviene, que después de la introducción, se resuelvan los ejercicios sobre vectores que se incluyen en el anexo al final del libro.

¿A quienes va dirigido?

El contenido se ajusta bastante al programa oficial para las asignaturas de Física y Ampliación de Física de segundo de Bachillerato, pero el libro puede ser utilizado también con provecho por estudiantes de un primer curso de Física en la Universidad.

¿Cómo conviene utilizarlo?

Los problemas, ejercicios y cuestiones están resueltos en su mayoría y el resto viene con las soluciones. En los problemas, la resolución se ajusta esencialmente a las orientaciones básicas que se detallan en la introducción. En general se ha tratado de incluir, siempre que ha sido posible, un planteamiento cualitativo inicial, considerando diversas estrategias de resolución y analizando los resultados obtenidos, huyendo de la simple aplicación de fórmulas y de los cálculos numéricos precipitados.

Con el propósito explícito de contribuir a que el estudiante no sea un simple consumidor pasivo, se hacen frecuentes preguntas (*en letra cursiva*) en las que se invita a interrumpir la lectura y pensar sobre ellas tratando de contestarlas. Después hay que comparar el trabajo personal con lo que se presenta en el texto. Este procedimiento suele producir bastante satisfacción cada vez que se da una concordancia, pero, aunque en ocasiones no sea así, vale la pena realizarlo ya que los aprendizajes que se producen después de haber intentado seriamente resolver una cuestión, son siempre mucho más fructíferos. El libro será pues especialmente útil a aquellos que estén dispuestos a realizar el esfuerzo que conlleva un aprendizaje que vaya más allá de la simple memorización.

Coherentemente con las orientaciones anteriores, hemos optado por no incluir en los distintos capítulos ningún “formulario” y recomendar que el libro se complemente con un buen texto teórico y/o unos buenos apuntes del trabajo realizado en el aula. No obstante, es preciso tener en cuenta que en cada capítulo los problemas no se presentan aleatoriamente sino que siguen una secuencia bastante precisa, cubriendo una serie de conocimientos teóricos de manera progresiva. Ello hace muy conveniente ir trabajando los ejercicios de cada capítulo de forma ordenada.

En la selección y secuenciación de los contenidos de cada capítulo y del libro en general, hemos intentado evitar los tratamientos puntuales y favorecer que los fenómenos físicos que se estudian así como las magnitudes físicas que se introducen para ello, puedan ser comprendidas e integradas por los estudiantes. Ello nos ha hecho dar una importancia especial a todas aquellas expresiones que tienen un campo de validez más amplio, es decir que se pueden manejar en situaciones muy diversas.

Agradecimientos y recomendaciones finales

Los autores queremos expresar nuestro agradecimiento a todos los compañeros que, con sus críticas y discusiones han contribuido a la elaboración de este libro, a nuestros alumnos del

Instituto de Bachillerato "Cid Campeador" de Valencia que nos han permitido darnos cuenta de muchos errores de todo tipo y especialmente al profesor Daniel Gil por su colaboración y sus acertadas sugerencias.

Casi todo el mundo sabe que aprender bien algo exige un cierto esfuerzo. Los autores de este libro no queremos engañar a nadie diciendo que con este texto se aprende Física sin esfuerzo. Por el contrario, quienes lo utilicen y quieran aprovecharlo, han de estar dispuestos a realizar un trabajo serio. Por nuestra parte hemos intentado orientar los contenidos del libro para que se ese trabajo se pueda hacer bien y esperamos que al finalizarlo no solo hayáis aprendido algunas cosas sobre Física y resolución de problemas, sino que además haya aumentado vuestro interés por esta materia y penséis que el esfuerzo realizado ha valido la pena. Si eso se cumple, este libro habrá sido algo más que "un libro más de problemas".

Textos teóricos recomendados:

Por su coherencia con los contenidos y metodología empleados en este libro, recomendamos como obras de consulta y profundización los textos siguientes:

Física y Química de 1º de Bachillerato, de Jaime Carrascosa Alís, Joaquín Martínez Torregrosa, Salvador Martínez Sala y Juan José Ruíz.

Física de 2º de Bachillerato, de Jaime Carrascosa Alís, Salvador Martínez Sala y Manuel Alonso Sánchez.

APRENDER A RESOLVER PROBLEMAS: UNA ASIGNATURA PENDIENTE

Los problemas "de lápiz y papel" constituyen, como es bien sabido, la causa principal del fracaso de muchos estudiantes en el aprendizaje de materias como la Física. A menudo se pretende explicar dicho fracaso con argumentos que se refieren a las insuficiencias de capacidad y de esfuerzo de los estudiantes ("no dominan la teoría") o a los "fallos de atención" cuando leen un enunciado.

Pero, ¿hasta qué punto ese fracaso generalizado puede atribuirse únicamente a los estudiantes? De hecho, muchos de los que no logran resolver un problema muestran un conocimiento correcto de "la teoría", están interesados en aprender y resuelven sin dificultad muchos ejercicios estándar. Las explicaciones habituales sobre el fracaso en la resolución de problemas parecen, pues, insuficientes.

Ello ha dado lugar a una abundante investigación didáctica con objeto de profundizar en las razones de esta preocupante situación y buscar vías de solución. Los resultados de estas investigaciones permiten afirmar que el fracaso en la resolución de problemas de Física, o de otras materias como las Matemáticas o la Química, tiene otras causas y, lo que es más importante, que **es posible proporcionar a los estudiantes unas estrategias de resolución más efectivas** que les permitan enfrentarse con éxito a problemas que inicialmente puedan parecerles inabordables.

Este capítulo está destinado a que los estudiantes se apropien de esas nuevas estrategias, que podrán poner en juego reiteradamente en el resto de los capítulos del libro hasta familiarizarse plenamente con ellas, comprobando cómo su capacidad para resolver problemas aumenta notablemente y que es posible hacer mucho más que reconocer y repetir problemas ya hechos...o abandonar.

1. ALGO MÁS QUE DEFICIENCIAS DE LOS ESTUDIANTES

Conviene comenzar tomando conciencia de algunos defectos habituales en la forma de resolver problemas que pueden pasar inadvertidos. Proponemos para ello el siguiente pequeño ejercicio, cuya realización (inicialmente de forma individual) favorece una fecunda discusión posterior:

Un objeto se mueve a lo largo de su trayectoria según la ecuación: $e = 25 + 40t - 5t^2$ *(e en metros si t en segundos). ¿Qué distancia habrá recorrido durante los 5 primeros segundos?*

El resultado que obtienen muchas personas es, o bien 100 m o bien 75 m. Eso es lo que ocurre en general cuando ese "sencillo ejercicio" se propone a estudiantes, tanto de secundaria como universitarios, en más del 90 % de las respuestas. Si este ha sido también tu caso, sin entrar en la discusión de esta discrepancia, te proponemos:

Calcular la distancia recorrida por el mismo móvil a los seis segundos.

Los resultados obtenidos ahora son, normalmente, 85 m (quienes antes obtuvieron 100 m) o 60 m (quienes obtuvieron 75 m). Algo, pues, va mal: ¡El móvil no puede haber recorrido en más tiempo menos distancia! La resolución de este aparente enigma es, por supuesto, sencilla y te proponemos que tú mismo intentes descifrarlo:

Discute con otros compañeros el ejercicio propuesto y las posibles razones de los resultados obtenidos replanteando su resolución para superar las incoherencias aparecidas.

Una pequeña reflexión permite comprender que la ecuación dada ($e = 25 + 40t - 5t^2$) corresponde al movimiento de un objeto cuya posición inicial está a 25 m del origen y que avanza con rapidez decreciente (v_0 = 40 m/s y aceleración tangencial negativa $a = -10$ m/s^2) hasta pararse y comenzar a retroceder. Es lo que ocurre, por ejemplo, cuando lanzamos un objeto hacia arriba: el objeto va perdiendo velocidad, se para y cae....

Se obtienen así los resultados correctos, que son 85 m a los 5 s (80 m hacia delante y 5 m hacia atrás) y 100 m a los 6 s (80 m hacia delante y 20 m hacia atrás). Pero lo que nos interesa aquí, es reflexionar sobre el hecho de que un problema tan sencillo conduzca a resultados erróneos de forma tan mayoritaria.

¿A qué cabe atribuir unos resultados erróneos tan generalizados en un problema como el anterior? ¿De qué pueden ser índice? ¿Qué sugieren?

Los resultados del ejercicio que acabamos de comentar ponen en cuestión la orientación dada habitualmente a la resolución de problemas, caracterizada, entre otros, por los siguientes aspectos:

- La falta de reflexión cualitativa previa, o, dicho de otro modo, el operativismo mecánico con que se abordan habitualmente los problemas, incluso, a veces, por los mismos profesores. Conviene recordar a este respecto las palabras de Einstein:

"Ningún científico piensa con fórmulas. Antes que el físico comience a calcular debe tener en su cerebro el curso de los razonamientos. Estos últimos, en la mayoría de los casos, pueden ser expuestos con palabras sencillas. Los cálculos y las fórmulas constituyen el paso siguiente".

Sin embargo, insistimos, la orientación habitual de la resolución de problemas suele impulsar el manejo abstracto de fórmulas, buscando ecuaciones que relacionen datos e incógnitas y poniéndose a realizar cálculos inmediatamente.

- Un tratamiento superficial que no se detiene en la clarificación de los conceptos. Así, en el problema considerado, se producen evidentes confusiones entre diferentes magnitudes como “e” (espacio o posición sobre la trayectoria), Δe (desplazamiento espacial) y la distancia recorrida. Más aún: se manejan casi exclusivamente situaciones que favorecen las confusiones. En el caso que nos ocupa, por ejemplo, la mayor parte de los problemas sobre móviles toman como sistema de referencia (explícita, o, mas a menudo, implícitamente) el punto e instante en que el movimiento se inicia y sentido positivo el del movimiento, con lo cual el espacio “e “ coincide con el desplazamiento; si además no hay retrocesos, el valor de la distancia recorrida coincide también. De este modo, los problemas así planteados, en vez de ayudar a romper con visiones confusas, favorecen su afianzamiento.

Una discusión como la anterior permite que, tanto estudiantes como profesores, tomemos conciencia de las deficiencias de la orientación habitual de la resolución de problemas y comprendamos la necesidad de un replanteamiento en profundidad de la misma.

2. NECESIDAD DE UN REPLANTEAMIENTO EN PROFUNDIDAD

Las mayores dificultades que a menudo ha encontrado el desarrollo de una ciencia han derivado de supuestos implícitos, aceptados sin cuestionamiento alguno, que escapan así a la crítica. En tales casos se impone -como la historia de las ciencias ha mostrado reiteradamente- un replanteamiento en profundidad que analice críticamente hasta lo que parece más evidente. Por lo que se refiere a la orientación de la resolución de problemas, ello supone descender hasta la clarificación misma de la idea de problema. Esta será, pues, la siguiente actividad:

¿Qué hemos de entender por problema?

Existe un acuerdo general en entender como **problemas** aquellas situaciones que plantean dificultades para las que no se poseen soluciones hechas. Así Polya, un conocido investigador en el campo de la resolución de problemas, señala que:

"Resolver un problema consiste en encontrar un camino allí donde previamente no se conocía tal, encontrar una salida para una situación difícil, para vencer un obstáculo, para alcanzar un objetivo deseado que no puede ser inmediatamente alcanzado por medios adecuados".

Conviene ahora que nos planteemos la relación entre dichas ideas sobre lo que son los problemas y lo que se hace en clase:

¿En qué medida la forma en que suele abordarse la resolución de problemas está de acuerdo con su naturaleza de tarea desconocida para la cual, de entrada, no se posee la solución?

Esperamos que la discusión propiciada por esta actividad os habrá permitido poner en cuestión la práctica habitual de resolución de problemas. En efecto, los problemas suelen ser abordados como algo que se debe saber hacer, algo cuya solución ha de conocerse (si se sabe la teoría correspondiente y se tiene la base matemática necesaria) y no generar dudas ni exigir tentativas. De hecho, cuando un profesor resuelve un problema (bien sea en la pizarra o en las páginas de un texto), conoce la situación (para él no es un problema) y la explica "con toda claridad", sin dudas de ningún tipo; consecuentemente, alumnos y alumnas pueden aprender dicha solución y repetirla ante situaciones idénticas o casi idénticas, pero difícilmente aprenden a abordar un verdadero problema y cualquier pequeño cambio puede suponer dificultades insuperables provocando el abandono. Podemos dar un paso más y plantearnos:

Si un problema es una situación para la que no se tiene respuesta elaborada, ¿cómo habrá que enfocar su resolución?

Si se acepta la idea de que todo problema es una situación ante la cual se está inicialmente perdido, una posible orientación consistiría en preguntarse ¿qué hacen los científicos en este caso? Con ello planteamos concretamente qué es lo que hacen los científicos delante de lo que para ellos constituye un verdadero problema. La respuesta es "simplemente" que... se comportan como investigadores, enfrentándose a situaciones, **que les resultan desconocidas**, de una forma tentativa, construyendo hipótesis con ayuda de los conocimientos que poseen (y también de su inventiva), poniéndolas cuidadosamente a prueba, rectificándolas o abandonándolas a la luz de sus resultados y de los de otros investigadores, etc.

No hay, pues, ningún método preciso con reglas rígidas, no hay un camino que podamos aprender y seguir mecánicamente para resolver problemas en general... ni para cada problema en particular. Intentar aprender el camino, "la receta", para resolver cada problema, está abocado al fracaso, pues cada pequeña variación desconcierta y hace que nos sintamos perdidos. Se trata, por el contrario, de aceptar que estamos enfrentándonos a una situación nueva, más o menos familiar pero no completamente conocida... y aprender a trabajar tentativamente como hacen los científicos, imaginando (a la luz de los conocimientos teóricos existentes) posibles soluciones y probándolas, analizando los resultados, etc.

Ésta nueva orientación ha sido ensayada reiteradamente con resultados muy satisfactorios, transformando la actividad de los estudiantes en una actividad más creativa, interesante **y eficaz**. Proponemos, pues, analizar esa orientación investigativa (que presentamos detalladamente en el próximo apartado) y ponerla en práctica cada vez que os encontréis delante de lo que para vosotros constituya un verdadero problema.

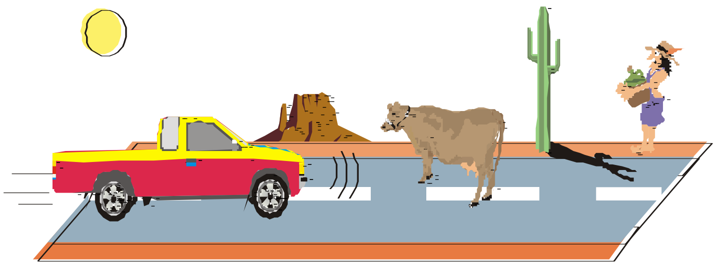
3. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO INVESTIGACIÓN

Digamos ante todo que las orientaciones que vamos a exponer con cierto detalle a continuación **no** constituyen una receta que pretenda guiar paso a paso vuestra actividad. Al contrario, se trata de indicaciones genéricas destinadas a llamar la atención contra ciertos "vicios" muy frecuentes que nos alejan de un comportamiento científico, como, p.e., la tendencia a caer en un manejo ciego de datos y ecuaciones (poniéndonos a calcular precipitadamente) o pensar en términos de certeza, lo que se traduce en no buscar caminos alternativos de resolución, en no poner en duda y analizar cuidadosamente los resultados, etc.

Conviene advertir que no se trata de que intentéis aprender "en abstracto" las orientaciones que siguen: es mucho más eficaz verlas "en acto" y, sobre todo, comenzar a utilizarlas contando con la ayuda de vuestro profesor. Hemos incluido, a título de ejemplo, el tratamiento detallado de un problema, que permitirá comprender mejor el sentido de las propuestas realizadas:

Sobre un móvil de 1000 kg de masa que se desplaza con una rapidez de 108 km/h, comienza a actuar una fuerza de frenado constante de 7500 N

¿Qué distancia recorrerá hasta pararse?

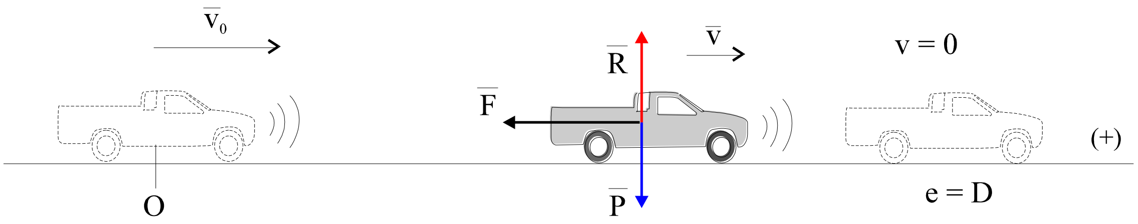


**Considerar cuál puede ser el interés de la situación problemática abordada*

El cálculo de la distancia que recorre un móvil hasta pararse tiene un indudable interés, por ejemplo, en el aterrizaje de aviones o en el tráfico de vehículos en general (por carretera y ciudad), en donde interesa asegurar una distancia mínima de frenada para evitar accidentes, lo que lleva a limitar la velocidad máxima, guardar una cierta distancia entre vehículos, perfeccionar los sistemas de frenado, etc.

**Comenzar por un estudio cualitativo de la situación, intentando acotar y definir de manera precisa el problema, explicitando las condiciones que se consideran reinantes, etc.*

En este problema un móvil lleva una cierta velocidad inicial y frena hasta que se para, pidiéndonos la distancia que recorre durante este proceso. Las fuerzas que actúan sobre el móvil son tres: el peso $\vec{P}$, la fuerza normal $\vec{R}$ ejercida por la carretera y la fuerza $\vec{F}$ de frenado. Las dos primeras son perpendiculares a la trayectoria y se anulan entre ellas, mientras que $\vec{F}$ es tangente. Para simplificar el problema, supondremos que la fuerza de frenado es constante, de modo que el movimiento será rectilíneo y uniformemente acelerado. Como la fuerza de frenado tiene sentido contrario al movimiento, la rapidez inicial del móvil irá disminuyendo linealmente desde v_0 hasta 0. En términos de trabajo y energía se podría describir diciendo que el trabajo realizado por la fuerza de frenado tiene como efecto disminuir la energía cinética hasta hacerla igual a 0.



La figura anterior representa un esquema de la situación, en donde podemos ver el punto que se toma como origen de espacios, las fuerzas que se ejercen sobre el móvil y cómo la velocidad del mismo se va haciendo cada vez más pequeña hasta que finalmente el móvil se para.

En el problema se nos pide la distancia D que recorre el móvil desde que comienza a frenar hasta que se para, lo cual, si tomamos como origen de espacios el punto O de la figura y como sentido positivo el del movimiento, equivale a determinar el valor de "e" en el instante en que la rapidez valga 0. En términos de trabajo y energía dicha distancia coincidirá con el módulo del desplazamiento experimentado por el móvil desde que comienza a frenar hasta que se para.

**Emitir hipótesis fundadas sobre los factores de los que puede depender la magnitud buscada y sobre la forma de esta dependencia, imaginando, en particular, casos límite de fácil interpretación física.*

En el ejemplo que nos ocupa, podemos pensar que la distancia D, va a depender de la rapidez a la que vaya el móvil en el momento que empiece a frenar, de modo que (a igualdad de los restantes factores) cuanto mayor sea ésta, más grande será la distancia que recorrerá hasta pararse. Otro factor que ha de influir es la fuerza resultante de frenado que actúe sobre el vehículo. Parece evidente, que cuanto mayor sea dicha fuerza menor distancia precisará para pararse (siempre a igualdad del resto de los factores). También podemos pensar en la influencia de la masa. Algunas personas creen que si tiene una masa muy grande se parará antes, pero si reflexionamos un poco nos daremos cuenta que sería al contrario, ya que, por ejemplo, cuesta más parar un camión que vaya a 100 km/h que una motocicleta a la misma velocidad, por tanto, cuanto mayor masa tenga, más distancia precisará para parar. (En ocasiones se señala también el tiempo que dure la frenada, sin embargo este factor está implícito ya en los factores enunciados). Así pues, la distancia recorrida hasta pararse podrá expresarse en función de las magnitudes citadas:

$$D = D\,(v_0,\, m,\, F)$$

Las magnitudes anteriores (v_0, m, F) constituyen, de hecho, los datos que se suministran en el enunciado del problema. Además de aventurar la forma en que cabe esperar que influyan en D, podemos considerar alguna condición límite, como por ejemplo, que si la fuerza resultante de frenado fuese nula no se pararía, es decir, D sería infinita o que si $v_0 = 0$, D tendrá que valer 0 (ya estaría parado).

Elaborar y explicitar posibles estrategias de resolución* ***antes* *de proceder a ésta, evitando el puro ensayo y error. Buscar distintas vías de resolución, para posibilitar la contrastación de los resultados obtenidos y mostrar la coherencia del cuerpo de conocimientos de que se dispone.*

Una posible estrategia de resolución es utilizar las ecuaciones cinemáticas y dinámicas correspondientes al movimiento del vehículo:

Al ser la trayectoria fija y conocida podemos realizar un tratamiento escalar para resolver el problema. Si escogemos como origen de espacios el punto donde comienza a frenar, origen de tiempos el instante en que lo hace y sentido positivo el del movimiento, tendremos:

Aceleración tangencial del móvil (constante):	$a_t = -F/m$	(1)
Rapidez del móvil en cualquier instante t del movimiento:	$v = v_0 + a\,t$	(2)
Posición del móvil en cualquier instante t del movimiento:	$e = e_0 + v_0 t + \dfrac{a\,t^2}{2}$	(3)

La determinación de la distancia D (e en el instante en que v = 0) podríamos efectuarla mediante la ecuación del movimiento (3), si supiésemos el instante t en que el móvil se para. Éste último lo podemos hallar fácilmente haciendo v = 0 en la ecuación (2) y despejando t. Para ello hemos de calcular previamente la aceleración mediante la ecuación (1).

Otra posibilidad es utilizar la ecuación que nos relaciona el trabajo realizado por la fuerza resultante a lo largo del desplazamiento que abarca el frenado, con la variación de energía cinética (teniendo en cuenta que la energía cinética final será 0) y despejar el módulo del desplazamiento, que en este caso coincide con la distancia recorrida D.

**Realizar la resolución propiamente dicha.*

De las estrategias expuestas vamos a desarrollar la segunda (basada en consideraciones de trabajo y energía), designando como estado A el que corresponde a la situación del móvil cuando empieza a frenar (v_A = 108 km/h = 30 m/s), y como B cuando se para (su velocidad se hace 0).

La ecuación que relaciona el trabajo realizado por la fuerza resultante con la variación de energía cinética es:

$$W_{res\,A}^{\;B} = \Delta Ec_A^B = Ec_B - Ec_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

En nuestro caso, la fuerza resultante es la de frenado $\vec{F}$ (tangente a la trayectoria), que siempre tiene sentido contrario al movimiento, la energía cinética en la situación B es 0 (se para) y el módulo del desplazamiento coincide con la distancia recorrida D. Introduciendo estas condiciones en la ecuación anterior:

$-F \cdot D = -\frac{1}{2}mv_A^2$ y despejando D obtenemos: $D = \dfrac{mv_A^2}{2F}$

Ahora, basta sustituir los datos numéricos y operar para obtener $D = \dfrac{1000 \cdot 900}{15.000} = 60$ m

**Analizar cuidadosamente los resultados a la luz de las hipótesis elaboradas y, en particular, de los casos límite considerados.*

Si analizamos el resultado del problema que estamos resolviendo, podemos darnos cuenta en primer lugar que el valor numérico obtenido (60 m) parece normal (está de acuerdo con nuestras experiencias cuando frena un automóvil). Si hubiese sido, por ejemplo, 0’6 m o 6000 m habría que dudar y revisar el problema.

Si nos detenemos en el resultado literal: $D = \dfrac{mv_A^2}{2F}$

podemos ver que la ecuación es dimensionalmente homogénea (dimensiones de una longitud a ambos lados de la igualdad). Ello no es garantía de que el ejercicio esté bien resuelto, pero si no se diese dicha homogeneidad sí que sería indicativo de alguna equivocación. Por otra parte, en el resultado se contemplan las hipótesis de partida y es fácil ver que cuando la masa y/o la rapidez inicial aumentan (para una cierta fuerza de frenado), la distancia D necesaria para pararse también aumenta (necesidad de limitar la velocidad máxima a la que pueden circular los vehículos, especialmente los de gran tonelaje), que si la fuerza F aumenta (manteniendo fijas la masa y rapidez inicial) D disminuirá (conveniencia de diseñar sistemas de frenada apropiados) o que si $v_A = 0$, la distancia $D = 0$, etc.

Además, dicho resultado nos permite aprender que, en contra de lo que piensan algunas personas, si la rapidez inicial con que se mueve un vehículo se duplica, la distancia que recorre hasta pararse no se hace también el doble sino **4 veces mayor**, ya que la rapidez inicial está elevada al cuadrado, es decir, es la variable que más influye.

Finalmente, si queremos, podemos resolver el problema mediante la otra estrategia (basada en un tratamiento puramente cinemático-dinámico) y comprobar que el resultado es el mismo.

**Considerad las perspectivas abiertas por la investigación realizada contemplando, por ejemplo, el interés de abordar la situación a un nivel de mayor complejidad o considerando sus implicaciones teóricas (profundización en la comprensión de algún concepto) o prácticas (posibilidad de aplicaciones técnicas). Concebir, muy en particular, nuevas situaciones a investigar, sugeridas por el estudio realizado.*

Al igual que ocurre en una verdadera investigación, los resultados pueden ser origen de nuevos problemas. Sería conveniente que los estudiantes (y los profesores) llegasen a considerar este aspecto como una de las derivaciones más interesantes de la resolución de problemas, poniendo en juego de nuevo su creatividad.

En el caso que estamos considerando, podemos plantearnos, a la luz del resultado obtenido, nuevos problemas de interés práctico, como por ejemplo:

¿Qué fuerza se ejerce sobre un coche en un choque frontal contra un obstáculo fijo?

La fuerza que se pide será la que ejerce el obstáculo y para determinarla, siguiendo con nuestro ejemplo, basta con despejar F en la ecuación anterior, teniendo en cuenta que si el obstáculo es fijo y grande (por ejemplo un muro) la distancia recorrida se reduce a lo que da de sí la carrocería del vehículo. Así si suponemos D = 2 m, la fuerza sería:

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{mv_A^2}}{\mathrm{2D}} = \frac{1000 \cdot 900}{4} = 225000\ \mathrm{N}$$

Como se puede ver fácilmente, en la situación descrita el valor de la fuerza que el obstáculo ejerce sobre el coche, resulta ser igual que el peso de un objeto de casi 23 toneladas de masa, lo que permite comprender las consecuencias fatales de un choque frontal a esa velocidad. El problema se agrava cuando en lugar de ser contra un muro es contra otro vehículo que va en sentido contrario (en cuyo caso v_A sería la suma de los módulos de ambas velocidades).

Otra cuestión interesante es:

¿Qué es lo que ocurre cuando un vehículo frena tan intensamente que bloquea las ruedas impidiendo el giro de éstas?

En la nueva situación planteada, la fuerza F de frenado será la fuerza de rozamiento máxima por deslizamiento entre las ruedas y la carretera, cuyo módulo viene dado por la expresión: $F_{roz} = \mu \cdot N$ siendo N el módulo de la componente normal de la fuerza que el vehículo ejerce sobre la carretera (cuyo valor, en este caso, coincide con el del peso, mg).

Sustituyendo F por $F_{roz} = \mu \cdot mg$, el resultado se convierte en:

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{mv_A^2}}{\mathrm{2F}} = \frac{mv_A^2}{2\mu F} = \frac{v_A^2}{2\mu F}$$

Este último resultado nos muestra que ningún vehículo puede frenar y parar en el acto, sino que siempre recorrerá una cierta distancia, tanto más grande cuanto menor sea el coeficiente de rozamiento con el suelo y mayor sea la velocidad a la que vaya (de ahí el peligro que representa conducir a gran velocidad sobre un pavimento mojado o con placas de hielo). Por otra parte, nos remite a la necesidad de que entre los vehículos se respete una distancia mínima de seguridad (que hay que calcular en función de la rapidez máxima permitida, el coeficiente de rozamiento y el tiempo que tarda un conductor en reaccionar ante la vista de un obstáculo). Además es necesario tener en cuenta que lo que es verdaderamente limitante no es la fuerza con que se pueda frenar sino la velocidad a la que se circula, ya que si ésta es muy grande, el hecho de parar en muy poca distancia podría matar al conductor por la enorme aceleración a la que se vería sometido.

Como podéis comprobar, las orientaciones para aprender a resolver problemas que hemos tratado de fundamentar en este capítulo, son bastante coherentes con algunas de las características del trabajo científico y particularmente con los aspectos más importantes comunes a la investigación científica, como son la invención de hipótesis, la elaboración de diferentes diseños para contrastarlas, el análisis de los resultados, el planteamiento de nuevas interrogantes, etc. Se trata pues de una propuesta "investigativa" que conviene aplicar siempre en la medida de lo posible para resolver problemas. No obstante, ello, no invalida el importante papel que pueden representar en el aprendizaje de la Física otro tipo de actividades como pueden ser los ejercicios de aplicación o las cuestiones destinadas a la clarificación de conceptos, que también se han incluido abundantemente en este libro.

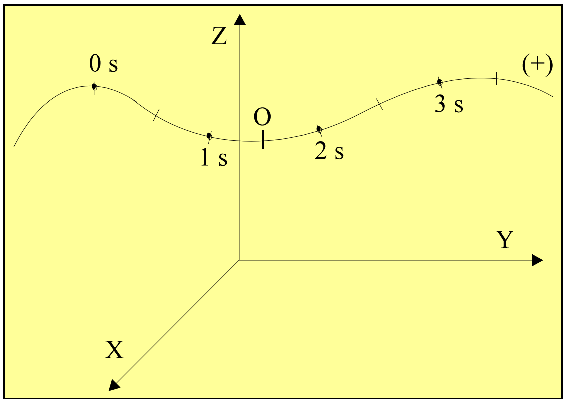
1. CINEMÁTICA DEL PUNTO

1. El vector de posición de un móvil viene dado por: $\vec{r} = 2t^2\vec{i} + (2t+1)\vec{j} + 2\vec{k}$ m (si t en s). Determinad:

a) Su posición en los instantes 0, 1, 2, 3, y 4 (todos ellos expresados en segundos).
b) La ecuación de su trayectoria.

sol: a) (0,1,2) m; (2,3,2) m; (8,5,2) m; (18,7,2) m; (32, 9, 2) m respectivamente.
b) $x = 2t^2$, $y = 2t+1$, $z = 2$

2. Representad la función e(t) del móvil de la figura adjunta (cada división es 1 m).



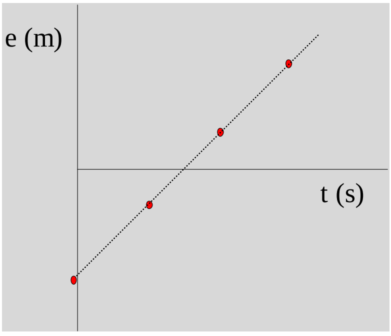
Como sabemos, la función e(t) determina la posición que ocupa, en cada instante, un móvil que se desplaza sobre cierta trayectoria conocida. Esta función, como todas, admite una doble representación: analítica y gráfica y en la práctica se puede pasar, con los conocimientos matemáticos adecuados, de una a otra forma.

En un caso como el que nos ocupa, vemos que con la información que se nos da resulta imposible obtener directamente la expresión analítica, pero, en cambio, sí que podemos *obtener la representación gráfica* (esto sucederá siempre que partamos de datos experimentales).

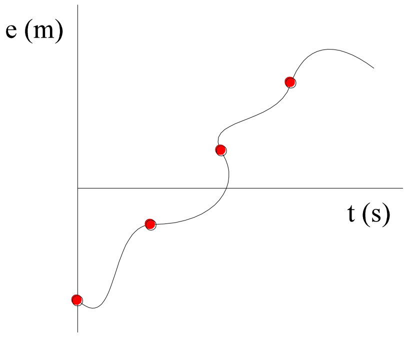
A partir de la figura del enunciado, podemos construir una tabla con los valores que están presentes en ella como datos:

t (s)	0	1	2	3
e (m)	-3	-1	1	3

Si *representamos los datos anteriores en una gráfica e-t*, observaremos que aparecen cuatro puntos alineados según una recta y, extrapolando los resultados, podemos imaginar que si hubiésemos conocido más puntos también estarían igualmente alineados, lo que significa que la gráfica será una recta (función lineal).



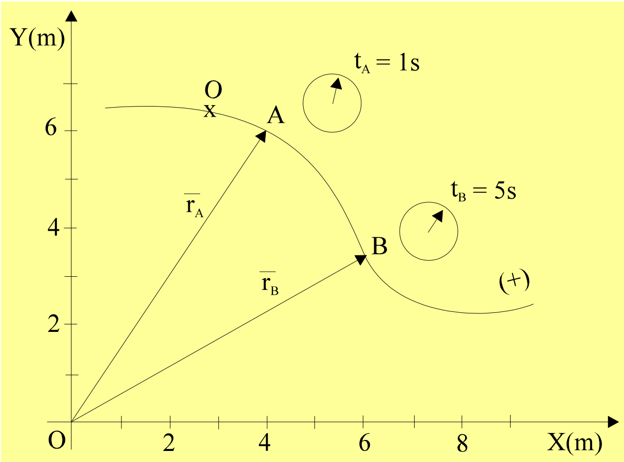
Es cierto que si solo tenemos en cuenta los datos que nos dan podría suceder que la función e(t) tuviese la forma de la figura de la derecha, pero es fácil imaginar que dar 4 valores aleatoriamente y que estén en línea recta es más que una casualidad. Con esto queremos decir que, aunque es posible, no es probable que así suceda.



Si la representación gráfica de la función es una recta, será sencillo obtener, a partir de ella, la forma analítica. En nuestro caso será: e = 2t-3.

Conviene tener en cuenta que la forma de la gráfica e (t) no tiene nada que ver con la trayectoria que sigue el móvil ya que lo único que nos indica es su posición en el transcurso del tiempo. En este ejercicio, por ejemplo, en el enunciado se muestra claramente que la trayectoria seguida es curva, mientras que la forma de la gráfica e (t) es una línea recta.

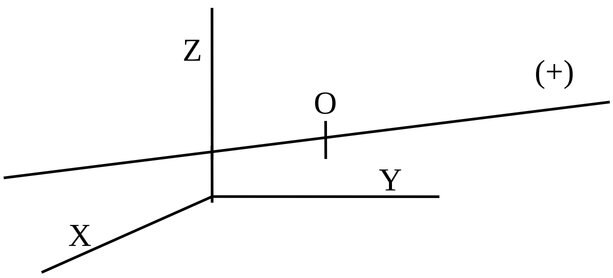
3. Una partícula se mueve sobre la trayectoria de la figura adjunta pasando por los puntos A y B en los instantes que marcan los relojes. Se pide:



a) Expresad los vectores de posición en los instantes representados en la figura.
b) Vector desplazamiento y su módulo en el intervalo de tiempo representado.
c) Sabiendo que el espacio del punto A es 1 m y el del punto B es 5 m, determinad el desplazamiento espacial (o desplazamiento sobre la trayectoria) en el intervalo considerado. Si la partícula se desplaza siempre en el mismo sentido, ¿cuál será la distancia recorrida en dicho intervalo?
d) Si la partícula, una vez que alcanza B, retrocede de nuevo al punto A llegando a él cuando el cronómetro indica 9 s ¿Qué valdría ahora el desplazamiento espacial en el intervalo (1, 9) s? ¿Y la distancia recorrida?

sol: a) $\vec{r}_A = (4,\ 6)\,\text{m};\ \ \vec{r}_B = (6,\ 3)\,\text{m}$. b) $\Delta\vec{r} = (2,\ -3)\,\text{m};\ |\Delta\vec{r}| = \sqrt{13}\,\text{m}$
c) Δe = 4 m; D = 4 m. d) Δe = 0; D = 8 m

4. Un móvil se desplaza sobre la trayectoria de la figura según: e = $-t^2$ +6t -2 m (si t en s). Representad gráficamente la función e(t).



sol: A diferencia del ejercicio 2, aquí la trayectoria es recta mientras que la forma de la gráfica e(t) es una curva (parábola).

5. Utilizando los datos del ejercicio 3, se pide: a) Rapidez media, vector velocidad media y su módulo. Todo ello en el intervalo (1, 5) s; b) Razonad por qué el valor (absoluto) de la rapidez media y el módulo de la velocidad media no son iguales.

sol: a) v_m = 1 m/s; $\vec{v}_m = (-3/4, 1/2)\,\mathrm{m/s}$; $|\vec{v}_m| = 0'9\,\mathrm{m/s}$

b) Porque únicamente coinciden si se trata de valores instantáneos. Los valores medios solo coinciden si la trayectoria es rectilínea, y en este caso no lo es.

6. Determinad la rapidez de un móvil en los instantes 0, 1, 2 y 3 (todos ellos en segundos) sabiendo que: e = 5t+1 m (si t en s) y construid la gráfica e(t).

sol: v = 5m/s

7. Determinad la rapidez de un móvil en los instantes 0, 1, 2 y 3 (todos ellos en segundos), sabiendo que: $e = -2t^2 + 4t - 2$ m (si t en s). Representad la función e(t).

sol: 4 m/s, 0, -4 m/s y -8 m/s respectivamente.

8. Determinad el vector velocidad $\vec{v}$ de un móvil sabiendo que su vector de posición viene dado por: $\vec{r} = 2t\,\vec{i} + t^2\vec{j} - 5\vec{k}$ m (si t en s).

sol: $\vec{v} = 2\vec{i} + 2t\,\vec{j}$

9. Sabiendo que un móvil se desplaza según la ecuación: $e = 3t^3 + 2t + 1$ m (si t en s), determinad su rapidez v y la aceleración sobre la trayectoria a_t

sol: $v = 9t^2 + 2$; $a_t = 18t$

10. Dado el vector de posición $\vec{r} = 2t\vec{i} + 5\vec{j} - (t+1)^2\vec{k}$ m (si t en s), determinad los vectores velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$.

sol: $\vec{v} = 2\vec{i} - 2(t+1)\vec{k}$; $\vec{a} = -2\vec{k}$ m/s²

11. Dado el vector de posición $\vec{r} = 2\vec{i} - t^3\vec{j} + 2t^2\,\vec{k}$ m (si t en s), determinad los vectores velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$.

sol: $\vec{v} = -3t^2\vec{j} + 4t\,\vec{k}$; $\vec{a} = -6t\,\vec{j} + 4\vec{k}$

12. Un cuerpo se mueve a lo largo del eje OX según la ecuación: $x = 2t^3 + 5t^2 +5$ (m, si t en s). Determinad las expresiones del vector de posición $\vec{r}$, el vector velocidad $\vec{v}$, el vector aceleración $\vec{a}$, la aceleración tangencial a_t y la aceleración normal a_n en cualquier instante t.

Antes de proceder a operar, conviene reflexionar sobre la siguiente cuestión:

¿Qué implicaciones tiene el hecho de que el cuerpo se mueva a lo largo del eje X?

Es evidente que las componentes Y y Z del vector de posición serán nulas. Lo mismo ocurrirá con el vector velocidad, ya que éste siempre es tangente a la trayectoria. Por otra parte, al tratarse de una trayectoria rectilínea, el vector velocidad no cambia de dirección y por tanto no puede haber aceleración normal, luego, si existe aceleración, solo podrá ser tangencial.

Para resolver el problema podemos expresar el vector de posición **r** en función de sus componentes cartesianas y derivando respecto al tiempo obtener sucesivamente los vectores velocidad y aceleración:

$$\vec{r} = (2t^3 +5t^2 +5,\ 0,\ 0) \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (6t^2 +10t,\ 0,\ 0) \rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (12t +10,\ 0,\ 0)$$

Del análisis de los vectores anteriores concluimos que el cuerpo se mueve siguiendo una trayectoria recta según OX, de manera que se va alejando del origen de coordenadas en sentido positivo y los módulos de su velocidad y aceleración van aumentando con el tiempo.

¿Cómo podríamos calcular a_t y a_n ?

Aplicando las expresiones $a_t = dv/dt$ y $a_n = v^2/R$, donde R es el radio de curvatura. Para poder realizar las derivadas anteriores, es necesario conocer en primer lugar la expresión del módulo de la velocidad (v), en cualquier instante:

De la expresión de $\vec{v}$, como solo tiene una componente, es evidente que su módulo v, coincidirá con el valor absoluto de dicha componente:

$v = 6t^2 +10t$ m/s (si t en s)

$a_t = dv/dt = d(6t^2 +10t)/dt = 12t +10$ m/s^2 (si t en s).

$a_n = v^2/R = (6t^2+10t)^2/R = 0$, ya que al tratarse de una trayectoria rectilínea, su radio de curvatura es ∞. Por tanto, tal y como habíamos señalado, toda la aceleración será tangencial.

13. El vector de posición de un móvil es: $\vec{r} = 2t\,\vec{i} + t^2\vec{j} - 3\vec{k}$ (m, si t en s). Se pide:

a) Los vectores velocidad y aceleración.
b) Las componentes intrínsecas de la aceleración y el radio de curvatura.

Este problema difiere del anterior en que ahora la trayectoria descrita no es rectilínea y, por tanto, al ir cambiando la dirección del vector velocidad existirá aceleración normal. No obstante, el procedimiento de resolución es el mismo:

Comenzaremos en primer lugar por calcular la expresión de la velocidad y aceleración en cualquier instante:

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ = d (2t, t^2, -3)/dt = (2, 2t, 0) y derivando de nuevo: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ = (0, 2, 0) m/s.

Para calcular a_t, aplicaremos la expresión a_t = dv/dt determinando primero la expresión del módulo del vector velocidad en cualquier instante:

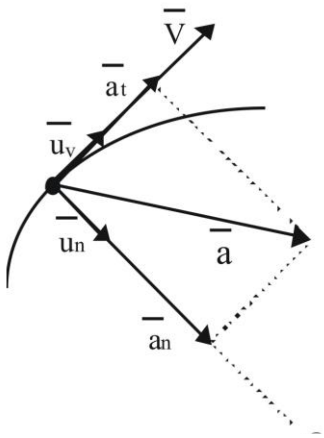
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 + 4t^2} \text{ m/s} \rightarrow a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{8t}{2\sqrt{4+4t^2}} = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$$

A pesar de que el vector aceleración es constante, al ser a_t variable con el tiempo se tratará de un movimiento variado y no uniformemente acelerado (el módulo de $\vec{v}$ cambia pero no lo hace regularmente, de forma lineal).

¿Cómo podríamos calcular a_n?

Podríamos pensar, en principio, en utilizar la expresión $a_n = v^2/R$, sin embargo, ello no es posible puesto que desconocemos el radio de curvatura R. Para evitar este inconveniente, recordemos que la expresión del vector aceleración en función de sus componentes intrínsecas, puede escribirse como: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t\vec{u}_v + a_n\vec{u}_n$ en la que $\vec{u}_v$ es un vector unitario que **siempre** tiene la misma dirección y sentido que $\vec{v}$ y $\vec{u}_n$ otro vector unitario que **siempre** es perpendicular a $\vec{v}$ y con sentido hacia el centro de curvatura O.

Analizando la figura adjunta, es fácil darse cuenta de la relación existente entre el módulo de la aceleración y las componentes a_t y a_n de dicho vector: $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$



Si expresamos el vector $\vec{a}$ en componentes cartesianas, podemos calcular su módulo como $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ = 2 m/s^2.

Dado que el módulo de un vector es independiente del sistema de coordenadas que utilicemos para representar dicho vector, podemos sustituir su valor en $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ y despejar la aceleración normal, con lo que:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{2^2 - \frac{4t^2}{1+t^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$$

Ahora, podemos determinar fácilmente la expresión del radio de curvatura R en cualquier instante, despejando R de la expresión $a_n = v^2/R$. En efecto:

$R = v^2/a_n$ y sustituyendo nos queda que: $R = \dfrac{4+4t^2}{\dfrac{2}{\sqrt{1+t^2}}}$ $= 2\ (1+t^2)^{3/2}$

14. Determinad las expresiones de la aceleración tangencial a_t, la aceleración normal a_n y el radio de curvatura R, para el caso del ejercicio 10.

sol: $a_t = \dfrac{2t+2}{\sqrt{t^2+2t+2}}$; $a_n = \dfrac{2}{\sqrt{t^2+2t+2}}$; $R = 2 \cdot (t^2 + 2t + 2)^{3/2}$

15. Dado el vector velocidad $\vec{v}$ =(3, 2t, 0) m/s (t en s), obtened el vector de posición $\vec{r}$ y el vector aceleración $\vec{a}$ sabiendo que en el instante 0, la posición es $\vec{r}_0$ = (0, 0, 2) m.

sol: $\vec{r}$ = (3t, t^2, 2); $\vec{a}$ = (0, 2, 0) m/s^2

16. Dado el vector velocidad $\vec{v} = 3\vec{i} - 2(t+1)\vec{j} + 3t^2\vec{k}$ (m, si t en s), determinad el vector de posición $\vec{r}$ y el vector aceleración $\vec{a}$, sabiendo que en el instante 2 s el vector de posición es $\vec{r}_0 = \vec{j} - 2\vec{k}$ m.

sol: $\vec{r} = (3t-6)\vec{i} - \left[(t+1)^2 - 10\right]\vec{j} + \left(t^3 - 10\right)\vec{k}$; $\vec{a} = -2\vec{j} + 6t\,\vec{k}$

17. La aceleración de un móvil viene dada por $\vec{a}$ = (2, 4, 6) m/s^2. Obtened la expresión del vector de posición en cualquier instante, sabiendo que en el instante inicial el móvil se encontraba en reposo en el origen de coordenadas.

sol: $\vec{r}$ = (t^2, $2t^2$, $3t^2$)

18. La aceleración de un móvil viene dada por $\vec{a}$ = (2, 4, 0) m/s^2. Obtened la expresión del vector de posición en cualquier instante, sabiendo que en el instante 1 s, la velocidad es (0, 2, 1) m/s y el vector de posición (1, 0, 0) m.

En este ejercicio conocemos el valor de $\vec{a}$ y se nos pide que calculemos el de $\vec{r}$. Para resolverlo necesitamos buscar la forma de relacionar ambas magnitudes.

¿Qué relación existe entre $\vec{a}$ *y* $\vec{r}$ *?*

En principio, $\vec{a}$ *y* $\vec{r}$ no están directamente relacionados ya que, como sabemos, $\vec{r}$ está relacionado con la velocidad $\vec{v}$ mediante la expresión: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Esto significa que podríamos conocer $\vec{r}$ integrando el vector $\vec{v}$. Para ello es necesario conocer $\vec{v}$, pero lo que conocemos es $\vec{a}$. No obstante, dado que los vectores velocidad y aceleración están relacionados mediante $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, podemos obtener $\vec{v}$ sin más que integrar $\vec{a}$.

Así pues, la forma de proceder será *integrar primero* $\vec{a}$ *para obtener* $\vec{v}$ *e integrar después* $\vec{v}$ *para obtener* $\vec{r}$.

Procederemos a realizar la primera integración:

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow d\vec{v} = \vec{a} \cdot dt$ e integrando en ambos miembros: $\int d\vec{v} = \int \vec{a} \cdot dt \rightarrow \vec{v} = \int \vec{a} \cdot dt$

Se trata pues de resolver la integral $\vec{v} = \int (2,4,0) \cdot dt$ que podemos abordar directamente o bien descomponerla en tres integrales escalares:

$$v_x = \int 2 \cdot dt = 2t + C_1$$
$$v_y = \int 4 \cdot dt = 4t + C_2$$
$$v_z = \int 0 \cdot dt = 0 + C_3$$

y volviendo a la expresión vectorial escribir $\vec{v}$ = (2t + C_1, 4t + C_2, C_3), que como vemos se trata de una expresión indeterminada a causa de las constantes de integración. *Para conocer* $\vec{v}$ *será pues necesario calcular primero el valor de dichas constantes.* Ello solo puede hacerse si conocemos el valor de $\vec{v}$ en un instante dado. En este caso, se nos dice que el móvil, en el instante 1 s se movía con una velocidad de (0, 2, 1) m/s, por tanto:

$\vec{v}_1$ = (2t_0 +C_1, 4t_0 +C_2, C_3) = (2 +C_1, 4 +C_2, C_3) = (0, 2, 1), de donde identificando las componentes nos queda:

2+C_1 = 0 $\rightarrow$ C_1 = 0-2 = -2;   4+C_2 = 2 $\rightarrow$ C_2 = 2-4 = -2; C_3 = 1

Así pues, la velocidad en cualquier instante t, viene dada por: $\vec{v}$ = (2t-2, 4t-2, 1)

Otro procedimiento para calcular $\vec{v}$, consiste en resolver la integral definida que resulta de introducir los limites de integración (el primero de los cuales corresponderá siempre al instante conocido que nos den y el segundo a cualquier instante posterior):

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a} \cdot dt$$

y descomponiendo los vectores:

$$\int_0^{v_x} dv_x = \int_1^t a_x \cdot dt \rightarrow v_x = \int_1^t 2 \cdot dt = 2t - 2$$
$$\int_2^{v_y} dv_y = \int_1^t a_y \cdot dt \rightarrow v_y = 2 + \int_1^t 4dt = 4t - 2$$
$$\int_1^{v_z} dv_z = \int_1^t a_z \cdot dt \rightarrow v_z = 1 + 0 = 1$$

Obtenemos así directamente el mismo resultado anterior: $\vec{v}$ = (2t-2, 4t-2, 1)

Para obtener el vector de posición $\vec{r}$, *seguiremos un procedimiento similar*: A partir de la expresión $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, sabemos que $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$. Considerando las componentes escalares de ésta última expresión e integrando, teniendo en cuenta que en el instante 1 s la posición del móvil viene dada por $\vec{r}_1$ = (1, 0, 0) m, nos queda que:

$$dr_x = v_x \cdot dt \rightarrow \int_1^x dr_x = \int_1^t v_x \cdot dt \rightarrow r_x = 1 + \int_1^t (2t-2)dt = t^2 - 2t + 2$$
$$dr_y = v_y \cdot dt \rightarrow \int_0^y dr_y = \int_1^t v_y \cdot dt \rightarrow r_y = \int_1^t (4t-2)dt = 2t^2 - 2t$$
$$dr_z = v_z \cdot dt \rightarrow \int_0^z dr_z = \int_1^t v_z \cdot dt \rightarrow r_z = \int_1^t dt = t - 1$$

Por tanto: $\vec{r}$ = (t^2-2t+2, $2t^2$-2t, t-1)

19. Un móvil se desplaza según la ecuación de movimiento e = $2t^3$ + 1 m (si t en s). Determinad la rapidez v y la aceleración sobre la trayectoria a_t.

sol: v = $6t^2$; a_t =12t

20. La aceleración sobre la trayectoria de un móvil viene dada por a_t = 2t +1 m/s^2 (si t en s). Determinad la ecuación del movimiento e(t) sabiendo que en el instante t = 0 su rapidez es de -2 m/s y la posición 4 m.

sol: e = t^3/3 + t^2/2 -2t + 4

21. La aceleración sobre la trayectoria de un móvil viene dada por a_t = 3t-2 m/s^2 (si t en s). Determinad su posición en los instantes 0 y 5 s sabiendo que a los 2 s su rapidez es de 4 m/s y su espacio es de -1 m.

Para conocer la posición del móvil en un instante dado, hemos de obtener primero la ecuación que de la posición en cualquier instante t, llamada ecuación del movimiento.

¿Cómo podemos obtener dicha ecuación?

Como la aceleración sobre la trayectoria (a_t) no es constante (movimiento variado), no existen unas ecuaciones ya conocidas para v y e (como sucede con los movimientos uniforme y uniformemente acelerado), siendo necesario integrar la a_t para obtener v = v (t) y después integrar v para obtener e = e (t).

Para resolver la primera integral partiremos de la expresión $a_t = \frac{dv}{dt}$, de modo que:

$dv = a_t \cdot dt \rightarrow \int dv = \int a_t \cdot dt \rightarrow v = \int (3t-2)\,dt = \frac{3t^2}{2} - 2t + C_1$

Para determinar C_1 hay que tener en cuenta que en el instante t_0 =2 s, la rapidez vale v_0 = 4m/s. Introduciendo estos datos en la ecuación anterior nos queda que:

$4 = 3\cdot 2^2/2 - 2\cdot 2 + C_1 \rightarrow C_1 = 2$ y, por tanto, $v = 3t^2/2 - 2t + 2$

Conocida v = v(t), podemos volver a integrar y obtener la ecuación e = v(t).

En efecto, a partir de $v = \frac{de}{dt}$ nos queda que:

$de = v\cdot dt \rightarrow \int de = \int v \cdot dt \rightarrow e = \int (\frac{3t^2}{2} - 2t + 2)\,dt = \frac{t^3}{2} - t^2 + 2t + C_2$

Para determinar C_2 hay que tener en cuenta que en el instante t_0 =2 s, la posición vale e_0 = -1m. Introduciendo estos datos en la ecuación anterior nos queda que:

$-1 = 2^3/2 - 2^2 + 2\cdot 2 + C_2 \rightarrow C_2 = -5$ y por tanto $e = t^3/2 - t^2 + 2t - 5$ m (si t en s).

Al mismo resultado se puede llegar mediante la utilización de integrales definidas, en las que el límite inferior vendría fijado por las condiciones conocidas y el superior coincidiría con las incógnitas a determinar:

$$dv = a_t \cdot dt \rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a_t \cdot dt \rightarrow \int_{4}^{v} dv = \int_{2}^{t} (3t-2)\,dt \rightarrow v - 4 = \frac{3t^2}{2} - 2t - 2 \rightarrow v = \frac{3t^2}{2} - 2t + 2$$

Integrando ahora en de = v·dt, nos queda que:

$$\int_{e_0}^{e} de = \int_{v_0}^{v} dv \rightarrow \int_{-1}^{e} de = \int_{2}^{t} (\frac{3t^2}{2} - 2t + 2)dt \rightarrow e + 1 = \frac{t^3}{2} - t^2 + 2t - 4$$

y de aquí obtenemos que: $e = t^3/2 - t^2 + 2t - 5$

La ecuación de e obtenida, nos permite calcular la posición del móvil en cualquier instante mediante la simple sustitución del valor de t. Así pues:

Posición del móvil en el instante t = 1 s: $e_1 = -5$ m
Posición del móvil en el instante t = 5 s: $e_5 = 5^3/2 - 5^2 + 2·5 - 5 = 42'5$ m

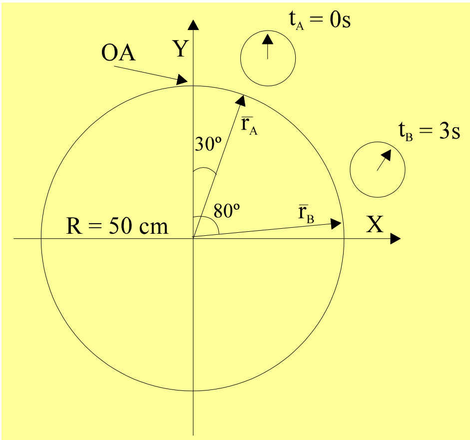
22. Un móvil se desplaza con una $a_t = -5$ m/s^2. Sabiendo que en el instante 0 s se encontraba en la posición e = 40 m y con una rapidez de 25 m/s.

a) Describid el tipo de movimiento de que se trata.
b) Obtened las ecuaciones de “v” y de “e” en función del tiempo.
c) Hallad el instante que la rapidez es nula y su posición en dicho instante.

sol: a) Movimiento uniformemente acelerado, en el que inicialmente el móvil se encuentra a 40 m del origen de espacios desplazándose en sentido positivo con una rapidez de 25 m/s. Su rapidez decrece linealmente con el tiempo en 5m/s cada segundo, de forma que llega un momento en que el móvil se para y a partir de entonces comienza a retroceder.
b) $v = -5t + 25$; $e = -5/2\ t^2 + 25\ t + 40$;   c) para t = 5 s y en el punto dado por e = 102’5 m.

23. Un móvil recorre una circunferencia de 20 cm de radio de modo que su posición en cualquier instante viene dada por $\theta = \pi t/4$ rad (si t en s). Haced un dibujo indicando las posiciones ocupadas por el móvil en los instantes: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 s.

24. Un móvil recorre la trayectoria circular de la figura adjunta pasando por los puntos A y B en los instantes 0 y 3 s, respectivamente.



a) Expresad los vectores de posición en los instantes 0 y 3 s.
b) Determinad el vector desplazamiento en el intervalo (0, 3) s y su módulo.
c) Hallad el desplazamiento angular y espacial en el intervalo (0, 3) s.

sol: a) $\vec{r}_A = (0'25, 0'43)$ m; $\vec{r}_B = (0'47, 0'09)$ m.
b) $\Delta\vec{r} = (0'22, -0'34)$ m; $\Delta r = 0'40$ m.
c) $\Delta\theta = 0'87$ rad; $\Delta e = 0'44$ m

25. Un móvil se desplaza por una trayectoria circular, de 60 cm de radio, con una aceleración angular $\alpha = 2\pi/3$ rad/s^2. Sabiendo que cuando el cronómetro indica 1 s su posición viene dada por un ángulo es de 60^0 y su rapidez es nula, determinad su rapidez angular y su ángulo en función del tiempo.

El movimiento descrito es uniformemente acelerado ya que, el cuerpo se mueve con una aceleración constante $\alpha = 2\pi/3$ rad/s^2, es decir su rapidez angular aumenta regularmente en $2\pi/3$ rad/s cada segundo que pasa. También sabemos que en el instante $t_0 = 1$ s, el cuerpo se encontraba en reposo en la posición dada por $\theta_o = 60º$.

¿Cómo podemos calcular w = w(t) y $\theta = \theta(t)$*?*

Como sabemos la aceleración angular α y los datos correspondientes a la posición y la rapidez en un instante dado (t = 1 s), podemos obtener fácilmente w = w(t) integrando en $\alpha = dw/dt$ y después el ángulo $\theta = \theta(t)$ integrando en $w = d\theta/dt$.

$$dw = \alpha \cdot dt \rightarrow \int_{w_0}^{w} dw = \int_{t_0}^{t} \alpha \cdot dt \rightarrow \int_0^w dw = \int_1^t \frac{2\pi}{3} dt \rightarrow w = \frac{2\pi}{3}(t-1)$$

En el instante $t_0 = 1$ s el ángulo vale $\theta_0 = 60º = \dfrac{60 \bullet 2\pi}{360} = \dfrac{\pi}{3}$ radianes

$$d\theta = w \cdot dt \rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} w \cdot dt \rightarrow \int_{\frac{\pi}{3}}^{\theta} d\theta = \int_1^t \frac{2\pi}{3}(t-1)\, dt \rightarrow \theta - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(t^2 - 2t + 1)$$

Despejando θ en la ecuación anterior nos queda: $\theta = \dfrac{\pi}{3}(t^2 - 2t + 2)$

Otra forma, más cómoda, de resolver este problema, consiste en considerar que las integraciones de α y ω, en el caso de ser α constante, tienen siempre la misma forma. Bastará pues con utilizar directamente esas expresiones, conocidas como las **ecuaciones del movimiento circular uniformemente acelerado** y sustituir en ellas los datos.

$w = w_0 + \alpha\,(t - t_0)$

$$\theta = \theta_0 + w_0 (t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha\,(t - t_0)^2$$

Sustituyendo en la primera ecuación se tiene: $w = \dfrac{2\pi}{3}(t-1)$ s^{-1}

Sustituyendo en la segunda: $\theta = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2\pi}{3}(t-1)^2 = \dfrac{\pi}{3}(t^2 - 2t + 2)$

26. Un móvil describe una trayectoria circular, de radio R=3 m, según la ecuación $\theta = 3t^3 + 2$ radianes (si t en s). Determinad la rapidez angular w, la aceleración angular α, la rapidez lineal v y la aceleración tangencial a_t.

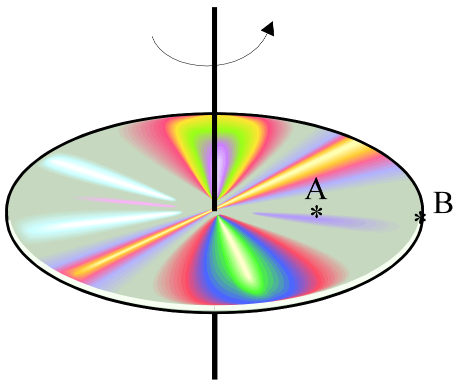
sol: $w = 9t^2$; $\alpha = 18t$; $v = 27t^2$; $a_t = 54\,t$

27. Un disco de radio 2 m gira en torno a un eje perpendicular por su centro, con rapidez constante. Sabiendo que invierte 4 s en dar un giro completo, se pide:

a) La rapidez angular w y lineal v de dos puntos, uno situado a 1 m de su centro (A) y otro en la periferia (B).
b) Frecuencia del movimiento.
c) Ángulo girado en un tiempo de 6 s.
d) Distancia recorrida por los puntos A y B en 6 s.

a) Se trata de un cuerpo extenso que gira en torno a un eje con rapidez angular constante. En este caso todos los puntos del sólido describen trayectorias circulares centradas en el eje y todos giran también el mismo ángulo (suponemos que el sólido es indeformable) en el mismo tiempo, es decir, poseen la misma rapidez angular.

¿Y qué ocurre con la rapidez lineal?



Si observamos los puntos A y B de la figura anterior, podemos darnos cuenta de que ambos describen ángulos iguales en tiempos iguales, pero el arco recorrido por B es siempre mayor, de manera que aunque ambos giran con la misma rapidez angular, la rapidez lineal de B será mayor que la de A. En efecto, la rapidez lineal de un punto cualquiera del disco viene determinada por la expresión $v = w \cdot R$ donde w es la rapidez angular (la misma para todos los puntos del disco) y R el radio de la circunferencia que describe dicho punto en particular, con lo que cuanto más grande sea R mayor será el valor de la rapidez v.

Como se trata de un movimiento circular uniforme, podemos aplicar las ecuaciones correspondientes:

$\alpha = 0$
$w = \text{constante}$
$\theta = \theta_0 + w\,(t-t_0)$

Para conocer w bastará con despejar de la última ecuación, con lo que nos queda:

$$w = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$$

Para conocer la rapidez lineal aplicamos v = w · R a cada uno de lo puntos:

Para el punto A: $v_A = w \cdot R_A = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$ m/s. Para el B: $v_B = w \cdot R_B = \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi$ m/s

Como vemos la rapidez lineal es justo el doble para el punto B, situado en la periferia que para el punto A cuyo radio de giro es la mitad. Esto quiere decir que aunque ambos dan el mismo número de vueltas cada segundo, la distancia recorrida por el B será siempre el doble que la recorrida por el A.

b) Como el disco gira con movimiento circular uniforme, se trata de un movimiento periódico en el que a intervalos regulares de tiempo (periodo) cada punto vuelve a estar en la misma posición y con el mismo estado de movimiento.

¿Cuál es el valor del periodo T para el movimiento de giro de cualquier punto del disco?

Es evidente que será precisamente el tiempo que tarde en realizar una vuelta completa (un ciclo), que en este caso es de 4 s.

La frecuencia ν, mide el número de vueltas completas (ciclos) que se realizan cada segundo. Se trata, por tanto, de una magnitud inversa del periodo, es decir: ν = 1/T. Su unidad internacional es el hertzio (Hz), de forma que un valor de 1 Hz significa que se realiza un ciclo completo cada segundo.

ν = 1/T = 1/4 = 0'25 Hz *¿Qué quiere decir este resultado?*

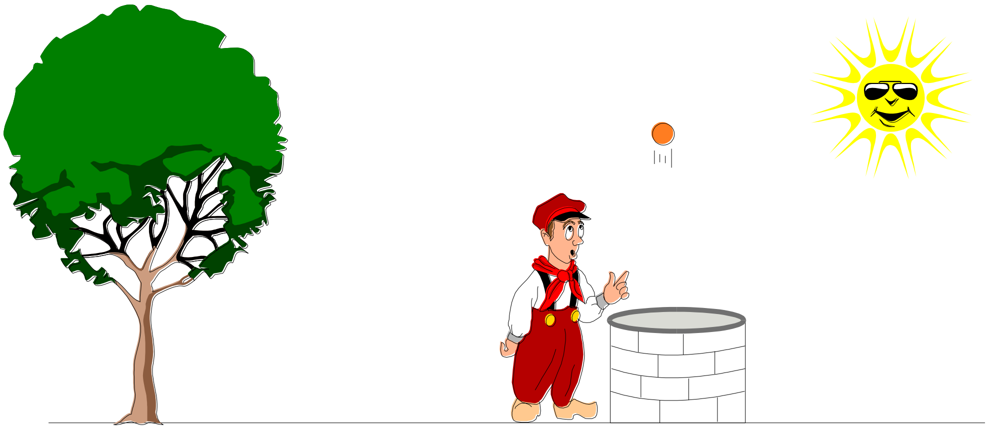
El resultado anterior se interpreta diciendo que, mientras se mantenga constante dicha frecuencia, cualquier punto del disco dará un cuarto de vuelta cada segundo.

c) Para calcular el ángulo girado en 6 segundos, utilizamos la expresión $\theta = \theta_0 + w\,(t-t_0)$ en la forma Δθ = w · Δt, en donde Δθ corresponde al ángulo girado en un intervalo de tiempo Δt. Así pues: $\Delta\theta = w \cdot \Delta t = \frac{\pi}{2} \cdot 6 = 3\pi$ rad

d) La distancia recorrida en los 6 segundos se puede obtener fácilmente utilizando la relación existente entre la longitud del arco de circunferencia y el ángulo correspondiente expresado en radianes: $\Delta e = \Delta\theta \cdot R$

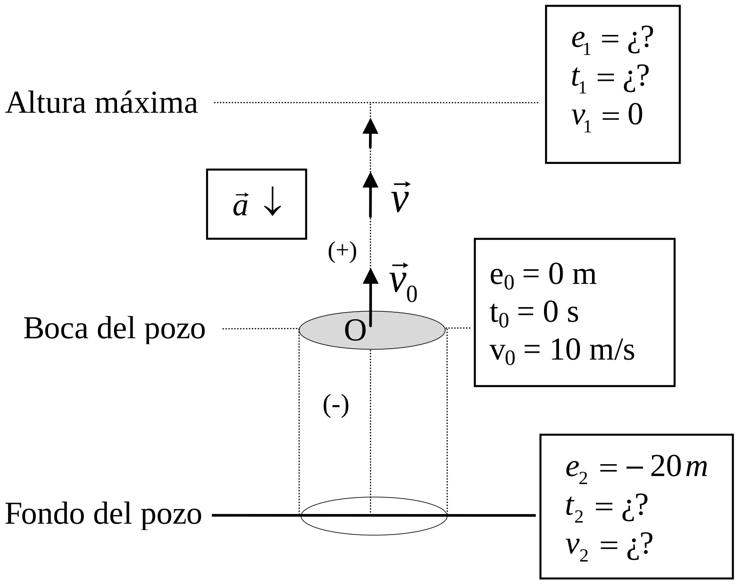
Para el punto A: $\Delta e_A = \Delta\theta \cdot R_A = 3\pi \cdot 1 = 3\pi$ m
Para el punto B: $\Delta e_B = \Delta\theta \cdot R_B = 3\pi \cdot 2 = 6\pi$ m

28. Desde la boca de un pozo de 20 m de profundidad, se lanza verticalmente y hacia arriba una piedra con rapidez de 10 m/s. Determinad con qué rapidez chocará contra el fondo del pozo.



La piedra comienza a subir con una rapidez de 10 m/s. Dicha rapidez, debido a la gravedad terrestre, irá disminuyendo hasta que alcanzada la máxima altura, la piedra se parará momentáneamente para comenzar a descender. Mientras baja, debido a la gravedad, se moverá cada vez más aprisa, hasta que impacte contra el fondo del pozo con la rapidez que lleve justo en ese instante. Para resolver el problema, vamos a despreciar el rozamiento del aire con la piedra, de esta forma el movimiento será uniformemente acelerado (desde que se lanza hasta el instante en que choca contra el fondo del pozo).

Como la trayectoria es conocida, podemos aplicar un tratamiento escalar. Para ello es imprescindible seleccionar (si no está preestablecido en el enunciado) un origen de espacios (O), el sentido que se toma como positivo y un origen de tiempos, indicándolos expresamente en un esquema lo más claro posible. Dicha selección es arbitraria, pero conviene procurar que resulte siempre lo más cómoda posible. Así, en este caso, podríamos hacer lo siguiente:



Como se puede ver en el esquema, se han seleccionado tres instantes del movimiento: el "t_0" o inicial (cuando se lanza desde la boca del pozo), el instante "t_1" (cuando alcanza su altura máxima) y el instante "t_2" o final (en el momento en que llega al fondo del pozo).

La aceleración tangencial se puede considerar durante todo el proceso como constante, vertical y dirigida hacia abajo y por tanto (de acuerdo con el criterio de signos escogido) su valor es el mismo y negativo, tanto en la subida como en la bajada . La designaremos como a_t = -g (aceleración de la gravedad). Se trata, pues, de un movimiento uniformemente acelerado.

Las ecuaciones correspondientes a un movimiento uniformemente acelerado son:

$v = v_0 + a_t\,(t-t_0)$ $\qquad$ $e = e_0 + v_0\,(t-t_0) + 1/2\, a_t\,(t-t_0)^2$

Si sustituimos en ellas los datos de este problema nos queda:

1ª) $v = v_0 - g\,t$ $\qquad$ 2ª) $e = v_0\,t - \dfrac{g}{2}\cdot t^2$

que serán las ecuaciones que representan el movimiento que lleva a cabo la piedra.

¿Cómo podemos hallar la rapidez v en el instante en que choca contra el fondo?

Para ello podríamos utilizar la ecuación $v = v_0 - g\,t$ que nos da la rapidez de la piedra en cualquier instante t, pero no es posible ya que, en principio, desconocemos en qué preciso instante t_2 se produce el choque contra el fondo del pozo. Para calcular el valor de t_2, podemos utilizar $e = v_0\,t - \dfrac{g}{2}\cdot t^2$ sustituyendo "e" por -20 m y "g" por 10 m/s^2 :

$e = v_0\,t - \dfrac{g}{2}\cdot t^2$ para t = t_2, queda como: $-20 = 10t_2 - 5t_2^2 \rightarrow t_2^2 - 2t_2 - 4 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, obtenemos que el instante en que la piedra choca contra el suelo del fondo del pozo es t_2= 3’24 s. Sustituyendo ahora este valor en la ecuación que nos proporciona la rapidez en cualquier instante, obtendremos la rapidez de la piedra justo cuando choca contra el fondo v_2 :

$v = v_0 - g\,t \rightarrow v_2 = v_0 - gt_2 \rightarrow v_2 = 10 - 10 \cdot 3'2 = -22'4$ m/s

Otra forma (más general) de resolver el problema, sin tener que recordar las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado, consiste en obtener las ecuaciones v = v(t) y e = e(t) a partir de la aceleración tangencial, integrando convenientemente:

$a_t = dv/dt = -10 \text{ m/s}^2 \rightarrow dv = -10 \cdot dt \rightarrow \int_{10}^{v} dv = \int_0^t -10\,dt \rightarrow v - 10 = -10t \rightarrow v = 10 - 10t$

$v = de/dt \rightarrow de = v \cdot dt \rightarrow \int_0^e de = \int_0^t (10 - 10t)\,dt \rightarrow e = 10t - 5t^2$

Una vez obtenidas las ecuaciones anteriores, se procedería siguiendo los mismos pasos que hemos realizado anteriormente.

¿A qué se debe el signo negativo del resultado?

Como hemos elegido (arbitrariamente), espacios crecientes hacia arriba, la rapidez (que mide lo aprisa que cambia e y se expresa como de/dt) será positiva siempre que el cuerpo suba (porque entonces la e va aumentando y toma valores cada vez mayores, con lo que al ser el valor posterior más alto que el anterior, el cambio o variación de e resultará positivo) y negativa cuando el cuerpo baje (porque entonces la e va disminuyendo tomando cada vez valores más pequeños, con lo que al ser el valor posterior menor que el anterior, el cambio o variación de e resultará negativo).

Como en el momento de chocar con el fondo del pozo, la piedra se está moviendo hacia espacios decrecientes (de acuerdo con el criterio de signos escogido), la rapidez será negativa. Conviene no confundirse y pensar, erróneamente, que es negativa por encontrarse en la parte negativa de la trayectoria, ya que si, manteniendo igual todo lo demás, hubiésemos lanzado la piedra desde el fondo del pozo, la rapidez mientras sube sería positiva, a pesar de encontrarse en espacios negativos, porque la posición "e" iría aumentando. Otra cuestión a tener en cuenta es que el signo negativo de un dato <u>solo hay que ponerlo una vez</u>, ya que es bastante común el error de ponerlo en un símbolo y luego volver a ponerlo en el valor numérico.

Para terminar el problema, comprobad que la altura máxima alcanzada por la piedra es de 5 m sobre la boca del pozo.

29. Suponiendo que la Tierra gire en torno a su eje con movimiento de rotación constante, se pide:

a) Rapidez lineal, rapidez angular y aceleración de un punto de latitud L.
b) Calcular los valores de las magnitudes anteriores en los polos y en el ecuador.

Debido al movimiento de rotación de la Tierra alrededor de su eje, todos los puntos de su superficie (excepto los dos que coinciden con el eje de rotación), giran con la misma rapidez angular (movimiento circular uniforme), describiendo circunferencias de distinto radio (máximo en los puntos del ecuador y disminuyendo hacia los polos).

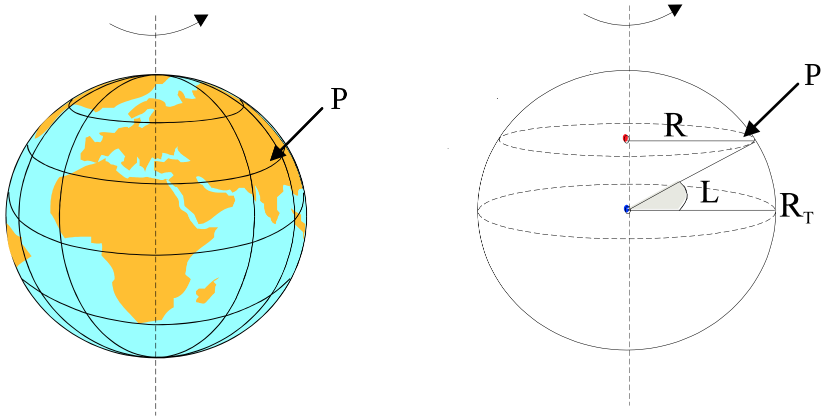
¿Cuánto vale dicha rapidez angular?

Como la Tierra da una vuelta completa cada 24 h, podemos aplicar la ecuación del movimiento circular uniforme expresada en la forma $\Delta\theta = w \cdot \Delta t$, despejar w y sustituir (poniendo previamente la vuelta en radianes y las 24 h en segundos):

$$\Delta\theta = w \cdot \Delta t \rightarrow w = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{86400} \text{ rad/s}$$

Así pues cualquier punto de la superficie terrestre gira con la rapidez angular anterior. Sin embargo, como sabemos, no podemos decir lo mismo respecto a la rapidez lineal.

¿Cómo podríamos hallar la rapidez lineal del punto P situado en un paralelo de latitud L, como el que se indica en la figura?



La rapidez lineal correspondiente a P, vendrá dada por $v = w \cdot R$, siendo R el radio de la circunferencia descrita por P alrededor del eje. *¿Cómo podemos expresar dicha rapidez en función de la latitud L?*

Se trata de relacionar el radio R con la latitud L. Analizando la figura podemos ver que $\cos L = R/R_T$, de manera que $R = R_T \cdot \cos L$. Sustituyendo esta última expresión en la de la rapidez lineal nos queda: $v = w \cdot R_T \cdot \cos L = \frac{2\pi}{86400} \cdot 6350 \cdot 10^3 \cdot \cos L \rightarrow$ **$v = 461'79 \cdot \cos L$**

¿Con qué aceleración se mueve el punto P?

Como el punto P describe un movimiento circular y uniforme, estará sometido exclusivamente a una aceleración normal, de modo que $\vec{a} = \vec{a}_n$. Como sabemos la aceleración normal se puede calcular como $a_n = v^2/R$.

$$a_n = v^2/R = w^2 \cdot R = w^2 \cdot R_T \cdot \cos L = \left(\frac{2\pi}{86400}\right)^2 \cdot 6350 \cdot 10^3 \cdot \cos L \rightarrow \mathbf{a_n = 0'03 \cdot \cos L}$$

¿Qué ocurriría con las magnitudes anteriores en los polos y en el ecuador?

Como es lógico, al coincidir los polos con puntos del eje, tanto su rapidez angular como la lineal deberán de ser nulas y lo mismo ocurrirá con la aceleración normal.

En cuanto al ecuador, cabe pensar que la rapidez lineal tome su valor máximo (en el mismo intervalo de tiempo se describe un arco mayor), y la aceleración normal alcance también su valor máximo (ya que allí el vector velocidad cambia más rápidamente de dirección).

Si los razonamientos cualitativos anteriores son correctos, los resultados que se obtengan al imponer la condición de que P esté situado en el polo o en el ecuador, a las expresiones generales que hemos deducido, tendrán que ser coherentes con los mismos:

En uno de los polos:

$v = 461'79 \cdot \cos L$, como en el polo $L = 90º$ queda que $v_P = 461'79 \cdot \cos 90º = 0$

$w_P = 0$, ya que ningún punto del eje gira alrededor del mismo.

$a_n = 0'03 \cdot \cos L$, como en el polo $L = 90º$ queda que $a_{np} = 0'03 \cdot \cos 90º = 0$

En el ecuador:

$v = 461'79 \cdot \cos L$. En el ecuador $L = 0º \rightarrow v_e = 461'79 \cdot \cos 0º = 461'79$ m/s

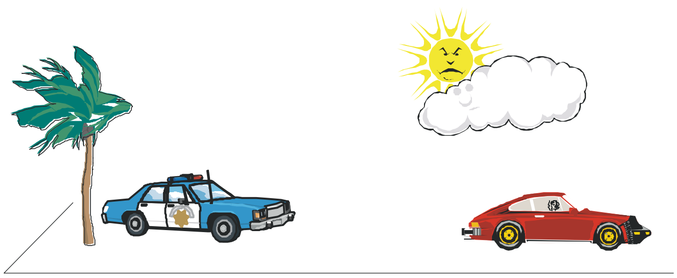
Según el resultado anterior, todos los puntos del ecuador giran a algo más de 1600 km/h alrededor del eje terrestre.

$w = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{2\pi}{86400}$ rad/s (constante, excepto en los mismos polos donde es nula).

$a_n = 0'03 \cdot \cos L = 0'03 \cdot \cos 0º = 0'03$ m/s^2

30. Un coche de policía pretende alcanzar a otro vehículo que circula con rapidez de 108 km/h. El vehículo policial arranca desde el reposo con aceleración de 2 m/s^2 hasta que su rapidez es de 180 km/h y luego prosigue con movimiento uniforme hasta dar alcance al otro vehículo. Calculad:

a) Dónde lo alcanza si se puso en marcha 2 s después de ser rebasado.
b) Representad en un mismo diagrama e-t ambos movimientos.



Se trata de un problema de dos móviles, el coche de la policía (que llamaremos A) y otro coche (que llamaremos B). Tomaremos como origen de espacios el punto donde se encontraba A en reposo y como origen de tiempos el instante en que B pasa por su lado. El móvil B se desplaza con movimiento uniforme, el A lo hace primero con movimiento uniformemente acelerado y cuando alcanza una rapidez de 180 km/h sigue con movimiento uniforme. Los datos de partida serán:

Para el móvil A

Primer tramo (movimiento uniformemente acelerado): $a_t = 2$ m/s^2; $t_0 = 2$ s; $v_0 = 0$; $e_0 = 0$.

$v_A = a_t \cdot (t-t_0) = 2\ (t-2)$
$e_A = 1/2\ a_t\ (t-t_0)^2 = (t-2)^2$

Segundo tramo (movimiento uniforme): v = 180 km/h = 50 m/s.

Para el móvil B

Movimiento uniforme: $a_t = 0$; $t_0 = 0$; $e_0 = 0$; v = 108 km/h = 30 m/s.

$v_B = 30$m/s = constante
$e_B = v_B \cdot t = 30\ t$

Dado que el móvil A acelera hasta alcanzar una rapidez de 50 m/s y luego la mantiene constante, es seguro que alcanzará al móvil B, que se desplaza con una rapidez constante de 30 m/s. *Lo que conviene saber, en primer lugar, es si dicho alcance se producirá antes o después de que A cambie de movimiento.*

Una forma de averiguarlo sería calculando en qué instante A alcanzaría a B, suponiendo que A no cambiase nunca de movimiento. Después habría que comparar el valor de t obtenido, con el tiempo que tarda A en alcanzar la rapidez límite de 50 m/s. Si el primer valor fuese menor que el segundo, supondría que A sobrepasa a B antes de dejar de acelerar y cambiar a movimiento uniforme.

¿Cómo podemos determinar dicho instante?

En el momento en que se produjese el encuentro, la posición de ambos móviles respecto del O sería la misma y por tanto: $e_A = e_B \rightarrow (t-2)^2 = 30\ t \rightarrow t^2 - 34t + 4 = 0$

Resolviendo la ecuación anterior se obtienen dos valores de t. De ellos solo uno tiene sentido físico según las condiciones del problema y vale 33'88 s, pero en ese instante la rapidez que llevaría A sería: $v_A = 2\ (t-2) = 2\ (33'88 - 2) = 63'76$ m/s, que supera los 50 m/s, por lo que hemos de concluir que el alcance se producirá después de que el coche de policía A haya cambiado su movimiento de uniformemente acelerado a uniforme. *¿En qué instante y dónde ocurre esto?*

Haciendo v = 50 m/s en la ecuación $v_A = 2\ (t-2)$ nos queda $50 = 2t - 4$ y despejando t obtenemos t = 27 s. Su posición en ese instante será $e = (t-2)^2 = (27-2)^2 = 625$ m.

De acuerdo con lo anterior, las características del segundo tramo (movimiento uniforme) para el coche A, son: $a_t = 0$; $e_0 = 625$ m; $t_0 = 27$ s; v = 50 m/s, y su ecuación de movimiento vendrá dada por e = 625 + 50 (t - 27).

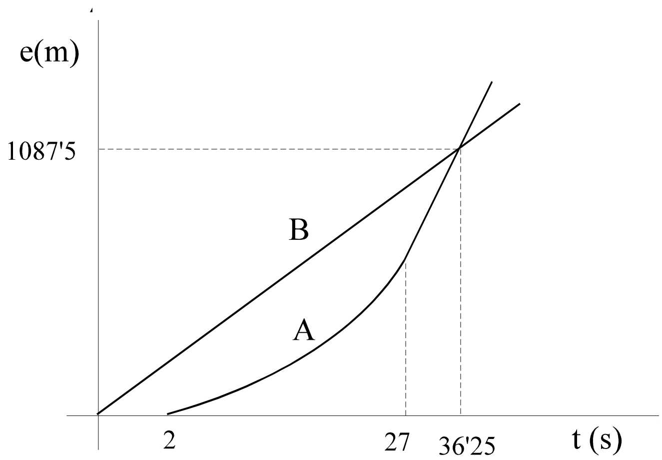
Para hallar la posición en que B será alcanzado, necesitamos hallar primero en qué instante se produce dicho alcance. Para ello, como sabemos, basta igualar las posiciones:

$$e_A = e_B \rightarrow 625 + 50\,(t-27) = 30\,t \rightarrow t = 36'25 \text{ s}$$

Ahora basta sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones que dan la posición, para obtener a qué distancia del origen de espacios A da alcance a B:

$e_B = 30\,t = 30 \cdot 36'25 = 1087'5$ m

Podemos ahora, construir la tabla de valores de "e" frente a "t", para cada uno de los móviles y representar en una misma gráfica.



31. La rapidez angular de una rueda disminuye uniformemente desde 1000 r.p.m. hasta 500 r.p.m. en 10 s. Determinad:

a) Número de vueltas efectuadas en esos 10 s.
b) Distancia recorrida en los 10 s por un punto "A", situado a 50 cm del eje de giro.
c) Tiempo necesario para detenerse.

El que la rapidez angular de la rueda disminuya uniformemente significa que la aceleración angular es constante. En ese caso el movimiento de cualquier punto de la misma, es uniformemente acelerado y, como sabemos, las ecuaciones que rigen este tipo de movimiento son:

α = constante

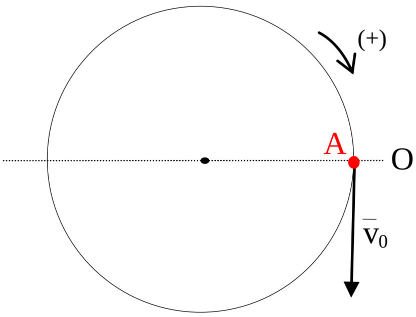
$w = w_0 + \alpha\,(t-t_0)$

$$\theta = \theta_0 + w(t-t_0) + \frac{1}{2}\alpha\,(t-t_0)^2$$

En el momento en que la rueda empieza a frenar comenzaremos a contar el tiempo ($t_0 = 0$) y consideraremos la posición de la rueda en ese instante como origen de ángulos (θ_0), y sentido positivo el de giro, de manera que:

α = constante; $t_0 = 0$; w_0 = 1000 rev/min = 104'7 rad/s; $\theta_0 = 0$.

Introduciendo estos datos en las ecuaciones generales anteriores nos queda que:



$$\theta = w_0\ t + \frac{1}{2}\alpha\ t^2$$

$$w = w_0 + \alpha\ t$$

¿Cómo podemos calcular el número de vueltas N_1 que da la rueda durante los 10 primeros segundos desde que comienza a frenar?

Mediante la ecuación $\theta = w_0\, t + \frac{1}{2}\alpha\ t^2$ podemos hallar el ángulo descrito (en radianes) por cualquier punto de la rueda en esos 10 segundos (θ_1). Luego, como cada vuelta equivale a 2π radianes, bastará que dividamos por 2π para tener el número de vueltas que nos piden.

$$N_1 = \theta_1 / 2\pi = \frac{w_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2}\alpha\ t_1^2}{2\pi}$$

El problema es calcular el valor de θ_1 en el instante t_1 = 10 s, ya que, en principio, *no conocemos cuánto vale la aceleración angular α.* Sin embargo, sí que sabemos que en el instante t_1 la rapidez angular es de w_1 = 500 r.p.m = 500 (2π/60) = 52'35 rad/s .

Con estos datos podemos hallar α. Sustituyendo el valor de t_1 en la ecuación de w:

$$w_1 = w_0 + \alpha\ t_1 \rightarrow \alpha = \frac{w_1 - w_0}{t_1} = (104'7 - 52'35)/10 = -5'24 \text{ rad/s}^2$$

El signo negativo de la aceleración se debe a que, de acuerdo con el criterio de signos escogido, como la rueda frena, la rapidez angular (positiva) va decreciendo. Sustituyendo ahora este dato en la expresión anterior, podemos calcular N_1:

$$N_1 = \theta_1 / 2\pi = \frac{w_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2}\alpha\ t_1^2}{2\pi} = \frac{104'7 \cdot 10 - 2'62 \cdot 100}{2\pi} = \frac{785}{2\pi} = 124'9 \text{ vueltas.}$$

Para calcular la distancia recorrida en ese mismo tiempo por un punto A situado a 50 cm del eje, hemos de tener en cuenta la relación $\Delta e = \Delta\theta \cdot R$. De manera que:

$\Delta e_1 = \Delta\theta_1 \cdot R = \theta_1 \cdot R = 785 \cdot 0'5 = 392'5$ m.

¿Qué podemos hacer finalmente, para calcular el tiempo total que la rueda tarda en detenerse desde que comenzó a frenar?

En el instante en que la rueda se detenga, la rapidez angular alcanzará el valor 0. Introduciendo esta condición en la ecuación general $w = w_0 + \alpha\, t$ y despejando t, podemos obtener el tiempo que tarda en detenerse:

$0 = w_0 + \alpha\, t \rightarrow t = -w_0/\alpha = -104'7/-5'24 = 20$ s

32. Un móvil describe un movimiento circular de 50 m de radio con una a_t de 2 m/s^2. Sabiendo que cuando el cronómetro indica 4 s el móvil se encuentra en un ángulo de 3 rad moviéndose con una rapidez de 6 m/s. Determinad:

a) Posición y rapidez en el instante inicial.
b) Aceleración total a los 3 s.

Se trata de un movimiento circular uniformemente acelerado del que conocemos que a_t = 2 m/s^2; t_0 = 4 s; v_0 = 6 m/s y θ_0 = 3 rad. Como vemos algunos datos son de magnitudes angulares y otros de magnitudes lineales. Para resolver el problema conviene decidir con cuáles de ellas vamos a trabajar. Si nos inclinamos por utilizar magnitudes lineales, tendremos:

$a_t = 2$m/s^2; $t_0 = 4$ s; $v_0 = 6$m/s; $e_0 = \theta_0 \cdot R = 3 \cdot 50 = 150$ m y las ecuaciones serán:

$v = v_0 + a\,(t - t_0) \rightarrow \mathbf{v = 6 + 2\,(t - 4)}$

$$e = e_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a\,(t - t_0)^2 \rightarrow \mathbf{e = 150 + 6\,(t - 4) + (t - 4)^2}$$

Con estas ecuaciones podemos responder a cada una de las preguntas planteadas:

¿Cuáles serán la posición y la rapidez en el instante inicial?

Bastará con sustituir t por 0 en las ecuaciones e = e (t) y v = v (t) anteriores:

$v = 6 + 2\,(t - 4) = 6 + 2\,(0 - 4) = -2$ m/s
$e = 150 + 6\,(t - 4) + (t - 4)^2 = 150 + 6\,(0 - 4) + (0 - 4)^2 = 142$ m

¿Cuál será el vector aceleración a los 3 s?

Como sabemos, el vector aceleración $\vec{a}$ se puede calcular derivando el vector velocidad $\vec{v}$. Sin embargo en este caso eso no es posible dado que no conocemos $\vec{v}$. Otra opción es obtener $\vec{a}$ en componentes intrínsecas como: $\vec{a} = a_t \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n}$ en donde $\vec{\tau}$ es un vector unitario tangente a la trayectoria y cuyo sentido coincide siempre con el tomado como positivo (espacios crecientes), mientras que $\vec{n}$ es un vector unitario perpendicular a la trayectoria y dirigido en todo momento hacia el centro de curvatura. En la expresión anterior a_t se obtiene derivando la rapidez v respecto del tiempo y a_n como v^2/R. (R es el radio de curvatura en cada instante). Así pues, podemos *tratar de expresar el vector $\vec{a}$ en función de a_t y a_n :*

En este caso, a_t es constante y vale 2 m/s^2 mientras que a_n no lo es, pero podemos calcular su valor en cada instante mediante $a_n = v^2 / R$.

Como nos piden el vector $\vec{a}$ en el instante t = 3 s, tenemos que hallar el valor de la rapidez v en dicho instante. Para ello utilizamos de nuevo la expresión v = 6 + 2 (t - 4) sustituyendo t por 3, con lo que obtenemos v = 6 + 2 (3 - 4) = 4 m/s. Sustituyendo ahora este valor en la expresión de a_n nos queda que en el instante 3 s, $a_n = v^2 / R = 16 / 50 = 0'32$ m/s^2. Introduciendo los resultados anteriores en $\vec{a} = a_t \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n}$ obtenemos que el vector aceleración en el instante t = 3 s vendrá dado por: $\vec{a} = 2\vec{\tau} + 0'32\,\vec{n}$ m/s^2.

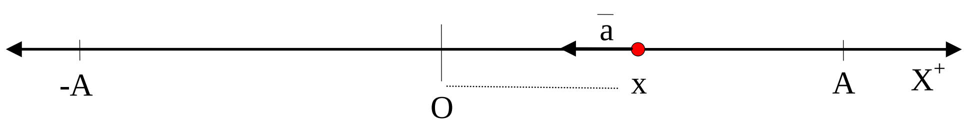
33. Un móvil A describe una trayectoria circular de radio 50 metros con rapidez angular de 0’3 rad/s. A los 5 s de partir A, sale en su persecución otro móvil B, desde el reposo y con aceleración de 0’1 rad/s^2. Determinad:

a) Posición e instante en que B alcanzará a A.
b) Rapidez angular y lineal de B en el momento de alcanzar a A.
c) Aceleración tangencial, aceleración normal y módulo del vector aceleración de B en el momento del encuentro.

sol: a) 4’26 rad y 14'24 s; b) 0’92 rad/s; 46 m/s; c) 5 m/s^2; 42’3 m/s^2; 42’6 m/s^2

34. Un objeto posee un movimiento armónico simple de amplitud 1 m y periodo 2 s. Determinad: a) Ecuación del movimiento. b) Posición en los instantes 1/2, 1, 3/2 y 2 (todos ellos en s). c) Gráficas x (t), v (t) y a (t)

Podemos representar esquemáticamente el movimiento armónico simple de una partícula como un movimiento de trayectoria rectilínea en el que dicha partícula vibra respecto a un punto medio O de equilibrio, como se indica en la figura, moviéndose entre dos posiciones extremas A y -A, de forma que la aceleración tangencial a que está sometida en cada instante es proporcional a la elongación x (posición respecto al punto O) en ese mismo instante, es decir: a = -Cx, donde C es la constante de proporcionalidad llamada constante armónica.



Si tomamos el origen de tiempos cuando la partícula se encuentra en el punto O desplazándose hacia X^+, las ecuaciones que describen su movimiento son:

$x = A \text{ sen } wt$, que nos da la posición en cualquier instante.
$v = Aw \cos wt$, que nos da la rapidez en cualquier instante.
$a = -Aw^2 \text{ sen } wt = -Cx$, nos da la aceleración en cualquier instante o posición ($C = w^2$).

Donde w es una constante característica de cada movimiento y viene dada por:
$w = 2\pi/T = 2\pi \cdot \nu$, siendo T el periodo y ν la frecuencia del movimiento.

Partiendo de las ecuaciones anteriores y sustituyendo los datos que nos dan en el enunciado, obtendremos las ecuaciones que describen el movimiento del cuerpo al que se refiere el problema:

$x = A \text{ sen } wt = \text{sen } \pi t$
$v = Aw \cos wt = \pi \cos \pi t$
$a = -Aw^2 \text{ sen } wt = -\pi^2 \text{ sen } \pi t$

Ahora, simplemente manejando estas últimas ecuaciones es posible contestar a todas las preguntas que se hacen en el enunciado del problema:

a) La ecuación del movimiento, es la ecuación que nos da la posición del móvil en cualquier instante $x = \text{sen } \pi t$ m (si t en s).

b) *¿Cómo hallar la posición del móvil en los instantes que se piden?*

Bastará sustituir en la ecuación del movimiento la t por cada uno de los valores correspondientes, con lo que tendremos:

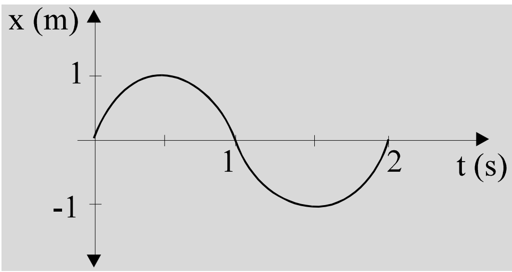
Para $t = 1/2$ s $\rightarrow x = \text{sen } \pi/2 = 1$ m y $v = 0$ (la partícula se encuentra en $x = A$)
Para $t = 1$ s $\rightarrow x = \text{sen } \pi = 0$ m y $v = -\pi$ m/s (se encuentra en el origen O, moviéndose hacia X^-)
Para $t = 3/2$ s $\rightarrow x = \text{sen } 3\pi/2 = -1$ m y $v = 0$ (la partícula se encuentra en $x = -A$).
Para $t = 2$ s $\rightarrow x = \text{sen } 2\pi = 0$ y $v = \pi$ m/s (se encuentra en el origen O, moviéndose hacia X^+)

De los resultados anteriores es fácil comprobar que, como cabe esperar, cada periodo de tiempo T, la posición de la partícula se repite. En el siguiente apartado lo veremos mediante una gráfica y analizaremos también que les ocurre al resto de las magnitudes.

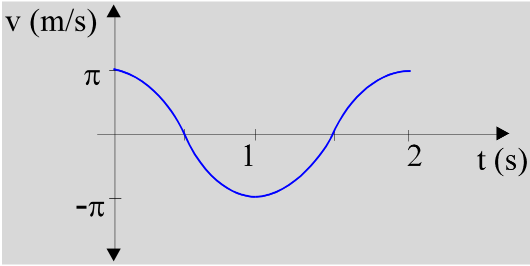
c) *Construcción de las gráficas de x = x (t), v = v (t) y a = a (t).*

Para construir dichas gráficas hemos de elaborar primero las tablas correspondientes mediante las ecuaciones x = x (t), v = v (t), a = a (t) y luego representar:

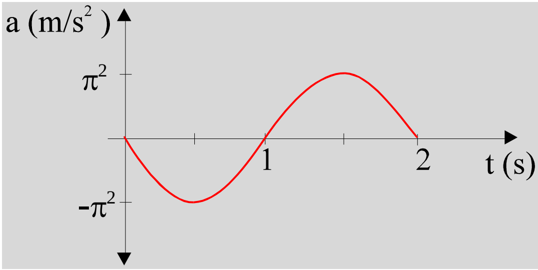
t (s)	0	0'5	1	1'5	2
x (m)	0	1	0	-1	0



t (s)	0	0'5	1	1'5	2
v (m/s)	π	0	$-\pi$	0	π



t (s)	0	0'5	1	1'5	2
a (m/s^2)	0	$-\pi^2$	0	π^2	0



¿Qué conclusiones se pueden extraer de las gráficas anteriores?

Podemos ver reflejadas en ellas las principales características de un movimiento armónico simple. Así, por ejemplo, en el instante en que x vale 0 (punto de equilibrio), la velocidad es máxima y la aceleración (y por tanto la fuerza) es nula. Sin embargo, cuando la x alcanza el valor máximo A, la velocidad es nula y la aceleración (y por tanto la fuerza) son máximas (en valor absoluto). Este tipo de movimiento constituye un claro ejemplo de cómo un objeto puede moverse con su máxima velocidad y ser nula la fuerza resultante sobre el mismo (o estar momentáneamente en reposo y la fuerza tomar su valor máximo).

35. Determinad el periodo de una partícula vibrante que posee una aceleración de $-2 m/s^2$ cuando se encuentra a 50 cm de su posición de equilibrio.

sol: $T = \pi$ s

36. Un móvil de 4 kg de masa que realiza un movimiento armónico simple, lleva una rapidez de 80 m/s en el punto medio de su trayectoria y de 50 m/s cuando su elongación x es de 2m. Calculad la ecuación de su movimiento x = x (t).

La ecuación del movimiento viene dada por x = A sen(wt), donde A es la amplitud y w la frecuencia angular ($w = 2\pi/T$). *Así pues para obtener x necesitamos saber A y w.*

Como, tanto A como w son constantes características de cada movimiento, podemos tratar de hallarlas sustituyendo los datos particulares del enunciado en las ecuaciones generales x = x (t), v = v (t) y a = a (t).

Para el instante t_1 (cuando el móvil se encuentra en el punto medio de la trayectoria):
$x_1 = A \text{ sen } wt_1 \rightarrow 0 = A \text{ sen } wt_1 \rightarrow \text{sen } wt_1 = 0$
$v_1 = Aw \cos wt_1 \rightarrow 80 = Aw \cos wt_1 \rightarrow \cos wt_1 = 80/Aw$

Para el instante t_2 (cuando el móvil se encuentra en x = 2 m):

$x_2 = A \text{ sen } wt_2 \rightarrow 2 = A \text{ sen} wt_2 \rightarrow \text{sen } wt_2 = 2/A$
$v_2 = Aw \cos wt_2 \rightarrow 50 = Aw \text{ sen } wt_2 \rightarrow \cos wt_2 = 50/Aw$

Si tenemos en cuenta que $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, podemos establecer las siguientes ecuaciones:

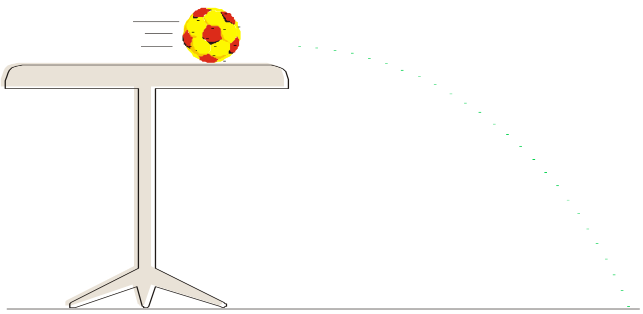
$0^2 + (80/Aw)^2 = 1$

$(2/A)^2 + (50/Aw)^2 = 1$

De la primera de las ecuaciones anteriores obtenemos que Aw = 80. Sustituyendo este valor en la segunda de ellas, obtenemos que A = 2'56 m, con lo que si Aw = 80 y A = 2'56, nos queda que w = 80/2'56 = 31'25 rad/s.

Así pues, la ecuación de movimiento pedida es: x = 2'56 sen (31'25 · t)

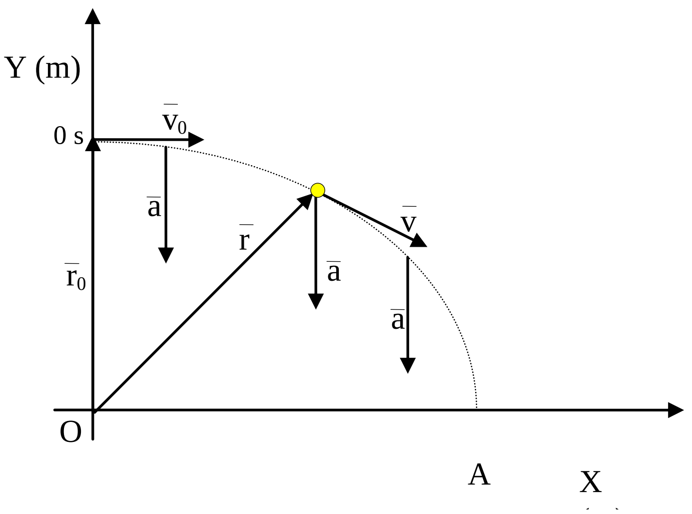
37. Una pelota rueda sobre una mesa horizontal a 1'5 m de altura del suelo, cayendo por el borde de la misma. Si choca con el suelo a una distancia de 1'8 m, medidos horizontalmente desde el borde de la mesa. ¿Cuál es la rapidez con la que salió de la mesa?



Dado que la trayectoria es, en principio, desconocida, será necesario un tratamiento vectorial para resolver el problema, utilizando los vectores $\vec{a}$, $\vec{v}$ y $\vec{r}$.

De igual manera que en los problemas que admitían un tratamiento escalar, tendremos que establecer ahora un sistema referencial en el que queden definidas las distintas magnitudes. En este caso, podemos tomar unos ejes de coordenadas cartesianas cuyo origen coincida con la base de la mesa y el suelo con el eje OX, tal y como se aprecia en el esquema siguiente, en donde hemos dibujado mediante una línea de puntos la trayectoria que "intuimos" seguirá la pelota una vez que abandone la mesa. El origen de tiempos lo situaremos en el instante en que la pelota deja de tener contacto con la mesa y se ve sometida a la aceleración de la gravedad.

Como datos tenemos pues: $\vec{a} = (0, -g)$, $t_0 = 0$; $\vec{v}_0 = (v_0, 0)$; $\vec{r}_0 = (0, h)$; y $\vec{r}_1 = (A, 0)$, siendo h la altura de la mesa y A el alcance horizontal, en donde ya hemos tenido en cuenta los signos correspondientes de cada uno de dichos datos.



¿Cómo podemos hallar la velocidad inicial con que salió la pelota?

Para conseguirlo, podemos comenzar por determinar las ecuaciones $\vec{v}$ = v (t) y $\vec{r}$ = r (t). Después podemos tratar de introducir en dichas ecuaciones los datos que conocemos para obtener así la velocidad inicial.

A partir de $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ obtenemos que $\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a} \cdot dt \rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = \int_0^t (0, -g) \cdot dt$

y resolviendo la integral nos queda que $\vec{v} = (v_0, 0) + (0, -gt) = (v_0, -gt)$

A partir de $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, obtenemos que $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v} \cdot dt \rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \int_0^t (v_0, -gt) \cdot dt$

y resolviendo la integral nos queda que $\vec{r} = (0, h) + (v_0 \cdot t,\ -\dfrac{1}{2} gt^2) = (v_0 \cdot t,\ h - \dfrac{1}{2} gt^2)$

Analizando la expresión obtenida para $\vec{r}$ = r(t), nos damos cuenta que las coordenadas de cualquier punto de la trayectoria seguida por la pelota, según el sistema de referencia que hemos escogido, vienen dadas en cualquier instante del movimiento por:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 \cdot t \\ y &= h - \frac{1}{2} gt^2 \end{aligned}\right\}$$

Podemos ahora particularizar x e y para el instante t_1 en que la pelota choca contra el suelo y despejar v_0 . En efecto:

A = $v_0 \cdot t_1 \rightarrow v_0 = A/t_1$ y aunque no sabemos t_1, podemos hallarlo haciendo y = 0 en la expresión y = h - ½ gt^2 de forma que 0 = h - $\dfrac{1}{2} gt_1^2 \rightarrow t_1 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ (el mismo tiempo que si la pelota hubiese caído verticalmente al suelo).

Sustituyendo ahora t_1 en la expresión anterior $v_0 = A/t_1$, podemos determinar v_0 :

$$\boxed{v_0 = \frac{A}{\sqrt{\dfrac{2h}{g}}}}$$

¿Cómo podemos analizar el resultado anterior?

En primer lugar, es posible darse cuenta de que lo que hay a la izquierda del signo igual, tiene las mismas dimensiones que lo que hay a la derecha (L/T en ambos casos). Ello no es una garantía de que el resultado sea correcto pero si la ecuación no resultara dimensionalmente homogénea, sí que podríamos tener la seguridad de haber cometido algún error y deberíamos de revisar el problema.

En segundo lugar, vemos que el resultado contempla adecuadamente ciertas condiciones límite evidentes, como por ejemplo:

Si el alcance A es nulo, v_0 ha de ser nula

Por otra parte, cuanto mayor sea el alcance conseguido (manteniendo constantes los valores de las restantes magnitudes) mayor habrá sido la velocidad inicial con que se lanzó. Cuanto mayor sea la altura h desde la que se hace el lanzamiento para conseguir un cierto alcance, con menor velocidad inicial habrá que hacer el lanzamiento, etc.

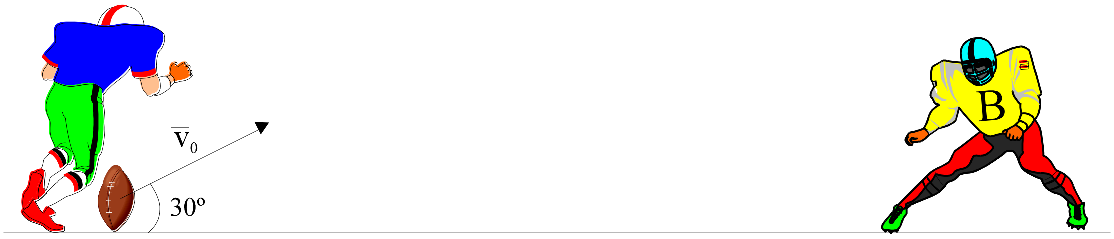
Ahora podemos sustituir los datos de que disponemos y calcular el valor de v_0 según:

$$v_0 = \frac{A}{\sqrt{\dfrac{2h}{g}}} = \frac{1'8}{\sqrt{\dfrac{2 \cdot 1'5}{10}}} = 3'27 \text{ m/s}$$

El resultado, podemos expresarlo también en forma vectorial como $\vec{v}_0 = (3'27,\ 0)$ m/s. Es preciso tener en cuenta que al sustituir el valor de g, hemos puesto 10 y no -10 porque el signo negativo que le correspondía a esta componente escalar del vector aceleración (según el sistema de referencia escogido) ya lo hemos tenido en cuenta al principio poniendo -g en la expresión de dicho vector aceleración $\vec{a} = (0, -g)$ m/s^2.

Otra cuestión que podemos plantearnos a raíz de este problema es *si se trata o no de un movimiento uniformemente acelerado*. Un análisis superficial de la situación podría llevar a pensar que puesto que la aceleración es constante sí lo es. Sin embargo, si obtenemos la expresión de a_t nos podemos dar cuenta de que no es constante y que, por tanto, no se trata de un movimiento uniformemente acelerado y el módulo de la velocidad (o la rapidez) varía de forma **no** lineal con el tiempo. El hecho de que, en este caso, la aceleración “total” sea constante sin que lo sea la aceleración tangencial, se debe a que la aceleración normal cambia de tal modo que la suma $\vec{a}_t + \vec{a}_n = \vec{a}$ sí que lo es.

38. Un jugador de rugby patea el balón y éste sale con rapidez de 18 m/s formando un ángulo de 30 ° con la horizontal. Otro jugador que se encuentra a 40 m de distancia en la dirección del balón, corre en ese mismo instante a por él. ¿Cuál debe ser su rapidez, supuesta constante, para cogerlo justo antes de que llegue al suelo?

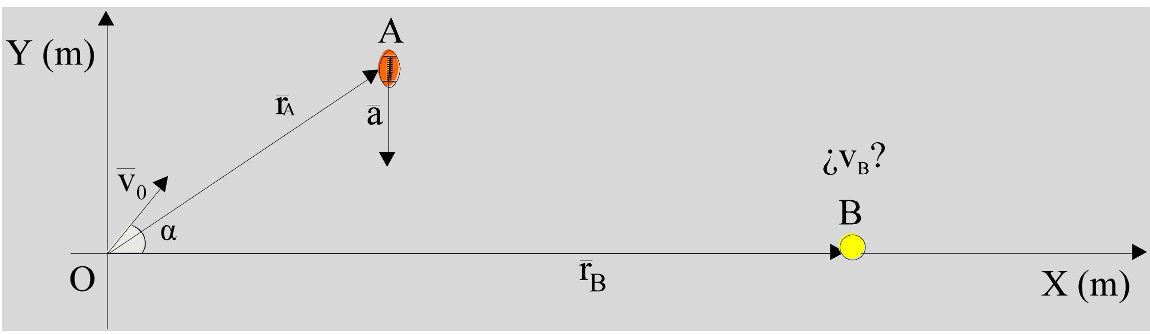


Se trata de un problema que plantea una situación relacionada también con otros deportes en los que se utiliza un balón o una pelota a la que se le puede lanzar oblicuamente, como, por ejemplo ocurre en el fútbol, golf, etc. Otro interés es el lanzamiento de proyectiles (en cuyo caso no es deporte, desgraciadamente, lo que se practica). El estudio (por unas u otras razones), del tiro oblicuo y del horizontal tuvo un papel histórico importante en el desarrollo de la mecánica.

En el caso concreto que se nos plantea, el móvil A, describe una trayectoria que, en principio es desconocida (aunque nuestras experiencias cotidianas nos hagan pensar que tendrá una forma parabólica, no sabemos cuál será concretamente). Durante su movimiento se ve sometido a la aceleración de la gravedad. B tiene un movimiento rectilíneo y uniforme sobre el eje x, con el fin de coger el balón en el momento que llegue al suelo.

Para resolver el problema, conviene que utilicemos un sistema de referencia espacio-temporal común para los dos móviles, lo que nos lleva a aplicar un tratamiento vectorial para describir el movimiento de ambos.

Tomaremos como sistema de referencia espacial unos ejes de coordenadas cartesianas cuyo origen coincida con el punto desde donde se lanza el balón, tal y como se indica en el esquema siguiente y como origen de tiempos el instante en que sale el balón. Haremos la aproximación de considerar a A y B como masas puntuales y la fricción con el aire nula.



Los datos para cada uno de los móviles son:

Móvil A (balón): $\vec{a}_{\mathrm{A}} = (0, -g)$ m/s^2 ; t_0 =0; $\vec{v}_{0\mathrm{A}} = (v_{0\mathrm{A}} \cos\alpha,\ v_{0\mathrm{A}} \operatorname{sen}\alpha)$ m/s $\vec{r}_{0\mathrm{A}} = (0,\ 0)$ m.

Móvil B (contrario): $\vec{a}_{\mathrm{B}} = (0, 0)$; t_0 =0; $\vec{v}_{\mathrm{B}} = (v_{\mathrm{B}}, 0)$ m/s; $\vec{r}_{0\mathrm{B}} = (x_{0\mathrm{B}}, 0)$ = (40, 0) m. Donde v_B es la incógnita a determinar.

Cabe esperar que, en las condiciones que se han considerado, la rapidez v_B dependa de alguna manera de la rapidez inicial v_{OA} con que se lanza el balón, del ángulo α con que se lance, de la distancia inicial x_{OB} existente entre ambos jugadores, y la aceleración de la gravedad g. Es decir: $v_B = v_B\,(v_{OA}, \alpha, x_{OB}, g)$.

De acuerdo con la situación planteada, no estamos seguros de qué haría el jugador B, podría ser que tuviera que correr hacia la derecha, quedarse en donde está o correr hacia la izquierda, dependiendo del alcance máximo del balón. Así, por ejemplo, si B se moviera hacia la derecha, podemos pensar que, a igualdad de los restantes factores, v_B será tanto mayor cuanto mayor sea v_{0A} y menor x_{0B}. Además, debería tomar un valor máximo para α = 45º ya que para este valor el alcance es máximo, por lo que debería correr más rápido para alcanzar a recoger el balón antes de que éste llegase al suelo.

Con los datos anteriores podemos determinar las ecuaciones $\vec{v} = \vec{v}\,(t)$ y $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ para cada móvil, integrando a partir de la aceleración. Mediante dichas ecuaciones podremos conocer la velocidad o la posición de cada uno de ellos en cualquier instante. Posteriormente, podríamos resolver el problema considerando que en el momento en que B recoja el balón, la posición de ambos móviles (que consideramos como masas puntuales) habrá de ser la misma.

Ecuaciones de movimiento para el móvil A:

A partir del vector aceleración :

$\vec{a}_{\mathrm{A}} = \dfrac{d\vec{v}_{\mathrm{A}}}{dt} \to d\vec{v}_{\mathrm{A}} = \vec{a}_{\mathrm{A}} \cdot dt \to \int_{\vec{v}_{0\mathrm{A}}}^{\vec{v}_{\mathrm{A}}} d\vec{v}_{\mathrm{A}} = \int_0^t (0, -g)\, dt$. Resolviendo estas integrales:

$$\vec{v}_{\mathrm{A}} = (v_{0\mathrm{A}} \cos\alpha,\ v_{0\mathrm{A}} \operatorname{sen}\alpha) + (0,\ -g\,t) \to \vec{v}_{\mathrm{A}} = (v_{0\mathrm{A}} \cos\alpha,\ v_{0\mathrm{A}} \operatorname{sen}\alpha\ -\ gt)$$

A partir del vector velocidad:

$$\vec{v}_{\mathrm{A}} = \frac{d\vec{r}_{\mathrm{A}}}{dt} \to d\vec{r}_{\mathrm{A}} = \vec{v}_{\mathrm{A}} \cdot dt \to \int_0^{\vec{r}_{\mathrm{A}}} d\vec{r}_{\mathrm{A}} = \int_0^t \vec{v}_{\mathrm{A}} \cdot dt$$

$$\vec{r}_{\mathrm{A}} = \int_0^t (v_{0\mathrm{A}} \cos\alpha,\ v_{0\mathrm{A}} \operatorname{sen}\alpha - g\,t)\, dt \to \vec{r}_{\mathrm{A}} = (v_{0\mathrm{A}} \cos\alpha \cdot t,\ v_{0\mathrm{A}} \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2)$$

Ecuaciones de movimiento para el móvil B:

Dado que se mueve con movimiento uniforme sobre el eje X tendremos que:

$\vec{v}_\text{B} = (v_\text{B}, 0)$ m/s y el vector de posición: $\vec{r}_\text{B} = (x_{0\text{B}} + v_\text{B}\, t,\;\; 0)$ m

En las ecuaciones anteriores v_B es la incógnita y por eso no le hemos puesto signo. Además, no sabemos "a priori" en qué sentido se ha de mover B para recoger la pelota.

¿Qué podemos hacer ahora para calcular con qué rapidez v_B se debería de mover B para coger el balón justo cuando llegue al suelo?

En el momento en que A y B se encuentren, los vectores de posición de ambos móviles serán los mismos (tengamos en cuenta que hemos escogido un único sistema de referencia posición-tiempo). Si designamos como t_1 a ese instante, e igualamos las coordenadas correspondientes, podremos obtener v_B:

En el momento del encuentro: $x_A = x_B \rightarrow v_{0A} \cos\alpha \cdot t_1 = x_{0B} + v_B \cdot t_1$ Despejando v_B obtenemos que: $v_\text{B} = \dfrac{v_{0\text{A}} \cos\alpha \cdot t_1 - x_{0\text{B}}}{t_1}$, con lo que para determinar v_B *necesitamos saber t_1 o instante en que el balón llega al suelo.*

Como en el instante en que el balón toca el suelo, su ordenada "y" vale 0, podemos igualar a 0 la expresión general de dicha ordenada y despejar t_1, con lo que:

$v_{0\text{A}} \operatorname{sen}\alpha \cdot t_1 - \dfrac{1}{2} g t_1^2 = 0$ de donde obtenemos que $t_1 = \dfrac{2 v_{0\text{A}} \operatorname{sen}\alpha}{g}$ y sustituyendo este valor en la expresión de v_B anterior nos queda finalmente:

$$\boxed{v_\text{B} = v_{0\text{A}} \cos\alpha - \frac{x_{0\text{B}} \cdot g}{2 v_{0\text{A}} \operatorname{sen}\alpha}}$$

La expresión obtenida nos sirve para calcular, en las condiciones que se dan en el enunciado del problema, qué velocidad constante deberá llevar el jugador del equipo contrario para recoger la pelota cuando llegue al suelo.

Analizad el resultado obtenido. Reflexionad, en particular, sobre el significado de que v_B pueda ser negativa, nula o positiva

En primer lugar, podemos darnos cuenta de que la ecuación es dimensionalmente homogénea y que en ambos lados del signo igual tenemos L/T.

En segundo lugar, como el resultado es una resta de dos términos. Si nos sale un número negativo implica que la única componente escalar del vector $\vec{v}_\text{B}$ es negativa y por tanto el jugador se mueve hacia la izquierda porque el alcance del balón será inferior a la distancia inicial que separa a los dos jugadores. Si la resta es 0, quiere decir que el jugador no se mueve y que, por tanto el balón va a caer justo donde él se encuentra y finalmente, si la resta es positiva, quiere decir que el jugador se dirige hacia la derecha, porque el alcance del balón es superior a la distancia que le separa del punto de lanzamiento. Sustituyendo los datos numéricos, podremos saber en cuál de los tres casos nos encontramos:

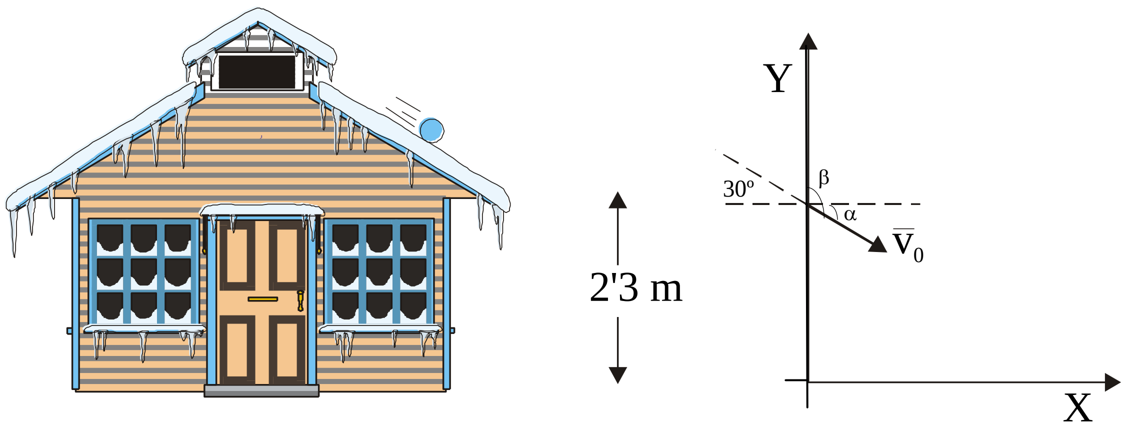
$$v_B = v_{0A}\cos\alpha - \frac{x_{0B}\cdot g}{2v_{0A}\ \mathrm{sen}\,\alpha} = 18\cos 30^{\circ} - \frac{40\cdot 10}{2\cdot 18\cdot \mathrm{sen}\,30^{\circ}} = -\ 6'61\ \mathrm{m/s}$$

Por tanto, el balón no sobrepasará al jugador contrario y éste ha de correr hacia la izquierda con $\vec{v}_B = (-6'61,\ 0)$ m/s para darle alcance en el momento justo en que llegue al suelo.

39. Desde el suelo se dispara un proyectil A con rapidez de 100 m/s y ángulo de 37º. Un segundo más tarde y desde 320 m más allá, se lanza verticalmente y hacia arriba otro proyectil B con rapidez v. Determinar el valor de v para que choque con el primer proyectil.

sol: v = 68’3 m/s.

40. Una bola de nieve se desliza por el tejado de un edificio con rapidez de 10 m/s en el momento que lo abandona. Teniendo en cuenta las características geométricas de la figura adjunta y el sistema referencial indicado, determinad la ecuación de la trayectoria y el punto de impacto.



Este problema es similar al tiro horizontal ya estudiado aunque la velocidad inicial $\vec{v}_0$ no es horizontal como allí sucedía. El proceso pues será el mismo, con la diferencia que $\vec{v}_0$ tiene ahora dos componentes. Tomaremos como sistema de referencia los ejes de coordenadas cartesianas que se incluyen en el dibujo y como origen de tiempos el instante en que la bola de nieve abandona el tejado. De acuerdo con ello los datos del problema serían los siguientes:

$\vec{a} = (0,-g)$; $t_0 = 0$; $\vec{v}_0 = (v_0\cos\alpha,\ v_0\cos\beta)$; $\vec{r}_0 = (0,\ 2'3)$ m
siendo α y β los ángulos directores (ved anexo sobre vectores) del vector $\vec{v}_0$

La bola en cuanto pierde contacto con el tejado se ve sometida únicamente a la aceleración de la gravedad (para simplificar ignoramos el efecto del rozamiento con el aire).

¿Cómo podemos determinar la ecuación de la trayectoria y el punto de impacto?

Como conocemos la aceleración y las condiciones iniciales, podemos determinar mediante integración las ecuaciones $\vec{v} = \vec{v}(t)$ y $\vec{r} = r(t)$, que nos dan la velocidad de la bola de nieve y sus posición en cualquier momento desde que sale del tejado hasta que impacta finalmente contra el suelo.

Una vez que obtengamos la ecuación del movimiento $\vec{r} = r(t)$, tenemos también las coordenadas x = x (t) e y = y (t). Podemos hallar el alcance o distancia horizontal desde la base del edificio hasta el punto del impacto. Para ello hay que tener en cuanta que el valor de dicha distancia coincide con el de la coordenada x en el instante t_1, en que se produce el choque contra el suelo (es decir, en el momento en que "y" toma el valor 0).

Integrando a partir de $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow d\vec{v} = \vec{a} \cdot dt \rightarrow \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a} \cdot dt$

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \int_0^t (0, -g)\, dt \rightarrow \vec{v} = (v_0 \cos\alpha, v_0 \cos\beta) + (0, -gt) \rightarrow \vec{v} = (v_0 \cos\alpha, v_0 \cos\beta - gt)$$

Integrando a partir de $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt \rightarrow \int_{r_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v} \cdot dt$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t (v_0 \cos\alpha, v_0 \cos\beta - g\,t)\, dt = (0,\ h) + (v_0\ t\cos\alpha,\ v_0\ t\cos\beta - \frac{1}{2} gt^2) \rightarrow$$

$$\vec{r} = (v_0\ t\cos\alpha,\ \ h + v_0 t\cos\beta - \frac{1}{2} gt^2)$$

La ecuación de la trayectoria vendrá dada (en paramétricas) por:

$x = v_0\, t \cos\alpha = 10\, t \cos 30^\circ \rightarrow$ **$x = 8'7\, t$**

$y = h + v_0\, t \cos\beta - 1/2\, gt^2 = 2'3 + 10\, t \cos 120^\circ - 5\, t^2 \rightarrow$ **$y = 2'3 - 5t - 5t^2$**

Podemos eliminar t en las ecuaciones anteriores y dejar así y en función de x (ecuación de la trayectoria en explícitas):

$t = x/8'7 \rightarrow$ **$y = 2'3 - 0'57\, x - 0'066\, x^2$**, que es la ecuación de una parábola.

Para hallar el alcance, sabemos que en el punto en que impacte la bola sobre el suelo se cumplirá que $x = v_0\, t_1 \cos\alpha$, siendo t_1 lo que marque el reloj en ese instante. Como además la coordenada "y" será 0 (la bola llega al suelo), podemos hallar t_1 mediante:

$$0 = h + v_0\ t_1 \cos\beta - \frac{1}{2} gt_1^2 \ \rightarrow\ -5t_1^2 + 5t_1 \cos 120^\circ + 2'3 = 0 \rightarrow -5t_1^2 - 5t_1 + 2'3 = 0$$

Con lo que nos queda la ecuación $5t_1^2 + 5t_1 - 2'3 = 0$, que resolviéndola nos da: $t_1 = 0'34$ s

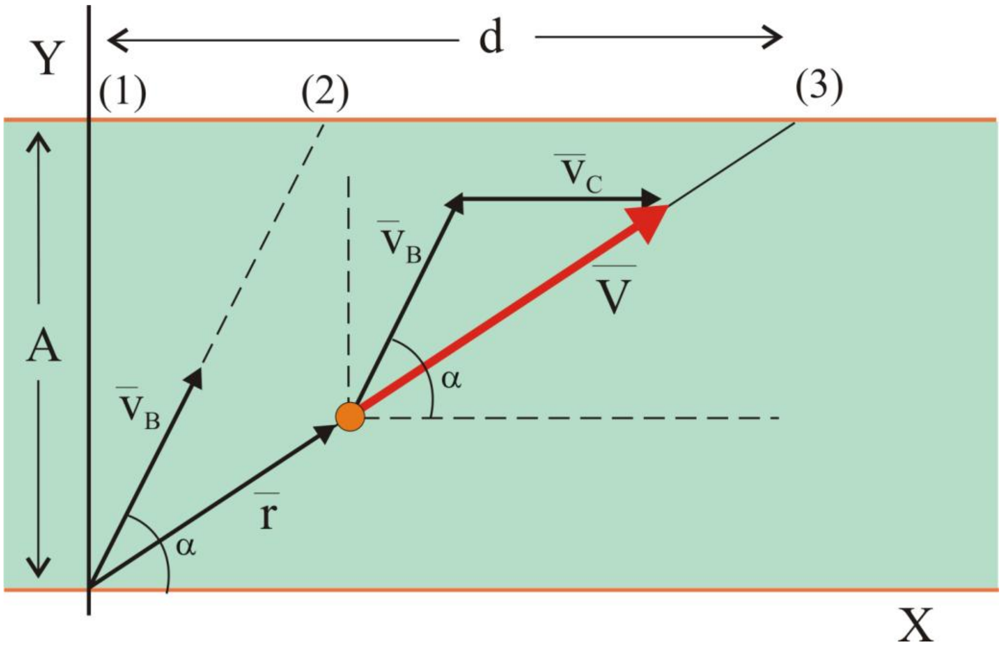
Sustituyendo este valor en la expresión x = x (t), obtenemos que el alcance vale:

$A = v_0\, t_1 \cos\alpha = 10 \cdot 0'34 \cdot \cos 30^\circ = 2'94$ m

41. Una barca que se desplaza a 6 m/s sale de la orilla de un río de 60 m de ancho en una dirección que forma un ángulo de 60º con dicha orilla (en el sentido en que se desplaza la corriente). Determinad a qué punto de la otra orilla llegará la barca suponiendo que la rapidez de la corriente sea constante y su valor 2 m/s.

Presentación de la situación problemática, discusión de su posible interés, precisión del problema y análisis cualitativo de la situación.

En el esquema siguiente hemos representado la situación que plantea el problema. El punto (1) es al que llegaría la barca en caso de que no hubiese corriente y el ángulo α valiese 90º. El punto (2) corresponde también al caso de que no hubiese corriente, pero con un ángulo de 60 º (que es el rumbo que toma la barca). Sin embargo, como sí que existe corriente, la barca sufre una deriva en el rumbo inicial ya que a la velocidad de la barca $\vec{v}_B$ hay que sumar la velocidad de la corriente $\vec{v}_C$, lo que hace que se dirija hacia el punto (3) de la otra orilla, con una velocidad resultante de $\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{v}_C$.



El problema nos pide a qué punto de la otra orilla llegará la barca. Se trata de un problema que tiene un indudable interés en aquellas situaciones en las que hay que cruzar una extensión grande de agua y se desea conocer el rumbo para llegar a un punto determinado. Dicho punto puede determinarse mediante la distancia “d” existente entre los puntos (1) y (3). Para ello, simplificaremos el problema despreciando lo que ocurre en el instante inicial (salida de la barca) y final (llegada a la otra orilla) en los que habrá una cierta aceleración y consideraremos el movimiento como uniforme a lo largo de todo el trayecto.

¿De qué factores dependerá el valor de la distancia d?

Podemos suponer que dicha distancia dependerá de la anchura A del río, del ángulo α, de la velocidad $\vec{v}_B$ de la barca y de la velocidad $\vec{v}_C$ de la corriente, de manera que si, manteniendo constantes los restantes factores, aumentase, por ejemplo, la velocidad de la corriente, d también aumentaría y lo mismo ocurriría si aumentase la anchura del río o disminuyese el ángulo α.

Diseño de posibles estrategias de resolución.

Si escogemos un sistema de coordenadas cartesianas como el que se representa en la figura anterior, cuyo origen coincida con la posición inicial de la barca, podemos darnos cuenta de que la distancia d coincidiría con la componente cartesiana r_x del vector de posición de la barca $\vec{r} = (r_x, r_y)$ en el preciso instante en que ésta llegue a la otra orilla, es decir, cuando la componente r_y coincida con la anchura del río ($r_y = A$). Por tanto, una forma de obtener d, sería determinar en primer lugar la ecuación del movimiento de la barca $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ y a continuación tratar de calcular r_x en el instante en que $r_y = A$. La ecuación de movimiento puede determinarse integrando la función $\vec{v} = \vec{v}\,(t)$.

Otra posible forma de resolver el problema (que no desarrollaremos aquí), es mediante consideraciones geométricas (semejanza de triángulos).

Resolución, análisis de los resultados, implicaciones y nuevas perspectivas.

Resolveremos el problema según la primera estrategia. De acuerdo con la figura anterior, el vector velocidad resultante con que se mueve la barca puede expresarse como:

$\vec{v} = (v_x, v_y) = (v_B \cos\alpha + v_C, v_B \operatorname{sen}\alpha)$.

Integrando en $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ (teniendo en cuenta que para t = 0 s, $\vec{r}_0 = 0$ y que $\vec{v}$ es constante), nos queda que:

$\vec{r} = (r_x, r_y) = \left[(v_B \cos\alpha + v_C)t,\ v_B t \cdot \operatorname{sen}\alpha\right]$ que nos da el vector de posición de la barca en cualquier instante del tiempo que dura el trayecto. Descomponiendo ahora según los ejes:

(1) $r_x = (v_B \cos\alpha + v_C)\, t$
(2) $r_y = v_B\, t \cdot \operatorname{sen}\alpha$

Igualando r_y a la anchura del río A, obtenemos de la expresión (2) el tiempo t correspondiente al instante en que la barca llega a la otra orilla: $t = \dfrac{A}{v_B \operatorname{sen}\alpha}$

Sustituyendo ahora t en la expresión (1) tendremos $r_x = d$ y

$$d = \frac{(v_B \cos\alpha + v_C)A}{v_B \operatorname{sen}\alpha}$$

Finalmente, sustituyendo los valores numéricos llegamos obtenemos: d = 57’74 m

Analizad el resultado literal obtenido

En primer lugar podemos comprobar que la expresión obtenida es dimensionalmente homogénea ya que en ambos lados de la igualdad las dimensiones son las de una longitud. Por otra parte, el resultado contempla algunos casos bien conocidos como, por ejemplo, que si el ángulo α disminuyese la distancia d aumentaría tendiendo a ∞ cuando α tendiese a 0. También podemos constatar que si α = 90º y $v_C = 0$, se obtiene d = 0. Este último aspecto nos permite plantear una cuestión particularmente interesante desde el punto de vista práctico, consistente en determinar *cuánto debería valer α para que la barca llegase justo enfrente de donde se halla inicialmente:*

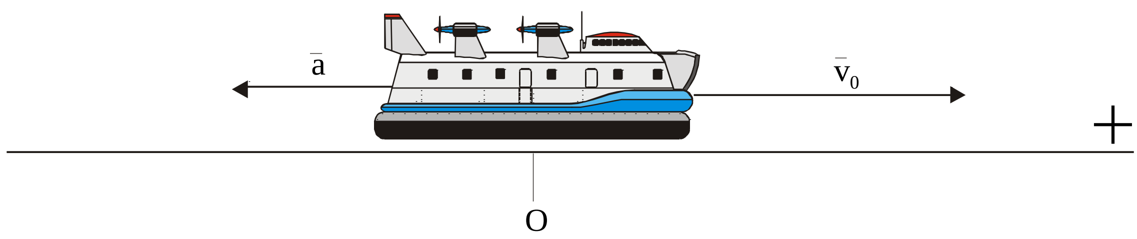
Como la corriente del río desvía a la barca deberemos de tener en cuenta su efecto y tomar un ángulo mayor de 90º. En efecto, si llega justo enfrente se deberá de cumplir que la distancia d valga 0, luego haciendo d = 0 en el resultado del problema, podemos despejar α y obtener el ángulo pedido:

$$d = \frac{(v_B \cos\alpha + v_C)A}{v_B \operatorname{sen}\alpha} = 0 \rightarrow v_B \cos\alpha = -v_C \rightarrow \cos\alpha = \frac{-v_C}{v_B} \rightarrow \alpha = \arccos\frac{-v_C}{v_B} = 109'47^{o}$$

42. Un vehículo que se desplaza sobre un colchón de aire detiene su propulsión, quedando sometido exclusivamente a la fuerza de fricción con el aire que le provoca una aceleración proporcional a la rapidez del vehículo. Determinad la variación temporal de la rapidez.

Al quedar el móvil sometido exclusivamente a una aceleración de frenado que actúa en sentido contrario a su velocidad, la trayectoria será rectilínea (lo que significa que no habrá aceleración normal). Además, la rapidez irá disminuyendo con el tiempo y en consecuencia, el valor absoluto de la aceleración también lo hará. Se trata, pues, de un movimiento rectilíneo y variado (la aceleración tangencial no es constante).

Si establecemos los orígenes de espacios y tiempos cuando comienza a actuar exclusivamente la aceleración de frenado, un posible esquema representativo sería:



De acuerdo con todo lo anterior: $a_t = -kv$; $t_0 = 0$; v_0 ; $e_0 = 0$

¿Que podemos hacer para calcular la expresión de la rapidez v en función del tiempo?

Se trata, evidentemente, de proceder como ya lo hemos hecho en otros problemas anteriores, integrando a partir de la aceleración:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a_t \cdot dt \rightarrow \int dv = \int -kv\,dt$$

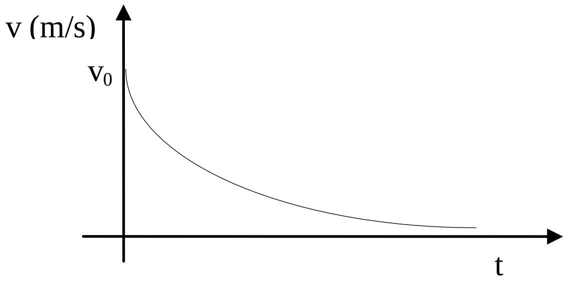
En este caso, sin embargo, la segunda integral no puede resolverse ya que la rapidez que figura en ella no es una constante (precisamente es su variación temporal lo que se demanda). Para poder solucionar este inconveniente, hemos de proceder a separar las variables de forma adecuada antes de integrar:

dv = -kv · dt → dv/v = -k dt. Ahora sí que podemos integrar:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \int_0^t -k\,dt \rightarrow \ln v - \ln v_0 = -k\,t \rightarrow \ln\frac{v}{v_0} = -k\,t \rightarrow \frac{v}{v_0} = e^{-kt} \rightarrow v = v_0 \cdot e^{-kt}$$

¿Qué forma tendría la función anterior si procediéramos a su representación gráfica?

Podemos comprobar que si representáramos v frente a t, obtendríamos una curva como la de la figura en la que como puede verse, la rapidez decrece aproximándose a 0 asintóticamente:

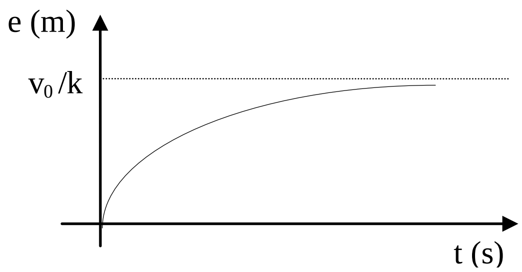


¿Cómo podríamos obtener la ecuación del movimiento e *= e (t)?*

Para ello tenemos que integrar de nuevo a partir de $v = \frac{de}{dt} = v_0 \cdot e^{-kt}$

$$\int_0^e de = \int_0^t v_0 \cdot e^{-kt} \cdot dt \rightarrow e = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$$

Si representáramos gráficamente la función obtenida obtendríamos:



43. La aceleración tangencial de un móvil es a_t= -kv^2. Sabiendo que para t = 0 la rapidez es v_0 y se encuentra en el origen, determinad la ecuación de movimiento e (t)

sol: e = ln (ktv$_o$ +1)/ k

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

C-1. Se lanza un cuerpo hacia arriba. ¿Qué altura máxima alcanzará?

La situación abierta que se plantea en el enunciado se puede relacionar con el problema del lanzamiento de proyectiles y comentar brevemente la importancia histórica de los trabajos de Galileo en este campo y sobre la caída de graves en general.

Podemos precisar el enunciado considerando el lanzamiento vertical desde el suelo de un objeto pequeño y compacto de forma que podamos ignorar el efecto de rozamiento con el aire. Por otra parte supondremos que no llega tan alto como para que podamos medir ninguna variación en el peso de dicho objeto.

Al lanzar el cuerpo hacia arriba desde el suelo éste sale con una rapidez inicial v_0 pero debido a la gravedad sube cada vez más lentamente hasta que llega un momento en que se detiene y comienza a descender cada vez más aprisa. Tanto en la subida como en la bajada el objeto se halla sometido únicamente a la fuerza peso y se mueve con la aceleración de la gravedad (que suponemos constante y dirigida siempre verticalmente hacia abajo).

En principio podemos suponer que el valor de la altura máxima alcanzada dependerá de la rapidez inicial con que se lance y del valor de la aceleración de la gravedad. Estas ideas se pueden resumir mediante la ecuación:

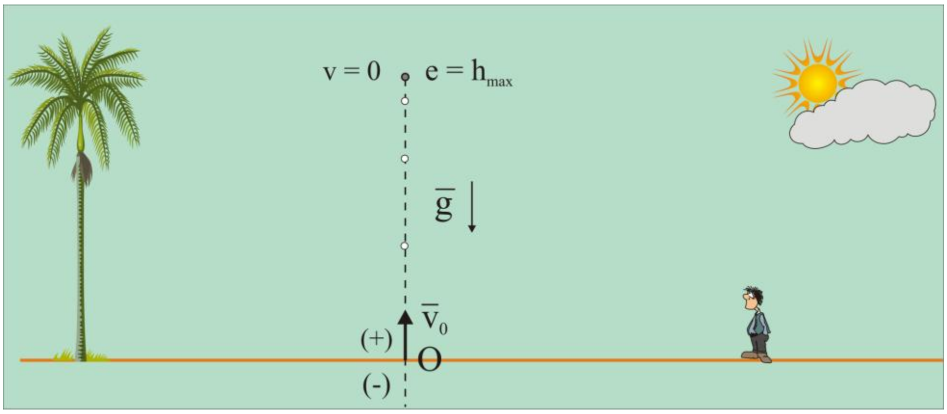
$$h_{max} = h\ (v_0,\ g)$$

Podemos incluso, tratar de profundizar un poco más haciendo alguna hipótesis respecto a cómo van a influir cada una de esas variables en la altura máxima alcanzada (siempre suponiendo que las demás permanecen constantes). Así, por ejemplo, cabe pensar que:

-Cuando v_0 aumente (se lance hacia arriba con mayor rapidez) más alto llegará.
-Cuando la gravedad disminuya la aceleración del objeto también será menor y su rapidez irá disminuyendo más lentamente, por lo que la altura máxima aumentará (esto ocurriría, por ejemplo, si el lanzamiento se realizará en la Luna en lugar de hacerlo sobre la superficie terrestre).

Es posible que además de las variables anteriores se consideren otras, como el tiempo que esté subiendo y la masa del objeto. En cuanto a la primera, es fácil darse cuenta de que se encuentra ya implícita en las dos variables consideradas (no es posible, por ejemplo, variar la v_0 con que se lanza un objeto en un lugar dado y mantener constante el tiempo que dura la subida). Respecto a la posible influencia de la masa, no hay ningún inconveniente en mantenerla como una hipótesis más de trabajo pero sin olvidar analizarla a la luz del resultado obtenido.

Dado que la trayectoria es conocida (línea recta perpendicular al suelo), podemos aplicar un tratamiento escalar para resolver el problema. Para ello escogeremos arbitrariamente un punto de la trayectoria como origen de espacios (por ejemplo el punto del suelo desde donde se lanza) y un sentido como positivo (por ejemplo hacia arriba), tal y como se indica en la figura adjunta.



La aceleración tangencial es constante y según el esquema anterior será negativa e igual a la aceleración de la gravedad. Se trata, pues, de un movimiento uniformemente acelerado:

$v = v_0 + a\,(t-t_0)$ para la rapidez v en cualquier instante t.

$e = e_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2$ para la posición e en cualquier instante t.

Teniendo en cuenta las condiciones imperantes en el problema, los datos a considerar serían: Un objeto de masa m que en el instante $t_0 = 0$ se lanza desde el suelo ($e_0 = 0$) verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial v_0 (positiva) y que se mueve con una aceleración sobre la trayectoria constante y negativa (-g).

De acuerdo con lo anterior, la ecuación de la rapidez v y de la posición e en cualquier instante vendrán dadas respectivamente por:

(1) $v = v_0 - gt$ (2) $e = v_0 t - \frac{g}{2}t^2$

En las ecuaciones anteriores hemos optado por colocar el signo correspondiente (de acuerdo con el criterio arbitrario especificado al comienzo) antes de sustituir ningún valor numérico.

La altura máxima coincidirá en este caso con el valor de la posición e durante la subida en el preciso instante en que el objeto se pare (momentáneamente) para volver a caer. Ese instante puede calcularse haciendo v = 0 en la ecuación (1) y despejando t.

Otra posibilidad para resolver el problema es mediante de consideraciones de trabajo y energía. En este caso como no actúan fuerzas no conservativas la aplicación del teorema fundamental, que relaciona el trabajo resultante con la variación de energía cinética, a la subida del objeto sometido exclusivamente a la acción de la fuerza peso, nos daría que:

$$W_{res} = \Delta Ec \;\rightarrow\; W_P = \Delta Ec \;\rightarrow\; -\Delta Ep = \Delta Ec \;\rightarrow\; Ep_0 + Ec_0 = Ep + Ec = \text{constante}.$$

Por lo que podríamos igualar la energía cinética más la potencial gravitatoria del objeto (situado en la superficie de la Tierra) a dicha suma en la posición de altura máxima y despejar el valor de la altura h correspondiente.

Mediante la primera estrategia, a partir de la ecuación (1) hacemos v = 0 y despejamos t (que coincidirá entonces con el tiempo que tarda en subir), con lo que: $0 = v_0 - gt \rightarrow t = v_0/g$

Sustituyendo ahora en la ecuación (2) queda que: $e = v_0 \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right) - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2$ y simplificando:

Obtenemos finalmente la expresión de la altura máxima $\boxed{e = \frac{v_0^2}{2g}}$

Mediante la segunda estrategia, bastaría con tomar como nivel 0 de energía potencial gravitatoria el suelo y tener en cuenta que al alcanzar la altura máxima h, el objeto se para momentáneamente con lo que la energía cinética en ese punto será nula. Así pues:

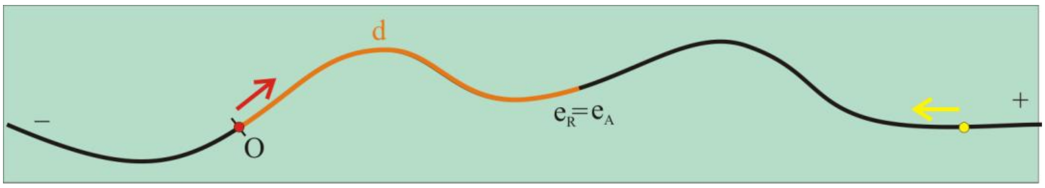
$$Ep_0 + Ec_0 = Ep + Ec \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_0^2 = mgh_{max} \quad \rightarrow \quad \boxed{h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}}$$

Como vemos mediante las dos estrategias propuestas hemos llegado al mismo resultado literal, lo que refuerza su validez. Por otra parte, esta forma de proceder nos permite analizar dicho resultado y darnos cuenta si se cumplen o no las hipótesis de partida y los posibles casos límite considerados. En primer lugar, la ecuación es dimensionalmente homogénea (L en ambos lados). Además cuanto mayor es la rapidez con que se lanza el objeto mayor altura máxima alcanzará, pero ahora, es posible darse cuenta de una forma más precisa cómo influye esa variable que al estar elevada al cuadrado hace que a doble rapidez inicial no se obtenga doble altura máxima sino cuádruple.

C-2. ¿Dónde se cruzarán dos vehículos R y A que circulan por la misma carretera y al encuentro?

¿Qué pasa ahí? ¿Cómo me imagino la situación?

Se trata de dos movimientos uniformes en los que los móviles se desplazan por una trayectoria fija y conocida, en sentidos opuestos, de modo que llegará un momento en el que se cruzarán y queremos saber en qué punto ocurre eso. Es un problema que puede tener su interés en el control del tráfico de vehículos (trenes, autobuses, etc.).



Para resolver el problema es preciso en primer lugar elegir un sistema de referencia adecuado, así como un criterio de signos. Escogeremos como origen de espacios la posición inicial del móvil rojo y valores de la posición positivos hacia la derecha de ese punto. Como origen de tiempos ($t_0 = 0$) escogeremos también el instante inicial, cuando ambos están separados por la distancia D. Dado que cuando se cruzan ambas posiciones son iguales, el problema se puede operativizar como: ¿A qué distancia "d" del origen de espacios O, se cumple que $e_R = e_A$?

¿De qué factores dependerá d? Proponed posibles hipótesis argumentando cómo cabe esperar que influya cada uno de ellos en el valor de d, considerando también algún caso límite.

En principio, podemos pensar que d dependerá de la rapidez con que se mueva cada uno y de la distancia inicial D que los separe:

$d = f(v_R, v_A, D)$ donde v_R = rapidez del móvil rojo y v_A = rapidez del móvil amarillo

Es más, cabe esperar que si a <u>igualdad de los restantes factores</u>:

v_R aumenta $\rightarrow$ d aumentará
v_A aumenta $\rightarrow$ d disminuirá
D aumenta $\rightarrow$ d aumentará

También podemos pensar en algunos casos límite evidentes como, por ejemplo:

Si $v_R = 0 \rightarrow d = 0$; si $v_A = 0 \rightarrow d = D$; si $v_R = v_A \rightarrow d = D/2$

Proponed una posible estrategia de resolución

Se trata de dos movimientos uniformes, podemos saber dónde estarán los móviles rojo y amarillo en cualquier instante. Hallar d equivale a calcular e_R (o e_A) en el preciso instante "t" en que ambas posiciones coinciden. Por tanto, una posible estrategia será:

Escribir las ecuaciones $e_R = f(t)$ y $e_A = f(t)$ y hallar el instante "t" en que $e_R = e_A$ y de ahí finalmente d.

Proceded a la resolución propiamente dicha

La ecuación general de la posición de un movimiento uniforme es: $e = e_0 + v\cdot(t - t_0)$
Para el móvil rojo, tenemos $t_0 = 0$, $e_0 = 0$, $v = v_R$, $e = e_R$, con lo que la ecuación será:

$e_R = v_R\cdot t$

Para el móvil amarillo, tenemos $t_0 = 0$, $e_0 = D$, $v = -v_A$, $e = e_A$, con lo que la ecuación será:

$e_A = -v_A\cdot t + D$

Obsérvese que al desplazarse sentido negativo, la rapidez de A es negativa. En el instante en que $e_R = e_A$, se tendrá que cumplir que:

$v_R\cdot t = -v_A\cdot t + D$ de donde: $t = \dfrac{D}{(v_R + v_A)}$

Ahora basta sustituir este valor de "t" en la ecuación de la posición de cualquiera de los dos móviles, para tener la distancia "d" buscada. Si lo hacemos así, obtenemos:

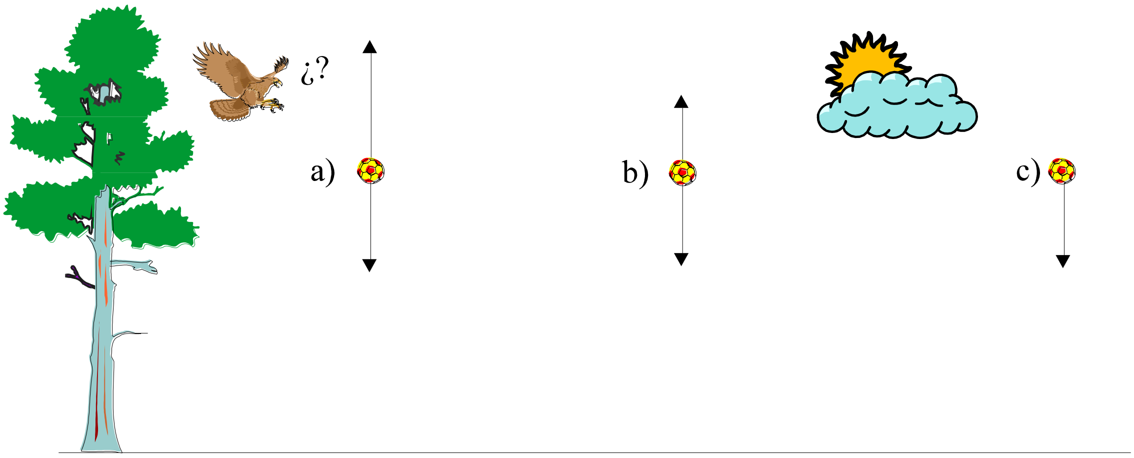
$d = D\cdot\dfrac{v_R}{(v_R + v_A)}$ o lo que es equivalente: $\boxed{d = D\cdot\dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{v_A}{v_R}\right)}}$

Proceded a analizar el resultando obtenido, comprobando si se cumplen o no las hipótesis de partida y los casos límite considerados.

Si nos detenemos en analizar el resultado anterior, podemos comprobar fácilmente cómo se cumplen todas las hipótesis de partida. Es fácil ver, por ejemplo, que cuando ambos móviles se desplazan con la misma rapidez, se encontrarán justo a mitad de camino (D/2), o que si, por ejemplo, $v_A = 0$ ocurre que $d = D$, etc.

3. DINÁMICA DEL PUNTO

1. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba. Considerando nulo el rozamiento, señalad cuál de los siguientes esquemas representa correctamente las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo poco antes de que alcance la máxima altura.



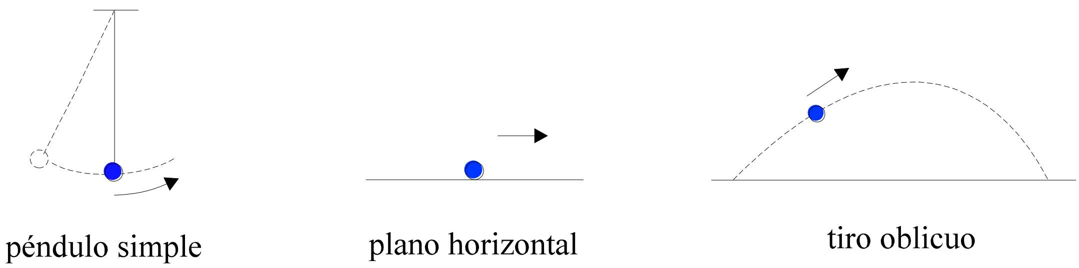
Algunas personas piensan que al lanzar un cuerpo hacia arriba se le comunica una fuerza mayor que su peso y que dicha fuerza, de alguna manera, queda impresa en él y le impulsa hacia arriba de forma que, poco a poco, se va "gastando" (disminuye) conforme el cuerpo va subiendo.

Explicad qué equivocaciones se cometen en el razonamiento anterior

En primer lugar, es cierto que al lanzar un cuerpo hacia arriba ejercemos durante el lanzamiento una fuerza en sentido opuesto al peso y mayor que esta. En consecuencia, el cuerpo saldrá de la mano con una cierta velocidad vertical hacia arriba. Sin embargo es preciso tener en cuenta que dicha fuerza no queda impresa en el cuerpo. Por el contrario, las fuerzas son debidas a interacciones y cuando el cuerpo se halla en el aire ya no interacciona con quien le lanzó sino tan solo con la Tierra (interacción de naturaleza gravitatoria). Así pues, desde el preciso instante en que el cuerpo abandona la mano que lo lanza hasta que choca contra el suelo, la única fuerza que actúa sobre el mismo (si se desprecia el rozamiento con el aire) es la fuerza peso, de manera que asciende cada vez más lentamente porque la fuerza peso "tira de él" hacia abajo. Si no fuese por el peso, se movería indefinidamente con la misma rapidez con que se lanzó y en la misma dirección y sentido (en ausencia de otras interacciones). Por tanto, la respuesta correcta a la cuestión es la c).

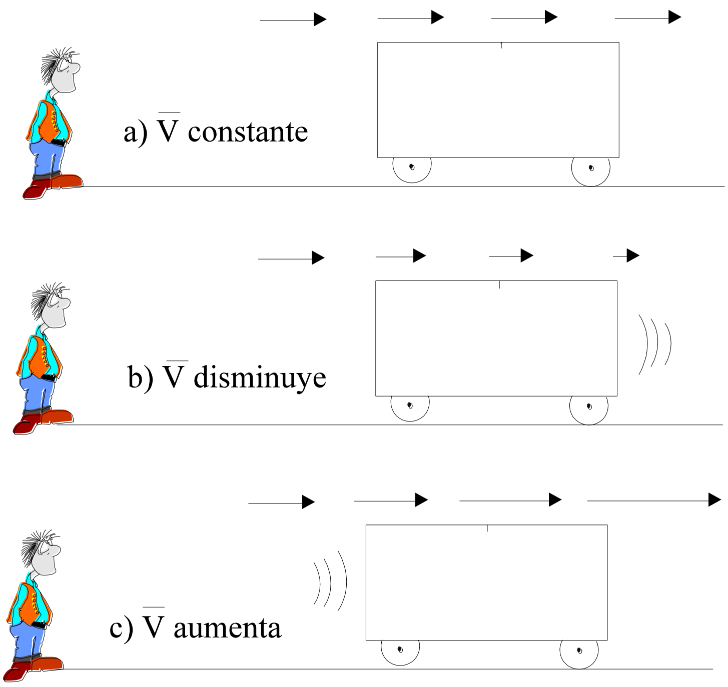
En conclusión: cuando tengamos que representar las fuerzas que están actuando sobre cualquier objeto, lo que hemos de hacer es preguntarnos con qué está interaccionando, no con qué interaccionó, y tener presente que las fuerzas hay que relacionarlas con la aceleración (cambios de velocidad) y no con la velocidad.

2. Dibujad todas las fuerzas y la fuerza resultante que en cada una de las situaciones representadas actúan sobre la bola. (La flecha indica el sentido del movimiento en el instante representado y el rozamiento se considera nulo).



sol: En el péndulo simple solo actúan el peso y la tensión del hilo. En el plano horizontal, el peso y la fuerza normal que ejerce el plano hacia arriba. En el tiro oblicuo, el peso. En el primero la fuerza resultante en ese instante es vertical y hacia arriba (será la fuerza normal necesaria para que $\vec{v}$ cambie en dirección) en el segundo es nula y en el tercero coincide con el peso de la bola.

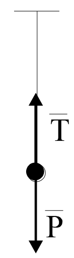
3. Un péndulo se encuentra suspendido del techo de un vagón de tren. Imagínate que te encuentras parado(a) en el andén pero que puedes ver lo que ocurre dentro del vagón. Dibuja la posición correcta del péndulo en los distintos casos, así como las fuerzas que actúan sobre la bola del mismo. (Las flechas representan la velocidad del vagón).



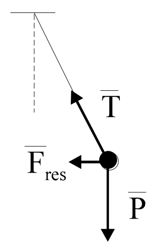
Para dibujar las fuerzas que actúan sobre la bolita del péndulo y su resultante, hemos de analizar con qué está interaccionando dicha bola y hacia dónde va la aceleración con la que se mueve ya que, como sabemos, la fuerza resultante que actúa sobre una masa y la aceleración (no la velocidad) siempre tienen la misma dirección y sentido.

En los tres casos representados, la bolita del péndulo interacciona con el hilo (enganchado al techo) y con la Tierra. Como consecuencia de dichas interacciones el hilo ejerce una fuerza $\vec{T}$ (tensión) sobre la bola y la Tierra una fuerza $\vec{P}$ (peso). La suma de las dos fuerzas será la fuerza resultante $\vec{F}_{res} = \vec{T} + \vec{P}$ que siempre deberá de tener la misma dirección y sentido que el vector aceleración ya que según la ecuación fundamental de la dinámica: $\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}$. Por lo tanto, para resolver la cuestión, nos convendrá analizar previamente *cuál será la dirección y sentido del vector aceleración en cada caso.*

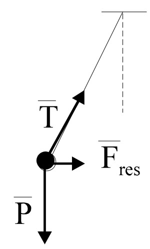
a) En este caso no hay aceleración y por tanto $\vec{T} + \vec{P} = 0$ por lo que ambas fuerzas se anulan y como el peso tiene la dirección vertical, también la deberá tener la tensión $\vec{T}$ (la bolita se ha colgado estando el vehículo con movimiento rectilíneo y uniforme y, por tanto, no oscila).



b) En este caso el vector aceleración va hacia la izquierda (en sentido contrario a la velocidad) y por tanto para obtener el vector $\vec{F}_{res}$ en esa misma dirección y sentido, el vector $\vec{T}$ deberá estar inclinado según se indica en la figura.



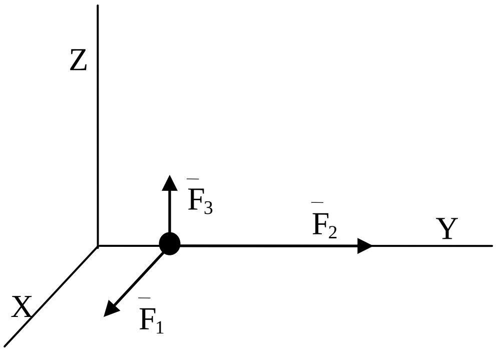
c) En este caso la aceleración tiene la misma dirección y sentido que la velocidad y, por tanto, la bolita se encontrará desplazada a la izquierda de la vertical, de manera que la suma de $\vec{T}$ y $\vec{P}$ nos de una fuerza resultante con la misma dirección y sentido que la aceleración.



En la resolución de este problema hemos tenido en cuenta que la dirección y sentido del vector aceleración no vienen determinados por el vector velocidad sino por el vector $d\vec{v}$.

4. Sobre un móvil de 20 kg de masa actúan simultáneamente las fuerzas representadas en la figura adjunta (se considerará incluido el peso).

Determinad la posición del móvil en función del tiempo sabiendo que: F_1 = 20 N, F_2 = 40 N y F_3 = 10 N, y que, al comenzar a actuar dichas fuerzas, el móvil se encontraba en el punto (0,1,0) m desplazándose con una rapidez de 2 m/s según el eje OY (+).



Como con la información de que disponemos no podemos prever la trayectoria del móvil, será necesario trabajar con magnitudes vectoriales, lo que significa que la posición del móvil vendrá dada por el vector de posición $\vec{r}$. Dicho vector se puede obtener, como ya sabemos, integrando en $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Para ello necesitamos conocer previamente la función $\vec{v} = \vec{v}(t)$, que, a su vez, se puede determinar integrando $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Lo primero que tendremos que hallar, pues, será el vector aceleración.

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica $\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}$ podemos obtener la aceleración. Para ello hemos de tener en cuenta el carácter vectorial de las fuerzas:

$$\vec{F}_1 = (20, 0, 0)\ N$$
$$\vec{F}_2 = (0, 40, 0)\ N$$
$$\vec{F}_3 = (0, 0, 10)\ N$$

$$\vec{F}_{\text{res}} = (20, 40, 10)\ N$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{res}}}{m} = \frac{(20, 40, 10)}{20} = (\,1, 2, 0'5\,)\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Utilizaremos ahora este resultado para calcular $\vec{v} = \vec{v}(t)$ integrando en $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, teniendo en cuenta que para t_0 = 0, $\vec{v}_0$ = (0, 2, 0) m/s:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a} \cdot dt \rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = \int_0^t (1, 2, 0'5) \cdot dt = (t, 2t, 0'5t) \rightarrow \vec{v} = (0, 2, 0) + (t, 2t, 0'5t)$$

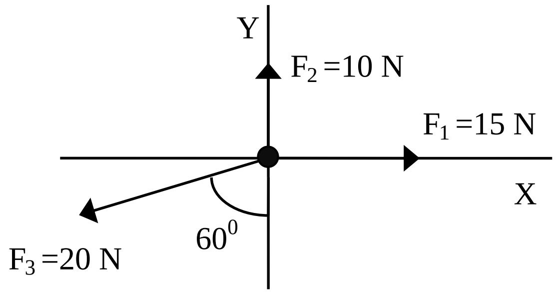
de donde obtenemos finalmente que $\vec{v}$ = (t, 2t+2, 0’5 t).

Podemos ahora calcular la expresión $\vec{r} = \vec{r}(t)$, integrando en $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ teniendo en cuenta que en el instante $t_0 = 0$, el vector de posición era $\vec{r}_0 = (0, 1, 0)$ m:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v} \cdot dt \rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \int_0^t (t,\ 2t+2,\ 0'5t) \cdot dt = (\frac{t^2}{2},\ t^2 + 2t,\ \frac{t^2}{4})$$

de donde $\vec{r} = (0,\ 1,\ 0) + (\dfrac{t^2}{2},\ t^2 + 2t,\ \dfrac{t^2}{4}) = (\dfrac{t^2}{2},\ t^2 + 2t + 1,\ \dfrac{t^2}{4})$

5. Sobre una masa puntual de 5 kg actúan las fuerzas representadas en la figura adjunta (se considerará que el peso ya está incluido en estas fuerzas). Determinad su posición a los dos segundos de comenzar a actuar las fuerzas, sabiendo que el cuerpo se encontraba inicialmente en reposo, en la situación de la figura:



sol: $\vec{r}$ = (-0'92 , 0, 0) m

6. Sobre una masa de 50 kg que se desplaza a 40 m/s por un plano horizontal sin rozamiento, con movimiento rectilíneo y uniforme, comienza a actuar una fuerza de 500 N, en sentido contrario a su movimiento. Hallad la distancia recorrida a los 8 s de comenzar a actuar dicha fuerza.

La masa se mueve inicialmente con un movimiento rectilíneo y uniforme sobre una superficie horizontal. Podemos suponer, pues, que únicamente interacciona con la superficie del plano y con la Tierra de manera que la fuerza normal $\vec{R}$ que ejerce el plano sobre dicha masa, ha de anularse con la fuerza peso $\vec{P}$ o fuerza con que la Tierra la atrae. Si ahora comienza a actuar otra fuerza $\vec{F}$, podemos escribir que $\vec{F}_{\text{res}} = \vec{R} + \vec{P} + \vec{F} = \vec{F}$ de manera que, a partir de este momento, al actuar una fuerza resultante en sentido contrario al vector velocidad, únicamente se modificará su módulo y la trayectoria seguirá siendo rectilínea.

En este tipo de problemas, de trayectoria conocida, nos convendrá expresar la ecuación fundamental de la dinámica en componentes intrínsecas (ved figura al final de la página siguiente):

$$\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a} \rightarrow F_{res\ t} \cdot \vec{\tau} + F_{res\ n} \cdot \vec{n} = ma_t \cdot \vec{\tau} + ma_n \cdot \vec{n}$$

y descomponiéndolo en dos ecuaciones escalares:

$F_{res\ t} = m \cdot a_t \rightarrow - F = m \cdot a_t \rightarrow a_t = - F/m = -500/50 = - 10\ m/s^2$
$F_{res\ n} = m \cdot a_n \rightarrow 0 = m \cdot a_n \rightarrow a_n = 0$ (trayectoria rectilínea).

Describid el movimiento del cuerpo con el mayor detalle posible

El movimiento de la masa m queda descrito como el de un móvil que se desplaza con trayectoria rectilínea de forma que en el instante inicial $t_0 = 0$ se encuentra en la posición $e_0 = 0$ (tomamos origen de espacios en dicha posición) moviéndose con una rapidez $v_0 = 40$ m/s en el sentido que hemos tomado como positivo y sometido a una aceleración sobre la trayectoria de -10 m/s^2 que hará que su rapidez vaya decreciendo regularmente en 10 m/s cada segundo, de modo que llegará un instante en que v valdrá 0 y a partir de él la rapidez seguirá disminuyendo, es decir, tomando valores negativos cada vez más altos, por lo que la masa retrocederá cada vez más aprisa.

Las ecuaciones que describen éste movimiento, por ser uniformemente acelerado, son:

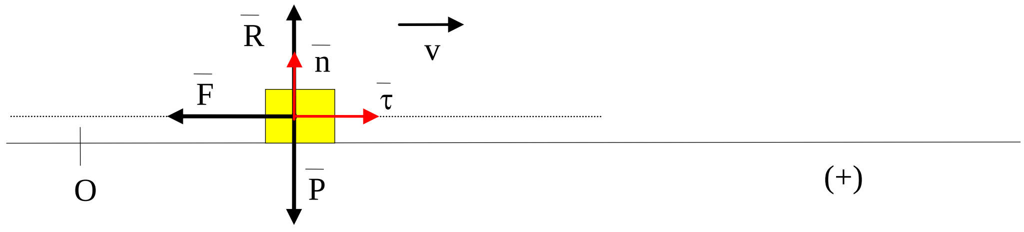
$e = v_0 t + 1/2\ a \cdot t^2 = 40t - 5t^2$
$v = v_0 + a \cdot t = 40 - 10t$

En dichas ecuaciones hemos sustituido a_t por a (ya que la componente normal a_n es 0)

¿Cómo podremos calcular la "distancia total recorrida" a los 8 segundos?

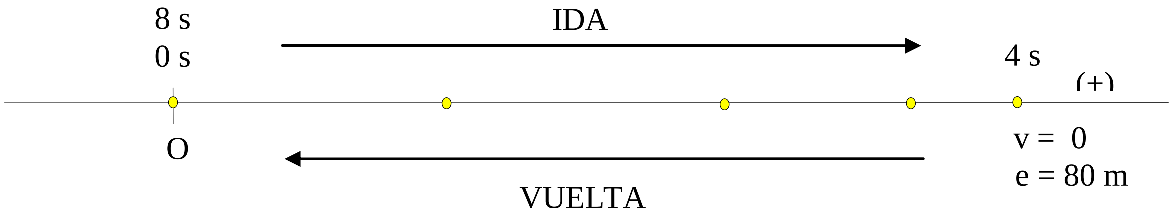
Lo primero que tendremos que saber es si en el instante t = 8 s el cuerpo está todavía moviéndose en el sentido inicial o por el contrario ya se detuvo y está regresando. Si en la ecuación: $v = 40 - 10t$, hacemos $v = 0$, podemos saber en qué instante se detiene y sustituyendo ese valor de t en la ecuación $e = 40t - 5t^2$, la posición que ocupa en dicho instante:

$0 = 40 - 10t \rightarrow t = 4$ s
$e_4 = 40 \cdot 4 - 5 \cdot 16 = 80$ m



Luego a los 8 s el cuerpo se encuentra ya de regreso después de haber recorrido 80 m en el sentido que hemos tomado como positivo. Para calcular la distancia recorrida en total, bastará hallar la posición del móvil en el instante 8 s y proceder a sumar la distancia recorrida en cada sentido. *Tratad de prever el resultado que se obtendrá antes de realizar ninguna operación.*

$e_8 = 40 \cdot 8 - 5 \cdot 64 = 0$ m.
$v_8 = 40 - 10 \cdot 8 = -40$ m/s



En el instante 8 s, se encuentra en el origen de espacios moviéndose en sentido negativo con una rapidez de -40 m/s y por tanto la distancia total recorrida en ese tiempo habrá sido de 160 m (mientras que el cambio de posición, Δe, será 0). Este resultado era previsible, ya que, al tratarse de un movimiento uniformemente acelerado el cambio de rapidez experimentado en los 4 segundos que tarda en pararse tendrá que coincidir con el que experimenta en los 4 segundos siguientes. Un ejercicio interesante para comprender este movimiento sería *construir e interpretar las gráficas: e = e (t) y v = v (t).*

7. Desde el suelo se lanza, hacia arriba, un cuerpo de 2 kg de masa con una rapidez de 20 m/s. Al mismo tiempo sopla un viento lateral que le origina una fuerza constante horizontal de 8 N. Determinad la ecuación de la trayectoria que describe el cuerpo hasta llegar al suelo.

sol: $x = 2t^2$, $y = -5t^2 + 20t$, $z = 0$

8. Un proyectil de 2 g de masa sale de la boca de un arma con una rapidez de 300 m/s. Sabiendo que la fuerza resultante que actuó sobre él a lo largo del cañón del arma fue: $F = 400 - \dfrac{4 \cdot 10^5 \cdot t}{3}$ **(F en N para t en s). Calculad:**

a) Tiempo para que el proyectil recorra el cañón.
b) Longitud del cañón.

sol: a) t = 0’003 s. b) L = 0’6 m

9. En el interior de un ascensor hay una persona de 80 kg de masa. Determinad la fuerza que ejercerá sobre el suelo del ascensor cuando este:

a) Sube con una aceleración de 2 m/s^2
b) Baja con una aceleración de 2 m/s^2
c) Sube con una rapidez constante de 3 m/s
d) Cae libremente al romperse el cable

La persona interacciona con el suelo del ascensor y con la Tierra. Se trata de dos interacciones diferentes. Llamaremos $\vec{P}$ a la fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre la persona, $\vec{P}$' a la fuerza con que la persona atrae a la Tierra, $\vec{R}$ a la fuerza normal y hacia arriba que el suelo del ascensor ejerce sobre la persona y $\vec{N}$ a la fuerza normal y hacia abajo que la persona hace sobre el suelo del ascensor (ved figura siguiente). Aplicando el tercer principio de la dinámica a cada una de ellas, podemos escribir que:

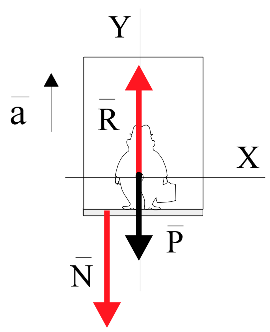
Interacción Tierra-persona: $\vec{P}$ = - $\vec{P}$'
Interacción suelo del ascensor-persona: $\vec{R}$= - $\vec{N}$

Conviene no confundir $\vec{P}$ con $\vec{N}$ ya que se trata de dos fuerzas distintas: la primera, tiene naturaleza gravitatoria, es ejercida por la Tierra sobre la persona y no depende del tipo de movimiento que lleve el ascensor; la segunda, no es gravitatoria, es ejercida por la persona sobre el suelo y su valor depende, como veremos, del tipo de movimiento que lleve el ascensor

La fuerza resultante que actuará sobre la persona vendrá dada pues por la suma vectorial $\vec{F}_{res} = \vec{R} + \vec{P}$, como $\vec{R}$ = - $\vec{N}$ en todo momento, para obtener $\vec{N}$ lo único que tendremos que hacer será despejar -$\vec{R}$ de la anterior ecuación, con lo que nos quedará que:

$$\vec{N} = \vec{P} - \vec{F}_{res}$$ en <u>todos</u> los casos.

Para resolver el problema necesitamos definir un sistema de coordenadas con el que poder expresar las fuerzas vectorialmente. Podemos escoger, por ejemplo, un sistema de coordenadas cartesianas con origen en la persona, como el que se indica en la figura de la derecha:



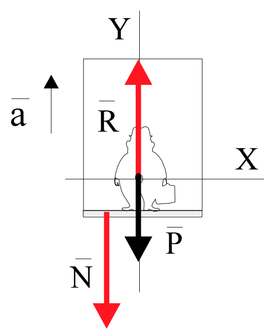
En la figura no hemos incluido la fuerza $\vec{P}$' que estaría localizada en el centro de la Tierra y, para poder diferenciarla de las demás, hemos desplazado $\vec{N}$ de su línea de acción (hacia la izquierda). Calculemos $\vec{N}$ en las distintas situaciones que se demandan en el enunciado (en todas ellas, para simplificar, supondremos un valor absoluto para g de 10 m/s^2):

a) Asciende con una aceleración de 2 m/s^2

$\vec{P}$ = (0, -mg)
$\vec{F}_{res}$ = (0, ma)

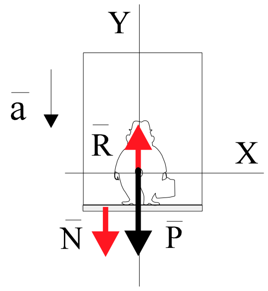
$\vec{N}$ = $\vec{P}$ - $\vec{F}_{res}$ = (0, -mg) - (0, ma) = (0, - mg - ma)

$\vec{N}$ = (0, -800-160) = (0, -960) N $\rightarrow$ N = 960 N



En este caso, la persona ejerce sobre el suelo una fuerza mayor que su peso. Todos hemos podido notar este efecto cuando un ascensor inicia la subida (acelera hacia arriba). En esos momentos notamos como presionamos sobre el suelo con más intensidad de la habitual (como consecuencia de que estamos ejerciendo mayor fuerza).

b) Desciende con una aceleración de 2 m/s^2



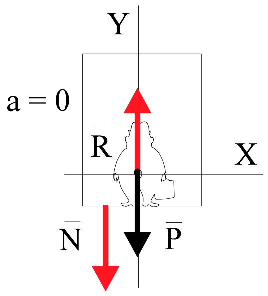
$\vec{P}$ = (0, -mg)
$\vec{F}_{res}$ = (0, -ma)

$\vec{N} = \vec{P} - \vec{F}_{res}$ = (0, -mg) - (0, -ma) = (0, -mg + ma)

$\vec{N}$ = (0, -640) N $\rightarrow$ N = 640 N

Ahora, la persona ejerce sobre el suelo una fuerza menor de lo que pesa. Todos hemos podido notar este efecto cuando un ascensor inicia el descenso (acelera hacia abajo). En esos momentos notamos como presionamos sobre el suelo con menos intensidad de la habitual

c) Asciende con una rapidez constante de 3 m/s



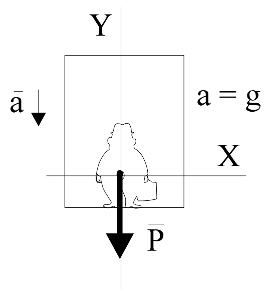
$\vec{P}$ = (0, -mg)
$\vec{F}_{res}$ = 0

$\vec{N} = \vec{P}$ = (0, -mg) = (0, -800) N $\rightarrow$ N = 800 N

Como el ascensor lleva un movimiento rectilíneo y uniforme, el valor de la fuerza que hace la persona sobre el suelo del ascensor coincide numéricamente con el valor de la fuerza peso, aunque, insistimos, no se trata de la misma fuerza.

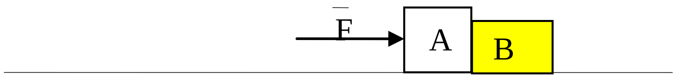
d) Cae libremente al romperse el cable

Podemos utilizar el resultado del apartado b, según el cual $\vec{N}$ = (0, - mg + ma) sin más que sustituir a por g, con lo que nos queda que: $\vec{N}$ = 0, es decir, en este caso la persona no haría ninguna fuerza sobre el suelo del ascensor, "flotaría" sobre el suelo de la cabina, aunque, naturalmente, sigue siendo atraída por la Tierra con la misma fuerza $\vec{P}$. (Se encontrará en una situación de caída libre). Así pues, en este caso:



N = 0

10. En la figura adjunta se muestran dos cuerpos que se encuentran sobre una superficie plana sin rozamiento. Ambos se hallan inicialmente en reposo el uno junto al otro. Se ejerce entonces una fuerza F sobre el objeto A tal y como se muestra en la figura. Explicad a continuación cuál de las siguientes propuestas es correcta:



a) La fuerza que actuará sobre B será menor que F
b) La fuerza que actuará sobre B tendrá el mismo valor que F
c) La fuerza que actuará sobre B será mayor que F

Una respuesta precipitada podría llevarnos a señalar la propuesta b) como correcta, pensando que si el bloque A es bastante rígido, lo único que hará será transmitir la fuerza que se haga sobre él al bloque B que está justo a su lado. Sin embargo, si reflexionamos un poco nos daremos cuenta de lo incorrecto de esta apreciación.

Pensad que ocurriría con la aceleración con que se movería cada bloque si la fuerza que actuase sobre B tuviese el mismo valor que la que actúa sobre A.

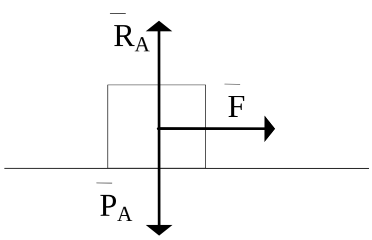
En efecto, si la misma fuerza que actúa sobre el A actuase también sobre el B, como las masas de ambos son distintas, también lo serían las aceleraciones, lo que haría que éstos se separasen y dejasen de estar en contacto, en cuyo caso A ya no podría "transmitir" la fuerza $\vec{F}$ a B.

De acuerdo con el razonamiento anterior, conviene que analicemos lo que ocurre con más detalle:

Consideremos, en primer lugar, *el efecto que tendría* $\vec{F}$ *sobre A en el supuesto de que no existiese B.*

En ese caso, las fuerzas actuantes sobre el cuerpo A serían la fuerza $\vec{F}$, el peso $\vec{P}_A$, y la fuerza normal $\vec{R}$ que le ejerce la superficie, de modo que la resultante sería la suma de esas tres fuerzas:

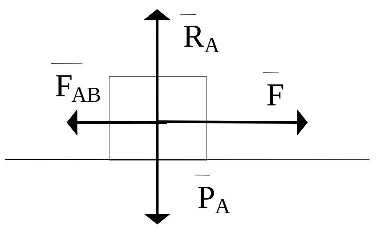
$\vec{F}_{res} = \vec{F} + \vec{P}_A + \vec{R}_A = \vec{F}$ (ya que $\vec{P}_A$ y $\vec{R}_A$ se anulan entre si)

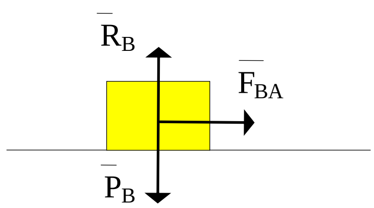


es decir, a todos los efectos sería como si sobre A solo actuase la fuerza $\vec{F}$. Como consecuencia este experimentaría una aceleración: $\vec{a} = \vec{F}/m$, que le produciría una velocidad $\vec{v}$ en la misma dirección y sentido que $\vec{F}$ y cuyo módulo iría aumentando.

Veamos ahora lo que sucederá si, tal y como se especifica en el enunciado, al lado de A y en contacto con él existe otro bloque B.

La acción de $\vec{F}$ se ejerce únicamente sobre A, pero en cuanto A comience a desplazarse se encontrará con B y le ejercerá una fuerza que llamaremos $\vec{F}_{BA}$ (fuerza que sobre B hace A). De acuerdo con el principio de acción-reacción, al mismo tiempo B hará otra fuerza de igual módulo pero sentido contrario sobre A, que llamaremos $\vec{F}_{AB}$, y por tanto en la interacción entre ambos bloques se cumplirá que $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$. El efecto total, será que los dos cuerpos se desplazan hacia la derecha manteniéndose en todo instante juntos (con la misma aceleración). En este caso, las fuerzas que actúan sobre cada uno son:





y la resultante sobre cada uno de ellos será:

Sobre A: $\vec{F}res_A = \vec{F} + \vec{F}_{AB} + \vec{P}_A + \vec{R}_A = \vec{F} + \vec{F}_{AB}$

Sobre B: $\vec{F}res_B = \vec{F}_{BA} + \vec{P}_B + \vec{R}_B = \vec{F}_{BA}$

por lo que la aceleración vendrá dada por: $\vec{a}_A = \dfrac{\vec{F} + \vec{F}_{AB}}{m_A}$ y $\vec{a}_B = \dfrac{\vec{F}_{BA}}{m_B}$

y, como sabemos, estas dos aceleraciones han de ser iguales, ya que ambos bloques se moverán conjuntamente hacia la derecha (no existe rozamiento).

Analizad los resultados obtenidos hasta aquí y extraer conclusiones respecto a las proposiciones que se plantean en el enunciado.

Podemos resumir los razonamientos anteriores en las siguientes conclusiones:

1ª) El cuerpo A se desplaza con una aceleración menor de lo que lo haría si no estuviese B. Dinámicamente la existencia de B se manifiesta en A por la existencia de una nueva fuerza $\vec{F}_{AB}$ opuesta a $\vec{F}$, que hace que la aceleración de A sea menor.

2ª) El cuerpo B se desplaza con la misma aceleración que A, por la actuación sobre él , no de la fuerza $\vec{F}$ (que solo actúa sobre A), sino de la fuerza $\vec{F}_{BA}$, que aunque sea consecuencia de haber actuado $\vec{F}$ sobre A, no es la misma fuerza (sus agentes son distintos y ni siquiera tienen el mismo valor). De hecho, si $\vec{F}_{BA}$ fuese igual a $\vec{F}$, implicaría que:

$$\vec{F}res_A = \vec{F} + \vec{F}_{AB} = \vec{F} - \vec{F}_{BA} = 0$$

Es decir, que A no aceleraría y, como se encuentra inicialmente en reposo, no se movería, cosa que no es cierta. Por otra parte, si $\vec{F}_{BA}$ fuese mayor que $\vec{F}$ ello implicaría que la fuerza resultante sobre A, $\vec{F}res_A = \vec{F} + \vec{F}_{AB}$, iría hacia la izquierda (porque son dos fuerzas en sentido contrario y F_{AB} sería mayor que F), con lo que A comenzaría a moverse en ese sentido, cosa que, evidentemente tampoco es cierta.

3ª) La fuerza que actúa sobre B es menor que la fuerza aplicada a A, como podemos ver si igualamos las aceleraciones y operamos:

$$\frac{\vec{F} + \vec{F}_{AB}}{m_A} = \frac{\vec{F}_{BA}}{m_B} \rightarrow \frac{\vec{F} - \vec{F}_{BA}}{m_A} = \frac{\vec{F}_{BA}}{m_B} \rightarrow m_B \cdot \vec{F} = m_A \vec{F}_{BA} + m_B \vec{F}_{BA} \rightarrow \mathbf{\vec{F}_{BA}} = \frac{\mathbf{m_B}}{\mathbf{m_B + m_A}} \cdot \mathbf{\vec{F}}$$

11. Sobre un cuerpo de 2 kg de masa, inicialmente en reposo, actúa una fuerza resultante (incluyendo el peso) variable con el tiempo: F=10-2t, según el eje OX (+). Calculad su cantidad de movimiento.

Sabemos que la fuerza resultante está relacionada con la cantidad de movimiento mediante la expresión:

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

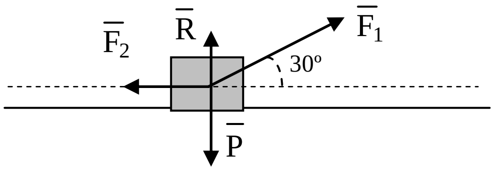
Para resolver este ejercicio bastará con utilizar dicha expresión teniendo en cuenta los datos presentes en el enunciado.

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow d\vec{p} = \vec{F}_{res} \cdot dt \rightarrow \int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} d\vec{p} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_{res} \cdot dt$$

Como el movimiento transcurre en el eje X y sabemos que en $t_0 = 0$ el cuerpo se hallaba en reposo (con lo que la cantidad de movimiento inicial es nula), podemos trabajar solo en dicho eje, con lo que la expresión anterior queda como:

$$\int_0^{p_x} dp = \int_0^t (10 - 2t) \cdot dt \rightarrow p_x = (10t\text{-}t^2) \quad \text{o bien:} \quad \vec{p} = (10t\text{-}t^2, 0 , 0)$$

12. Un bloque de 450 kg de masa se encuentra en reposo sobre un plano horizontal, cuando comienzan a actuar sobre él las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ de módulos 7000 N y 4000 N respectivamente, tal y como se indica en la figura. Suponiendo el rozamiento despreciable, se pide:



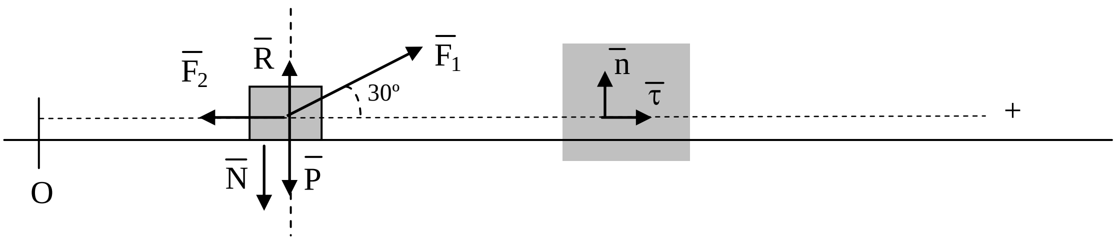
a) Distancia que habrá recorrido al cabo de 5 s de actuar dichas fuerzas.
b) Valor de la fuerza normal que el bloque ejerce sobre el suelo.

En este problema tenemos un cuerpo, que está inicialmente en reposo y se le somete a la acción de diversas fuerzas constantes, por lo que irá aumentando su velocidad en la dirección y sentido de la fuerza resultante, según una trayectoria rectilínea.

En aquellos casos en los que, como éste, la trayectoria sea conocida de antemano (**sea o no rectilínea**) es más cómodo trabajar utilizando las componentes intrínsecas de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Para ello conviene seguir los siguientes pasos:

1º) Realizar un esquema detallando la trayectoria y todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.
2º) Tomar un origen "O" en un punto cualquiera de la trayectoria y escoger (arbitrariamente) un sentido como positivo.
3º) Dibujar los vectores unitarios tangencial $\vec{\tau}$ y normal $\vec{n}$. Recordemos que dichos vectores están centrados en el cuerpo (aunque los dibujemos desplazados por claridad visual) y que $\vec{\tau}$ **siempre** ha de ser tangente a la trayectoria y en sentido positivo, mientras que $\vec{n}$ **siempre** ha de ser perpendicular a la trayectoria y sentido hacia el centro de la curva (si es recta da igual el sentido en que se dibuje).
4º) Descomponer la ecuación fundamental de la dinámica $\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}$ en dos ecuaciones escalares según las componentes intrínsecas, es decir: $F_{res\ t} = m \cdot a_t$ y $F_{res\ n} = m \cdot a_n$ y trabajar después con dichas ecuaciones.

En el problema que nos ocupa un posible esquema podría ser el siguiente:



Dado que todas las fuerzas que actúan a lo largo de la trayectoria son constantes, el tipo de movimiento del cuerpo será uniformemente acelerado (si la componente tangencial de la fuerza resultante es constante, la aceleración tangencial también lo será). Por tanto, para calcular el desplazamiento que nos piden, bastará hallar primero la aceleración tangencial y a continuación aplicar las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado. En cuanto a la aceleración normal, al tratarse de una trayectoria rectilínea, vale 0.

$F_{res\ t} = m \cdot a_t \rightarrow \quad F_{1t} + F_{2t} + R_t + P_t \; = \; F_1 \cdot \cos\alpha - F_2 = m \cdot a_t \qquad (1)$
$F_{res\ n} = m \cdot a_n \rightarrow \quad F_{1n} + F_{2n} + R_n + P_n \; = \; F_1 \cdot \operatorname{sen}\alpha + R - P = 0 \qquad (2)$

a) Despejando a_t de la primera ecuación obtenemos que: $a_t = \dfrac{F_1 \cdot \cos\alpha - F_2}{m}$ = 4’6 m/s^2

Sustituyendo en $\Delta e = \dfrac{1}{2} a_t \cdot t^2$ obtenemos finalmente Δe = 57’5 m

b) En cuanto al valor de la fuerza normal $\vec{N}$ que ejercerá el bloque sobre el suelo, según el principio de acción y reacción, el módulo de dicha fuerza deberá coincidir con el de la fuerza normal $\vec{R}$ que el suelo hace sobre él, por tanto, de (2):

R = P - F_1·sen α y sustituyendo: R = 450 · 9’8 – 7000 · 0’5 = 910 N → N = 910 N

13. Se quiere determinar el coeficiente de rozamiento entre una caja y un tablón, elevando poco a poco el tablón y observando cuándo comienza a deslizar la caja. Al realizar la experiencia, se observa que la caja empieza a deslizar cuando la inclinación del tablón es de 28°. ¿Qué valor presenta el coeficiente de fricción?

Veamos, en primer lugar, las fuerzas que actúan sobre la caja. Ésta interacciona con el plano y con la Tierra, por lo que sobre ella se ejercen las siguientes fuerzas: fuerza de rozamiento $\vec{F}_{\text{roz}}$, fuerza peso $\vec{P}$, y la fuerza normal que ejerce el plano $\vec{R}$. Sumando las tres, obtendremos la fuerza resultante sobre la caja:

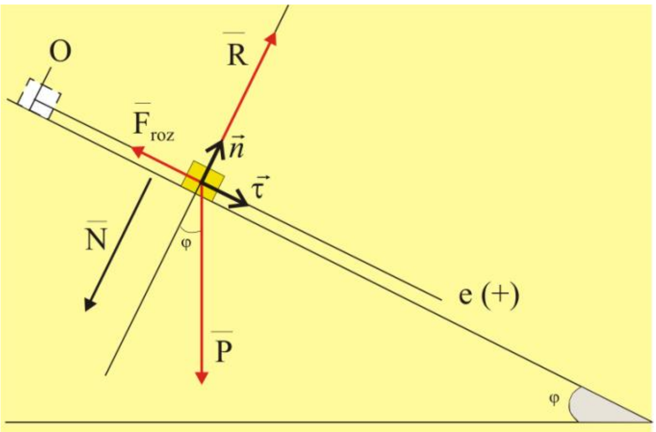
$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_{\text{roz}} + \vec{P} + \vec{R}$$

¿Qué le puede suceder a la caja al dejarla en reposo sobre el plano?

a) Que permanezca en reposo, en cuyo caso $\vec{F}_{\text{res}} = 0$.

b) Que descienda siguiendo una trayectoria rectilínea a lo largo del plano, en cuyo caso $\vec{F}_{\text{res}}$ tendrá la dirección del plano y sentido descendente.

En caso de que la caja descienda, se trata de un movimiento de trayectoria conocida, por lo que conviene estudiarlo escalarmente utilizando las componentes intrínsecas de las fuerzas que actúan, tal y como se propone a continuación:



Expresad todas las fuerzas que actúan sobre la caja tomando como sistema de referencia el que se indica en la figura

$\vec{P}$ = P cos (90º- φ) $\vec{\tau}$ + P cos (180º - φ) $\vec{n}$ = P sen φ · $\vec{\tau}$ - P cos φ · $\vec{n}$
$\vec{R}$ = R cos 90º · $\vec{\tau}$ + R cos 0º· $\vec{n}$ = R · $\vec{n}$
$\vec{F}_{roz}$= F_{roz} cos 180º · $\vec{\tau}$ + F_{roz} cos 90º · $\vec{n}$ = - F_{roz} · $\vec{\tau}$

Sumando los vectores anteriores obtenemos que:

$\vec{F}_{res}= F_{res\,t} \cdot \vec{\tau} + F_{res\,n} \cdot \vec{n} = (P \text{ sen } \varphi - F_{roz})\, \vec{\tau} + (R - P\cos\varphi)\, \vec{n} = m\cdot \vec{a} = m\,(a_t\cdot\vec{\tau} + a_n\cdot\vec{n})$

y descomponiendo la ecuación anterior en dos según las componentes escalares:

(1) $F_{res\,t}$ = P sen φ- F_{roz} = m·a_t (2) $F_{res\,n}$ = R - P cos φ = m·a_n

En lo sucesivo, obviaremos todos estos pasos y cuando vayamos a resolver un problema mediante tratamiento escalar (en general aquellos en los que la trayectoria sea conocida), procederemos (después de haber especificado el sentido que se toma como positivo) a escribir directamente las ecuaciones correspondientes a las componentes escalares tangencial y normal de la fuerza resultante.

¿Qué información podemos extraer de las ecuaciones (1) y (2) ?

a) Al tratarse de una trayectoria rectilínea, la velocidad no cambia de dirección y, por tanto, la componente normal a_n del vector aceleración, es nula. Introduciendo esta condición en la ecuación (2), nos queda que: R - P cos φ = 0, de donde: **R = P cos φ**.

Una consecuencia directa de esto es que la fuerza de rozamiento máxima cuyo valor es μN, se podrá expresar como: $F_{r\,max}$ = μmgcosφ, ya que R y N tienen el mismo valor absoluto.

b) Si analizamos la expresión (1) P sen φ - F_{roz} = m·a_t nos damos cuenta que:

Si el ángulo φ es muy pequeño, puede ocurrir que P sen φ sea menor que $F_{r\,max}$. En este caso el valor de F_{roz} será inferior al valor máximo μ·N y valdrá lo mismo que P sen φ, de forma que el cuerpo permanecerá en reposo.

Si vamos aumentando el ángulo φ, llegará un momento en que tomará un valor φ_C tal que para dicho valor se cumplirá que P sen φ_C = $F_{r\,max}$ = μ·N. En este caso, $F_{res\,t}$ seguirá siendo nula y la caja permanecerá en reposo, pero bastaría un ligero impulso hacia abajo para que se deslizara con movimiento uniforme. Del enunciado del problema podemos considerar que φ_C es precisamente 28º, con lo que sustituyendo en la expresión anterior podremos hallar fácilmente el coeficiente de fricción: P sen φ_C = μ·N = μ· P cos φ_C → μ = tg φ_C = tg 28º = 0'53.

Si el ángulo se hace mayor que φ_C (φ> φ_C) tendremos que P sen φ > μ·N, es decir, existirá una fuerza resultante tangencial en sentido descendente, que hará que la caja se mueva hacia abajo deslizando por la superficie del plano con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. La aceleración se podría calcular con la expresión (1):

P sen φ - $F_{r\,max}$ = m·a_t

y como $F_{r\,max}$ = μ·N y la fuerza normal N = P cos φ = mg cos φ, nos quedaría que:

a_t = g (sen φ - μ cos φ), expresión que solo podremos aplicar cuando φ> φ_C.

¿Y si en esta última expresión introducimos la condición de que el ángulo sea de 90º?.

Se tendría que la caja no ejercería ninguna fuerza sobre la superficie y caería libremente con la aceleración de la gravedad ($a_t = g$).

14. Si dejamos en libertad un cuerpo de 4 kg de masa sobre un plano inclinado de 30^0 y a una altura de 5 m, llega a la base del plano con una rapidez de 8 m/s. Determinad el coeficiente de fricción y el valor F de la fuerza que deberíamos hacer sobre dicho cuerpo, en dirección perpendicular al plano para que llegase a la base con una rapidez de 2 m/s.

En este ejercicio hay dos movimientos a diferenciar:

a) Cuando dejamos el cuerpo sobre el plano y desciende (el ángulo es superior al crítico). En este caso, como ya hemos razonado en el ejercicio anterior, el cuerpo descenderá con movimiento uniformemente acelerado de aceleración: $a_t = g$ (senφ **-** μ cos φ). Vemos que el valor de la aceleración depende del valor del coeficiente de fricción. Si, como sucede en este caso, nos piden el valor de dicho coeficiente, bastará conocer el valor a_t y sustituirlo en:

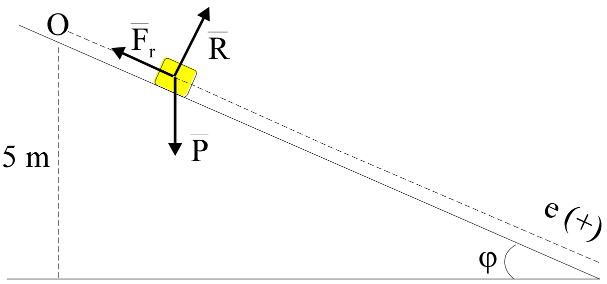
$$\mu = \mathrm{tg}\varphi - \frac{a_t}{g \cdot \cos\varphi}$$

¿Cómo podríamos calcular a_t?

Al tratarse de un movimiento uniformemente acelerado del que conocemos que, partiendo del reposo, el móvil alcanza una rapidez de 8 m/s tras desplazarse 10 m (distancia hasta la base), podemos obtener sus ecuaciones y con ellas tratar de calcular a_t:

En efecto, si consideramos que $t_0 = 0$, $v_0 = 0$ y $e_0 = 0$ (según el sistema referencial de la figura adjunta), tenemos que:

$v = a_t \cdot t$
$e = a_t \cdot t^2/2$



De la primera ecuación obtenemos: $t = v/a_t$ y sustituyendo ahora en la segunda: $a_t = \dfrac{v^2}{2e}$

Imponiendo ahora la condición de que en cierto instante t, el móvil tiene una rapidez de 8 m/s y ocupa una posición tal que su espacio es de 10 m, nos queda:

$a_t = \dfrac{v^2}{2e} = \dfrac{64}{2 \cdot 10} = 3'2 \ \dfrac{m}{s^2}$ como valor de la aceleración tangencial con la que desciende.

Si ahora sustituimos este valor en la expresión de μ, obtenemos:

$$\mu = \text{tg}30^o - \frac{3'2}{10 \cdot \cos 30^o} = 0'21$$

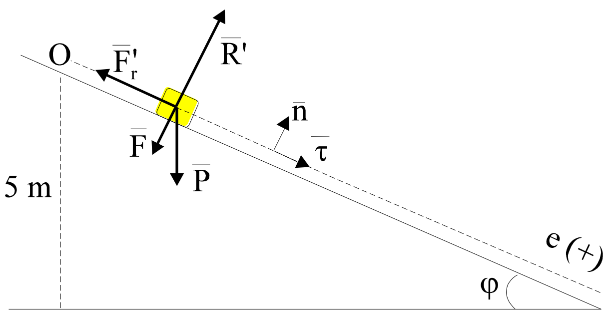
b) Cuando dejamos el cuerpo sobre el plano pero presionamos sobre él con una fuerza F perpendicular al plano y desciende pero llegando a la base con una rapidez menor que anteriormente.

¿Cuál puede ser el efecto de esta fuerza? ¿Por qué hace que el cuerpo llegue abajo con menos rapidez que antes?

En primer lugar, hemos de tener en cuenta que esta fuerza no altera el valor del coeficiente de fricción (que seguirá siendo, por tanto, 0'21, ya que éste solo depende de la naturaleza de las superficies puestas en contacto). Por otra parte, la fuerza se ejerce en dirección normal al plano, por lo que al actuar según $\vec{n}$ no podrá influir directamente en el valor de la aceleración tangencial, pero, sin embargo, sí que aumentará el valor máximo de la fuerza de rozamiento por deslizamiento que actúa sobre el cuerpo (porque hará que aumente la fuerza normal $\vec{N}$ que el cuerpo ejerce sobre la superficie del plano) y, como consecuencia, este efecto hará que disminuya la aceleración tangencial con que desciende el cuerpo. De hecho, si el coeficiente de fricción pudiera ser nulo, la fuerza que estamos considerando no tendría ningún efecto sobre la aceleración tangencial (ya que por grande que fuese N, no habría fuerza de rozamiento).

¿Cómo podríamos calcular el valor de F que nos piden?

Para hacer un estudio cuantitativo de la situación, podemos considerar las fuerzas que actúan en este caso (ver figura adjunta) y expresar la ecuación fundamental de la dinámica en componentes intrínsecas:



$F'_{res\,t} = P \text{ sen } \varphi - F'_r = m \cdot a'_t$ (1)
$F'_{res\,n} = R' - P \cos \varphi - F = m \cdot a'_n$ (2)

Al ser la trayectoria rectilínea, $a'_n = 0$, y como el cuerpo desliza, el valor de la fuerza de rozamiento será el máximo, de manera que $F'_r = \mu \cdot N = \mu \cdot R'$. Sustituyendo en las ecuaciones (1) y (2), obtenemos:

$mg \text{ sen } \varphi - \mu \cdot R' = m \cdot a'_t$ (3)
$R' = mg \cos \varphi + F$ (4)

La ecuación (3) nos da la aceleración a'_t y sustituyendo en ella el valor de R' dado por (4) y despejando a'_t :

$a'_t = g\,(\text{sen}\varphi - \mu \cos\varphi) - \mu\cdot F/m \;\rightarrow\; \mathbf{a'_t = a_t - \mu\cdot F/m}$

Determinando a'_t de forma análoga a como obtuvimos a_t, obtenemos que $a'_t = 0'2\ m/s^2$ (que, como vemos es menor que el valor anterior) y sustituyendo en la ecuación anterior, podemos calcular fácilmente el valor de F que se nos pide, resultando ser F = 56'8 N.

Si nos detenemos en *analizar la última expresión obtenida*, nos podemos dar cuenta de que además de ser dimensionalmente homogénea, el valor de a'_t es constante y depende de la fuerza F que se ejerza, de modo que cuanto mayor sea F con menor aceleración descenderá el cuerpo. Además contempla algunos casos evidentes, como que si F valiese 0, se obtendría $a'_t = a_t$, y también, que si F fuera 0 y $\varphi = 90º$ (caída libre) $a'_t = g$, etc.

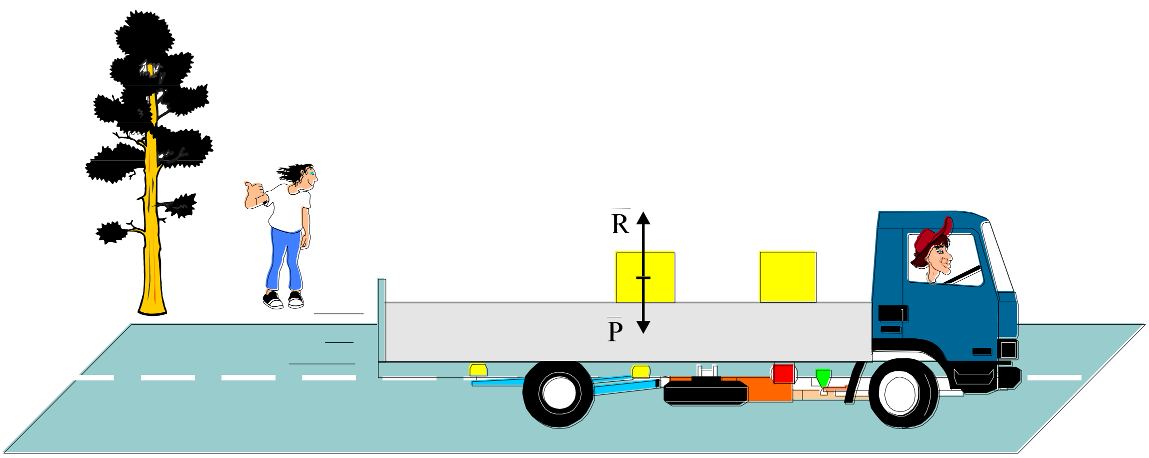
15. Un cuerpo de 2 kg de masa se lanza con una rapidez de 6 m/s desde la base de un plano inclinado de 5 m de longitud y 3 m de altura. Sabiendo que el coeficiente de fricción es 0'6, se pide:

a) Altura máxima que alcanzará
b) Razonad si bajará o no.
c) En caso de que baje, calculad cuánto tardaría en llegar a la base.

sol: a) h_{max} = 1m ; b) Si, porque… ; c) t = 1'67 s

16. Un camión va cargado con cajas llenas de huevos. El coeficiente de rozamiento entre las cajas y el suelo del camión es 0'3. Suponiendo que el camión se mueve a 72 km/h, calculad la distancia mínima en que puede detenerse, frenando de manera uniforme, para que las cajas no deslicen.

Supongamos que un observador en reposo situado fuera del camión, pudiera observar lo que le ocurre a una de las cajas.



¿Qué es lo que diría respecto a las fuerzas que actúan sobre la caja mientras el camión (y la caja) se alejan de él con velocidad constante?

Si la caja se aleja del observador con velocidad constante (la misma que la del camión), es porque sobre ella la fuerza resultante es nula y como sobre la caja actúan $\vec{P}$, $\vec{R}$ y, quizás, la $\vec{F}_{roz}$, deberá cumplirse: $\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{roz} = 0$. Como $\vec{F}_{roz}$ es perpendicular a $\vec{P}$ y $\vec{R}$, la única posibilidad es que $\vec{P}$ y $\vec{R}$ se anulen y $\vec{F}_{roz} = 0$. En esta situación, si el coeficiente de fricción entre la caja y la superficie sobre la que se encuentra fuese nulo, y el camión frenase, el observador externo vería que dicha caja continuaría con la misma velocidad que llevaba, solo que como el camión iría cada vez más despacio, la caja deslizaría por la superficie hasta chocar finalmente con la cabina. No importará "lo suave" de la frenada, porque la velocidad de la caja no disminuiría nada.

No obstante, en la realidad, sabemos que si el camión frena con la suavidad suficiente, es posible que la caja no se mueva respecto a la superficie donde se halla (no deslice).

¿Cómo se explicaría este hecho?

Que la caja no se mueva respecto al suelo del camión cuando éste frena, quiere decir que llevará la misma aceleración que el camión, es decir, que su velocidad respecto del observador exterior irá cambiando de la misma forma que lo hace la del camión. Ahora bien: si la velocidad de la caja disminuye de valor, tiene que haber una fuerza resultante en sentido contrario al movimiento. Dicha fuerza no puede ser otra que la fuerza de rozamiento entre la caja y el suelo del camión, que impide que ésta continúe moviéndose hacia la derecha a 72 km/h cuando el camión frena (como haría si no hubiese fricción). Así pues, cuando el camión frena, según el observador exterior, sobre la caja actuarán tres fuerzas de modo que: $\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{roz}$. Como la trayectoria es rectilínea, no existe aceleración normal con lo que: $\vec{P} + \vec{R} = 0$, y la fuerza resultante sobre la caja es la fuerza de rozamiento. Podemos tratar el problema de forma escalar y escogiendo como sentido positivo el del movimiento, escribir:

(1) $F_{res\ t} = m \cdot a_t \rightarrow - F_{roz} = m \cdot a_t$

(2) $F_{res\ n} = m \cdot a_n \rightarrow R - P = m \cdot a_n = 0$

¿Cuál será la máxima aceleración que podrá llevar la caja?

En principio, supondremos que el camión puede frenar con cualquier aceleración, pero la de la caja vendrá limitada por el máximo valor que puede presentar la fuerza de rozamiento entre ella y la superficie donde se encuentra, de manera que:

$$\mathbf{a_{max} = - F_{r\,max}/m = - \mu \cdot N/m}$$

¿Cómo podemos calcular N?

De la ecuación (2) despejamos R y nos queda R = P. Como R = N (principio de acción y reacción) obtenemos que N = P = mg, con lo que:

$$\mathbf{a_{max} = - \mu \cdot N/m = - \mu \cdot mg/m = - \mu\, g}$$

Razonad que le ocurriría a la caja si la aceleración con que "frenase" el camión (en valor absoluto) fuese: a) mayor que $\mu\, g$; b) menor que $\mu\, g$; c) igual a $\mu\, g$

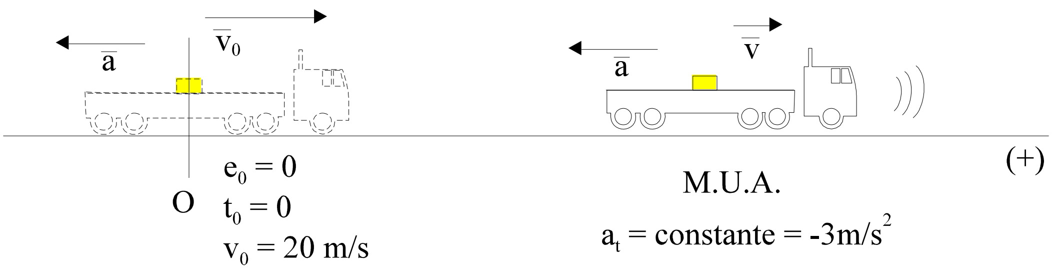
a) Si el camión frena con una aceleración $a_t > \mu$ g la rapidez de la caja no podrá disminuir tan aprisa como la del camión y, por tanto, la caja se verá desplazada deslizando hacia adelante. (Nosotros mismos notamos este efecto cuando estamos en un autobús y éste disminuye bruscamente de velocidad). La fuerza de rozamiento sobre la caja tomaría su valor máximo, sin sobrepasarlo por grande que fuese la aceleración con que frenase el camión.

b) Si el camión frena con una aceleración $a_t < \mu$ g , la caja para a la vez que el camión y no deslizará. La fuerza de rozamiento toma un valor inferior al máximo μ N .

c) Si el camión frena con una aceleración $a_t = \mu$ g, la caja tampoco desliza pero se encuentra en una situación límite ya que se trata de la máxima aceleración que puede llevar. Si el camión aumenta más su aceleración de frenado, la de la caja seguirá valiendo μ g y, en consecuencia deslizará adelantándose (caso a).

¿Cómo podemos calcular la menor distancia posible que precisará el camión para pararse sin que deslicen las cajas en su interior?

Cuanto mayor sea (en valor absoluto) la aceleración con que frena el camión, menos distancia recorrerá hasta pararse, luego la mínima distancia que necesitará para asegurarse de que las cajas no deslizan, vendrá determinada por la distancia correspondiente a una aceleración de frenado $a_t = \mu$ g. Podemos saber cuánto vale dicha distancia si consideramos que se trata de un movimiento uniformemente acelerado (a_t es constante) y manejamos las ecuaciones correspondientes. Para ello podemos considerar como origen de espacios y tiempos el lugar e instante en que comienza a frenar y sentido positivo (como ya hemos dicho) el del movimiento, con lo que:



$v = v_0 + a \cdot (t-t_0) \rightarrow v = v_0 - \mu\, g \cdot t$
$e = e_0 + v_0\,(t - t_0) + 1/2\, a\,(t - t_0)^2 \rightarrow e = v_0 \cdot t - 1/2\, \mu\, g \cdot t^2$

En las ecuaciones anteriores, como $a_n = 0$, hemos hecho $a_t = a$. La distancia recorrida coincidirá, en este caso, con el valor de e en el instante en que se pare el camión. Dicho instante lo podemos obtener haciendo v = 0 en la primera de las ecuaciones anteriores, de modo que:

$0 = v_0 - \mu\, g \cdot t \rightarrow t = v_0 / \mu\, g$. Sustituyendo en la segunda ecuación nos queda:

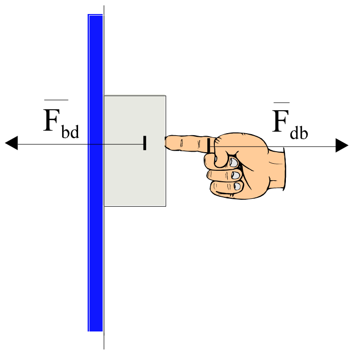
$$e = v_0 \cdot \frac{v_0}{\mu g} - \frac{1}{2}\mu g \cdot \frac{v_0^2}{(\mu g)^2} \rightarrow \boxed{e = \frac{v_0^2}{2\mu g}} \rightarrow e = 20^2 / 2 \cdot 0'3 \cdot 10 = 400/6 = 66'7 \text{ m.}$$

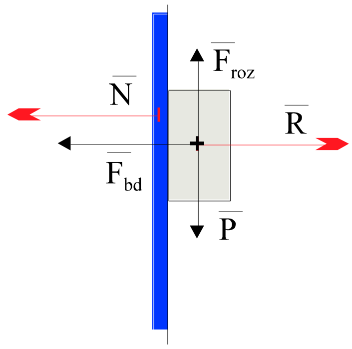
Analizad el resultado literal anterior

En primer lugar, observemos que se trata de una ecuación dimensionalmente homogénea (L en ambos lados del signo igual).

En segundo lugar nos podemos dar cuenta de que cuanto mayor sea la rapidez inicial del camión, a igualdad de los restantes factores, más distancia necesitará para pararse, pero además, el resultado obtenido muestra que como v_0 está elevada al cuadrado, cuando la rapidez inicial se duplique, la distancia necesaria para parar se cuadruplicará. Es por ello que resulta de la mayor importancia guardar una distancia mínima de seguridad entre los vehículos. Por otra parte, también se puede comprobar que si el rozamiento entre la caja y el camión disminuye la distancia mínima necesaria para pararse sin que la caja deslice aumentará y que en el caso hipotético de que no hubiese ningún rozamiento dicha distancia mínima sería infinita, o lo que es lo mismo: en ese caso ideal, por muy lento que frenase, no podría evitar que las cajas deslizaran.

17. Apoyamos, sobre la pizarra, un borrador de 200 g y con un dedo aplicamos una fuerza horizontal (en sentido de la pizarra). Determinad el mínimo valor de la fuerza que permitiría que el borrador no cayera. ¿Qué sucedería si aplicásemos una fuerza doble de la evaluada? (Coeficiente de fricción pizarra-borrador μ = 1’2).





De acuerdo con el principio de acción y reacción, la fuerza que sobre el borrador hace el dedo $\vec{F}_{bd}$ tendrá el mismo módulo y sentido contrario que la fuerza $\vec{F}_{db}$ que sobre el dedo hace el borrador $\vec{F}_{bd} = - \vec{F}_{db}$. Lo mismo ocurrirá con la fuerza normal $\vec{N}$ que el borrador ejerce sobre la pizarra y la fuerza normal $\vec{R}$ que la pizarra hace sobre el borrador. Las fuerzas actuantes sobre el borrador serán, en principio, $\vec{F}_{bd}$, $\vec{R}$ y la fuerza peso $\vec{P}$. Como el único movimiento posible para el borrador es que deslice hacia abajo, no podrá existir aceleración horizontal, deberá cumplirse que la resultante según la horizontal sea nula: $\vec{F}_{bd} + \vec{R} = 0$, y por tanto que: $F_{bd} = R$, o, lo que es lo mismo: $F_{bd} = N$. En estas condiciones, si no existiera ningún “rozamiento” entre borrador y pizarra (es decir, si μ valiese 0), sería imposible evitar que éste cayese debido a la fuerza peso. Sin embargo, sabemos que al apretar el borrador contra la pizarra existirá un cierto “rozamiento” entre ambos objetos, que puede ser suficiente para evitar que el borrador caiga.

¿Cómo podemos interpretar que el borrador no caiga?

La única explicación es que sobre el borrador actúe una fuerza vertical y ascendente que equilibre a la fuerza peso. Dicha fuerza no puede ser otra que la fuerza de rozamiento. Si P es mayor que el valor máximo de la fuerza de rozamiento ($F_{r\ max}$), el borrador cae, pero si no supera dicho valor entonces el borrador no cae y la fuerza de rozamiento toma justamente el valor de P ($F_{roz} = P$).

¿Cuál es el valor máximo de la fuerza de rozamiento?

En el caso de rozamiento por deslizamiento, sabemos que el valor máximo de la fuerza de rozamiento viene dado por la expresión $F_{r\ max} = \mu \cdot N = \mu \cdot R$. Como en este caso, según hemos visto, $R = F_{bd}$ se concluye que $F_{r\ max} = \mu \cdot F_{bd}$. Por tanto, cuanto mayor sea la fuerza que sobre el borrador hace el dedo, mayor será el valor límite de la fuerza de rozamiento y podremos aguantar un borrador más pesado.

¿Cómo podremos hallar el valor mínimo de F_{bd} que permitirá que el borrador no caiga?

Cuando el borrador se mueve (cae) es porque P supera el valor máximo de la fuerza de rozamiento. Como dicho valor viene expresado por: $F_{r\ max} = \mu \cdot F_{bd}$, igualando esta expresión a la fuerza peso, obtendremos el valor que, como mínimo, debe tener la fuerza que hemos de realizar sobre el borrador con el dedo, para que no caiga:

$\mu \cdot F_{bd\ min} = mg \rightarrow \mathbf{F_{bd\ min} = mg/\mu} = 0'2 \cdot 10 / 1'2 = 1'67$ N.

Analizad el resultado literal anterior.

El resultado obtenido es dimensionalmente homogéneo (las dimensiones de una fuerza en ambos lados del signo igual).

Podemos ver que cuanto mayor sea el peso mg del borrador, mayor tendrá que ser la fuerza mínima necesaria para aguantarlo, de manera que si el borrador no pesara, no necesitaríamos hacer ninguna fuerza para mantenerlo en reposo sobre la pizarra. El coeficiente de fricción influye de manera inversa ya que cuanto mayor sea su valor, menor será la fuerza.

Naturalmente, podemos ejercer más fuerza con el dedo sobre el borrador. En este caso no vemos que el borrador se mueva hacia arriba *¿Cómo se explicaría este hecho?*

Porque al hacer sobre el borrador una fuerza F_{bd} mayor que la mínima, el valor de la fuerza de rozamiento no aumenta. Lo que aumenta es el valor máximo que puede tomar la fuerza de rozamiento (aquel para el cual el objeto comienza a deslizarse), de forma que el borrador seguiría en reposo. Lo que sí que conseguiríamos sería aguantar un borrador de mayor peso sin que deslizase. En este sentido podemos plantearnos la siguiente cuestión:

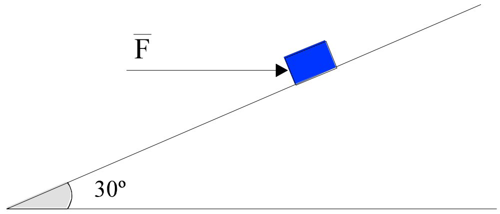
¿Hasta que valor podría aumentar la masa del borrador para que siguiese donde está sin caer, si duplicamos la fuerza mínima calculada anteriormente?

El valor máximo de la fuerza de rozamiento sería ahora $F_{r\ max} = 2 \cdot F_{bd} \cdot \mu$. Conforme fuese aumentando el peso del borrador, la fuerza de rozamiento requerida iría también aumentando (recordemos que la fuerza de rozamiento no tiene un solo valor sino que puede tomar infinitos valores entre 0 y un valor máximo). En cuanto el peso superase el valor máximo que puede tomar dicha fuerza de rozamiento ($2 \cdot F_{bd} \cdot \mu$) el borrador comenzaría a caer. Cuando esto ocurra se cumplirá que:

$2 \cdot F_{bd} \cdot \mu = m' \cdot g \rightarrow m' = 2 \cdot F_{bd} \cdot \mu / g = 2 \cdot 1'67 \cdot 1'2 / 10 = 0'4$ kg (doble que antes).

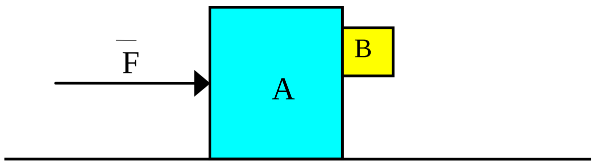
18. Sobre un cuerpo de 5 kg de masa, que se encuentra encima de un plano inclinado de 30°, actúa una fuerza F en la dirección de la figura. Sabiendo que el coeficiente de fricción es 0’3, determinad F para que el cuerpo:

a) Ascienda con movimiento uniforme.
b) Descienda con movimiento uniforme.
c) Descienda con aceleración de 1 m/s²



sol: a) 53’1 N. b) 11’8 N. c) 6'9 N

19. Sobre un bloque A de 10 kg de masa actúa una fuerza $\vec{F}$ tal y como se aprecia en la figura. Si le adosamos un cuerpo B de 2 kg de masa, con el que presenta un coeficiente de fricción de 0’4, determinad el mínimo valor que puede tomar $\vec{F}$ para que B no caiga (el coeficiente de fricción entre A y el suelo vale 0’2).



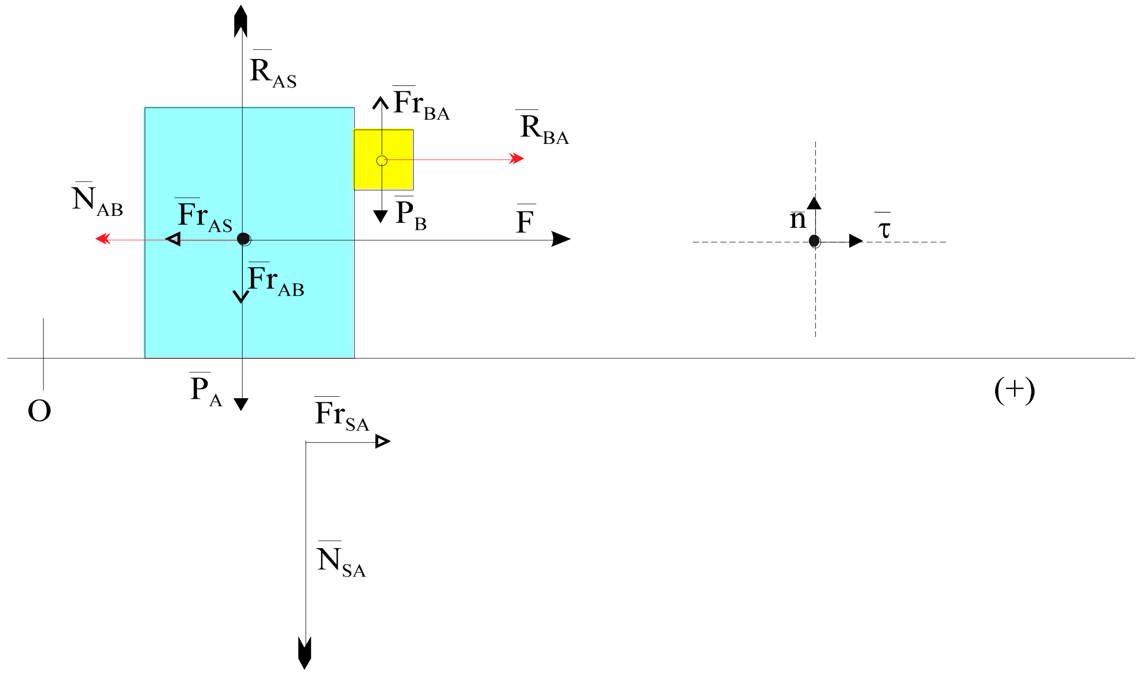
Las interacciones que nos interesa considerar (ved esquema siguiente) son:

Entre los bloques y la Tierra. La Tierra atrae a los bloques con fuerzas $\vec{P}_A$ y $\vec{P}_B$ y es atraída por los bloques con otras fuerzas iguales y de sentido contrario con origen en su centro (que no dibujaremos).

Entre el bloque A y la superficie. El bloque A ejerce una fuerza sobre la superficie y esta a su vez otra fuerza igual y de sentido contrario sobre el bloque. Esta interacción se suele descomponer en dos según la tangente y la normal a la superficie. Hablamos así por una parte, de la fuerza normal $\vec{N}_{SA}$ que el bloque A hace sobre la superficie y su pareja $\vec{R}_{AS}$ o fuerza normal que la superficie hace sobre el bloque A, y, por otra parte, de la fuerza de rozamiento $\vec{F}r_{AS}$ que la superficie ejerce sobre A y su correspondiente pareja $\vec{F}r_{SA}$ del mismo módulo pero sentido contrario que actúa sobre la superficie.

Entre ambos bloques: Si el bloque B no cae, podemos, al igual que se explicó en el párrafo anterior, descomponer la interacción entre A y B en dos. De esta forma nos referiremos a $\vec{R}_{BA}$ como la fuerza según la horizontal que sobre B hace A y a su pareja $\vec{N}_{AB}$ como la fuerza según la horizontal que sobre A hace B. Análogamente, las fuerzas que actuarían según la vertical serían $\vec{F}r_{BA}$ o fuerza de rozamiento que sobre B ejerce la superficie del bloque A y $\vec{F}r_{AB}$. Ambas parejas son del mismo módulo y sentidos contrarios (principio de acción y reacción).

Además de las fuerzas anteriormente descritas, está la fuerza $\vec{F}$ que desde el exterior al sistema se ejerce sobre el bloque A. Podemos representar la situación mediante el siguiente esquema:



Para que el bloque B no caiga, debe haber una fuerza que compense su peso. Esa fuerza no puede ser otra que la fuerza de rozamiento que sobre B hace A. El valor límite o máximo que puede tomar dicha fuerza es, como sabemos, $Fr_{BA} = \mu_{AB} \cdot N_{AB} = \mu_{AB} \cdot R_{BA}$, de modo que si P_B es mayor que este valor máximo el bloque B caerá, y si P_B es inferior a ese valor máximo, entonces la fuerza de rozamiento sobre B vale justamente lo mismo que el peso, y el bloque no cae.

En el problema se nos pide cuánto ha de valer F como mínimo para que el bloque B no caiga. Ello sugiere buscar una relación entre F y Fr_{BA}, partiendo de la hipótesis de que al aumentar F también aumentaría la fuerza normal N_{AB} que el bloque B ejerce sobre el A y, en consecuencia, la fuerza de rozamiento Fr_{BA} sobre el bloque B.

¿Cómo podemos relacionar Fr_{BA} con la fuerza exterior F?

Podemos aplicar la ecuación fundamental de la dinámica a cada uno de los bloques, teniendo en cuenta que ambos se moverán con la misma aceleración tangencial. Para ello expresaremos las fuerzas que intervienen en función de sus componentes intrínsecas, tomando tal y como se indica en la figura, como sentido positivo el del movimiento. En estas condiciones:

Sobre el bloque A:

(1) $F - N_{AB} - Fr_{AS} = m_A \cdot a_t$

(2) $R_{AS} - P_A - Fr_{AB} = m_A \cdot a_{nA}$

Sobre el bloque B:

(3) $R_{BA} = m_B \cdot a_t$

(4) $Fr_{BA} - P_B = m_B \cdot a_{nB}$

El bloque A, que se mueve sobre la superficie y en línea recta, no posee aceleración normal y el bloque B, si no cae y permanece siempre a la misma altura, tampoco.

B deslizará cuando su peso supere el valor máximo que pueda tomar la fuerza de rozamiento ($Fr_{BA} = \mu_{AB} \cdot N_{AB}$). Introduciendo esta condición en la ecuación (4) obtenemos que: $\mu_{AB} \cdot N_{AB} = P_B \rightarrow$ $\mathbf{N_{AB} = P_B / \mu_{AB}}$. Este será el mínimo valor que puede tener N_{AB} (o R_{BA}) para que B no caiga. Si conseguimos, pues, poner F en función de N_{AB}, tendremos resuelto el problema.

Como $R_{BA} = N_{AB}$ (principio de acción y reacción) podemos escribir (3) como: $a_t = N_{AB}/m_B$, sustituir en la ecuación (1) y despejar F:

$$F - N_{AB} - Fr_{AS} = m_A \cdot N_{AB}/ m_B \rightarrow F = (m_A \cdot N_{AB}/ m_B) + N_{AB} + Fr_{AS}$$

Para calcular Fr_{AS}, dado que el bloque A se desliza, aplicamos: $Fr_{AS} = \mu_{AS} \cdot N_{SA}$.
Al ser $N_{SA} = R_{AS}$ (principio de acción y reacción), podemos utilizar la ecuación (2) y obtener haciendo $a_{nA} = 0$ que $N_{SA} = R_{AS} = P_A + Fr_{AB}$. Como Fr_{AB} vale lo mismo que su pareja $Fr_{BA} = \mu_{AB} \cdot N_{AB}$, tenemos que: $N_{SA} = P_A + \mu_{AB} \cdot N_{AB}$ y finalmente que:
$Fr_{AS} = \mu_{AS}\cdot(P_A + \mu_{AB}\cdot N_{AB})$.
Sustituyendo esta última expresión en la que nos proporciona F, obtenemos:

$$F = (m_A \cdot N_{AB}/ m_B) + N_{AB} + Fr_{AS} = (m_A \cdot N_{AB}/ m_B) + N_{AB} + \mu_{AS} \cdot (P_A + \mu_{AB} \cdot N_{AB}).$$

Introduciendo ahora en esta última ecuación la expresión del valor mínimo que puede tomar N_{AB} para que B no caiga (P_B /μ_{AB}), obtendremos el valor mínimo de F que se nos pide en el enunciado:

$$F_{min} = \frac{m_A \cdot m_B g}{\mu_{AB} \cdot m_B} + \frac{m_B g}{\mu_{AB}} + \mu_{AS} \cdot m_A g + \mu_{AS} \cdot \mu_{AB} \cdot \frac{m_B g}{\mu_{AB}}$$ y simplificando nos queda:

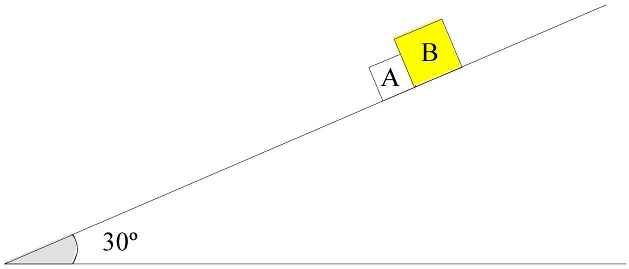
$$\boxed{F_{min} = (m_A + m_B) g \cdot (\frac{1}{\mu_{AB}} + \mu_{AS})} \rightarrow F_{min} = (10 + 2)\cdot 10 \cdot (1/0'4 + 0'2) = 324 \text{ N}$$

Analizad el resultado literal anterior

En primer lugar, hemos de comprobar si es o no dimensionalmente homogéneo. Podemos ver que en ambos lados del signo igual las dimensiones son MLT^{-2} .

En segundo lugar, podemos detenernos en analizar la influencia de algunas de las magnitudes en el resultado final (siempre suponiendo constantes las demás). Así, por ejemplo, cuanto mayores sean las masas de A y B, más grande será el valor de la fuerza horizontal exterior que como mínimo hay que realizar para que B no caiga. Lo mismo ocurre con el valor del coeficiente de rozamiento entre A y la superficie. Sin embargo la influencia del coeficiente de rozamiento entre A y B, como es lógico, es al contrario y podemos ver que cuanto más pequeño sea su valor, más grande tendrá que ser F_{min} , de manera que cuando dicho coeficiente tiende a 0, la fuerza mínima tiende a infinito. Otro factor importante es la gravedad g. El resultado obtenido nos muestra que en ausencia de gravedad (g = 0) no se precisaría ninguna fuerza para mantener a B sin caer.

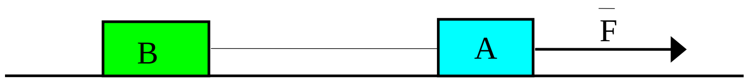
20. A una cierta altura sobre la base del plano se abandonan simultáneamente dos bloques en contacto. Sabiendo que m_B = 2 m_A y que los coeficientes de fricción son respectivamente $\mu_A = \frac{1}{4\sqrt{3}}$ y $\mu_B = \mu_A/2$, se pide:



a) Aceleración con que desciende cada bloque.
b) Fuerza que el bloque B ejerce sobre el A.

sol: a = 4’1 m/s^2 ; $F_{AB} = m_A g/24$

21. Calculad la aceleración del sistema de la figura y la tensión de la cuerda, cuando el valor de F sea de 400 N. Coeficiente de fricción con el suelo μ = 0’4; m_A =20 kg y m_B= 30 kg.



sol: a_t = 4 m/s^2 (tomando como sentido positivo el del movimiento); T = 240 N.

22. Resolved el ejercicio anterior suponiendo que la cuerda tiene una masa de 5 kg.

sol: a_t = 3’64 m/s^2 ; T_A = 247’2 N ; T_B = 229 N .

23. Dos cuerpos (A y B) de masas m_A = 3 kg y m_B =1 kg cuelgan de los extremos de una cuerda, que pasa por la garganta de una polea. Despreciando la masa de la cuerda y de la polea, se pide:

a) Calculad la aceleración con que se mueve el conjunto y la tensión de la cuerda.
b) Si eliminamos la masa de 3 kg y tiramos de la cuerda hacia abajo con una fuerza equivalente al peso de la masa de 3 kg ¿cuánto valdrá entonces la aceleración?

El sistema formado por las dos masas y la cuerda es un sistema que se mueve solidariamente con la misma aceleración. El siguiente esquema representa las fuerzas que actúan sobre las masas A y B. Dichas fuerzas se deben a la interacción de cada una de las masas con la cuerda y con la Tierra.

Como podemos observar, el peso $\vec{P}_A$ tira de la masa A en el sentido que, arbitrariamente, hemos escogido como positivo, mientras que el peso $\vec{P}_B$ lo hace en el contrario.

De acuerdo con el tercer principio de la dinámica, si la cuerda tira del cuerpo A hacia arriba con una fuerza $\vec{T}_A$, este ejercerá sobre la cuerda otra fuerza igual y de sentido contrario $\vec{T}'_A$. Análogamente podemos razonar para el cuerpo B el cual tirará de la cuerda con una fuerza $\vec{T}'_B = -\vec{T}_B$. (En la figura izquierda se han representado las fuerzas que actúan sobre los cuerpos y en la figura derecha las que actúan sobre la cuerda).

Dado que conocemos la trayectoria de cada cuerpo podemos trabajar escalarmente, expresando la fuerza resultante en componentes intrínsecas, y como además, en este caso, todas las fuerzas tienen la dirección de la trayectoria, solo habrá componente tangencial.

En primer lugar, hemos de tener en cuenta que si aplicamos la ecuación fundamental de la dinámica a la masa de la cuerda m_C, tenemos que: $T'_A - T'_B = m_C \cdot a_t = 0$ ya que según se ha dicho, la masa de la cuerda se considera despreciable. Por tanto $T'_A = T'_B = T$ y (de acuerdo con el principio de acción y reacción) $T_A = T_B = T$. (En adelante, cuando se repita esta situación, obviaremos todo este razonamiento).

Podemos ahora aplicar la ecuación fundamental de la dinámica a los cuerpos A y B con el fin de obtener la aceleración con que se moverá el sistema. Como la aceleración tangencial con que se mueve cualquiera de las masas es la misma y no hay aceleración normal para ninguna de ellas, podemos escribir que: $a_{tA} = a_{tB} = a$.

(1) Para el cuerpo A: $P_A - T = m_A \cdot a$
(2) Para el cuerpo B: $T - P_B = m_B \cdot a$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos: $a = \dfrac{P_A - P_B}{m_A + m_B} \rightarrow \boxed{a = \dfrac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \cdot g}$

Finalmente si sustituimos los datos numéricos nos sale: $a = \dfrac{3-1}{3+1} \cdot 10 = 5$ m/s^2. Es decir, que la rapidez con que se mueve A o B aumentará regularmente en 5m/s cada segundo.

A continuación nos detendremos en analizar brevemente el resultado literal obtenido:

Como podemos comprobar, es dimensionalmente homogéneo ya que en ambos miembros del signo igual quedan las dimensiones correspondientes a la aceleración (LT^{-2}).

El resultado también contempla algunos casos límite evidentes, así por ejemplo *¿cuánto debería de valer la aceleración si la masa de B fuese 0?*; está claro que en ese caso, "A" caería libremente con la aceleración de la gravedad y eso es precisamente lo que obtenemos si en el resultado hacemos $m_B = 0$. Otro caso límite evidente es *lo que ocurriría si no hubiese gravedad*; en ese supuesto, la aceleración sería nula aunque las masas fuesen diferentes (tal y como se obtiene haciendo g = 0). El resultado también nos muestra que cuanto mayor sea la diferencia $m_A - m_B$ mayor será el valor de la aceleración a con que se moverán las masas, etc.

¿Cómo podemos calcular el valor T de la tensión de la cuerda?

Para ello basta con que consideremos cualquiera de las ecuaciones (1) o (2) y despejemos T. Así, por ejemplo de la expresión (2) obtenemos que $T = P_B + m_B \cdot a = m_B\,(g+a)$ y sustituyendo los datos numéricos nos queda T = 1 (10+5) = 15 N.

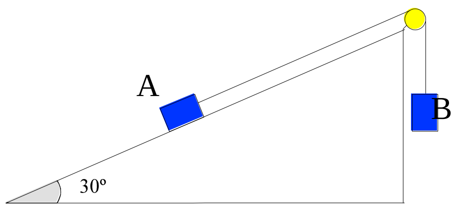
Otra cuestión que se plantea en el enunciado del problema es qué pasaría si en lugar de colgar un peso de 30 N de uno de los extremos de la cuerda, tiramos de él con la mano haciendo una fuerza de 30 N. *¿Obtendríamos el mismo resultado para la aceleración?*

La respuesta es que no, ya que ahora dicha fuerza únicamente aceleraría a la masa m_B de 1 kg, mientras que anteriormente lo hacía con una masa de 4 kg.

En efecto, la aceleración valdría ahora: $a = \dfrac{F - P_B}{m_B} = \dfrac{F - m_B \cdot g}{m_B}$ = 20/1 = 20 m/s^2

Quedan abiertas algunas interrogantes como ¿que pasaría si no considerásemos la masa de la cuerda despreciable? ¿y la de la polea?, que serán tratadas en próximos capítulos.

24. Dado el dispositivo esquematizado en la figura adjunta, sabiendo que el coeficiente de fricción es 0'15 y que cada bloque tiene una masa de 20 kg, determinad el tiempo necesario para que el sistema se desplace 1m, partiendo de una situación inicial de reposo.



sol: t = 1'04 s.

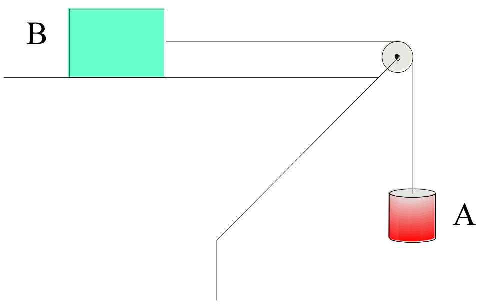
25. Un bloque de 5 kg de masa está sujeto a una cuerda de masa despreciable y es arrastrado hacia arriba mediante ella con una aceleración de 2 m/s^2. Calculad la tensión de la cuerda.

sol: T = 60 N

26. Un péndulo de 200 g de masa cuelga suspendido del techo de un vehículo. Sabiendo que forma un ángulo de 20° con la vertical, determinad la aceleración del vehículo y la tensión del hilo.

sol: a = 3’64 m/s^2 ; T = 2’13 N

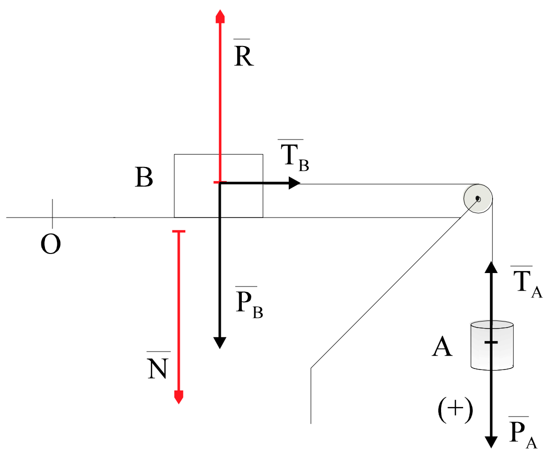
27. En el sistema de la figura adjunta las masas de los bloques son m_A = 2 kg y m_B = 6 kg. Considerando las masas de la polea y de la cuerda despreciables, se pide:



a) Aceleración con que se moverá el sistema y tensión de la cuerda, suponiendo rozamiento nulo entre B y la superficie.
b) ¿Que le ocurriría a la fuerza que tira de B si el peso de A se duplicase?
c) La aceleración, suponiendo que entre el bloque B y la superficie la fricción no es despreciable y el coeficiente de rozamiento vale μ = 0’2.

Si se supone que no hay rozamiento, las fuerzas que actuarán sobre las masas y la superficie de la figura serán:

$\vec{P}_A$ = fuerza con que la Tierra atrae a m_A
$\vec{P}_B$ = fuerza con que la Tierra atrae a m_B
$\vec{R}$ = fuerza normal que el plano hace sobre B.
$\vec{N}$ = fuerza normal que B hace al plano
$\vec{T}_A$ = fuerza con que la cuerda tira de A.
$\vec{T}_B$ = fuerza con que la cuerda tira de B



Como la trayectoria es conocida, podemos calcular el valor de la aceleración mediante un tratamiento escalar. Tomaremos como sentido positivo el del movimiento y aplicaremos la ecuación fundamental de la dinámica a cada una de las masas, expresándola en componentes intrínsecas, teniendo en cuenta que al tener la cuerda una masa despreciable: $T_A = T_B = T$, y que al moverse todo el sistema solidariamente, la aceleración tangencial de cada una de las masas tendrá el mismo valor, que es, precisamente, lo que hay que calcular.

Para la masa A: $F_{res\,t} = m_A \cdot a_t \rightarrow P_A - T = m_A \cdot a_t$

Para la masa B: $F_{res\,t} = m_B \cdot a_t \rightarrow T = m_B \cdot a_t$

$F_{res\,n} = m_B \cdot a_n = 0 \rightarrow R - P = 0 \rightarrow R = P$

En el caso de A no existe ninguna fuerza perpendicular a la trayectoria. En el caso de B existen dos (su peso y la fuerza normal ejercida por la superficie), pero estas se anulan entre sí, ya que la velocidad de B no cambia de dirección (se mueve según una trayectoria rectilínea sobre la superficie).

Sumando las componentes tangenciales de las fuerzas tenemos que:

$$P_A - T + T = (m_A + m_B) \cdot a_t \rightarrow a_t = \frac{P_A}{(m_A + m_B)} = \frac{m_A}{(m_A + m_B)} \cdot g = \frac{2}{2+6} \cdot 10 = 2'5 \text{ m/s}^2$$

Analizad el resultado literal obtenido.

El resultado es dimensionalmente homogéneo (dimensiones de aceleración en ambos miembros) y se cumplen casos límites evidentes, como por ejemplo, que si m_B fuese nula, m_A caería con la aceleración de la gravedad, o que si m_A fuese nula, no habría aceleración.

¿Qué pasaría si m_A fuese mucho más pequeña que m_B ?

Al no existir fuerza de rozamiento, el resultado obtenido nos muestra que por pequeña que fuese la masa de A frente a la de B, el sistema tendría que acelerar (ya que a_t no sería 0), cuestionando así la idea equivocada que tienen algunas personas de que para que B se moviese partiendo del reposo haría falta colgar de la cuerda una masa mayor que m_B.

¿Cómo podríamos calcular la tensión de la cuerda?

Bastaría utilizar cualquiera de las ecuaciones en las que figura T. Así, por ejemplo, en la ecuación $T = m_B \cdot a_t$ si sustituimos los datos numéricos obtenemos T = 6 · 2’5 = 15 N. Al mismo resultado habríamos llegado con la otra ecuación : $P_A - T = m_A \cdot a_t$ despejando T con lo que $T = P_A - m_A \cdot a_t = m_A (g - a_t) = 2 (10-2'5) = 15$ N.

¿Qué ocurriría con la fuerza con que la cuerda tira de B si se duplicase el peso de A?

Una respuesta precipitada a esta cuestión llevaría a afirmar que el valor de dicha fuerza también se duplicaría, pero si reflexionamos un poco, nos daremos cuenta de que no es así, ya que, si bien es cierto que el peso de A se haría el doble, hay que tener en cuenta que, no es $\vec{P}_A$ sino $\vec{T}_B$ la fuerza que tira de m_B. Como $T_B = T = m_B \cdot a_t$ concluimos que, de acuerdo con esta expresión, solo si a_t se hiciese doble, la fuerza que se ejercería sobre B se haría también el doble. Ahora bien: ¿que le ocurre a la aceleración cuando P_A se duplica?

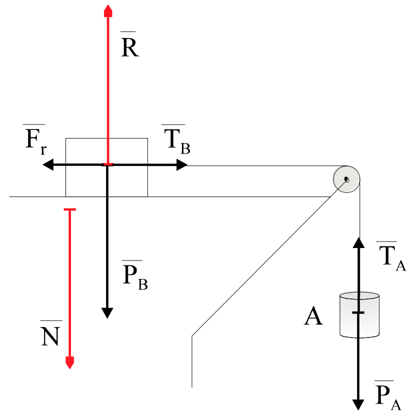
Sabemos que $a_t = \dfrac{P_A}{(m_A + m_B)} = 2'5$ m/s^2 . Si P_A se hace el doble $a'_t = \dfrac{2P_A}{2m_A + m_B} = 4$ m/s^2

Como vemos a'_t no es el doble de a_t y, por tanto, T_B no se duplicaría, sino que valdría:

$T'_B = m_B \cdot a'_t = 6 \cdot 4 = 24$ N

¿Cómo cambiaría el problema si admitimos que entre B y la superficie el rozamiento no es nulo y el sistema se halla inicialmente en reposo?

En ese caso debemos incluir una fuerza de rozamiento horizontal que tira de B hacia la izquierda y comenzar por analizar con los datos del problema si la fuerza que hace la cuerda sobre B supera al valor máximo que puede tomar dicha fuerza de rozamiento (en cuyo caso B se deslizaría hacia la derecha) o no lo supera (en cuyo caso la fuerza de rozamiento sería igual a T_B y el sistema seguiría en reposo).



Sabemos que el valor máximo que puede tomar la fuerza de rozamiento viene dado por: $F_{r\,max} = \mu \cdot N$, como N = R (principio de acción y reacción) y que $R = P_B = m_B\, g$ (ya que $a_n = 0$), por lo que: $F_{r\,max} = \mu \cdot mg$ y sustituyendo $F_{r\,max} = 0'2 \cdot 6 \cdot 10 = 12$ N. Como el peso de A es de 20 N y la tensión de la cuerda es la misma en todos sus puntos, nos queda que la fuerza tangencial resultante sobre el sistema tendría sentido positivo y valdría: $P_A - T_A + T_B - F_r = P_A - F_r = 20 - 12 = 8$ N, con lo que concluimos que el sistema comenzaría a moverse hacia la derecha.

Para hallar la aceleración sobre la trayectoria, podemos partir de la expresión que nos da la fuerza tangencial resultante que actúa sobre el sistema:

$$F_{rest} = (m_A + m_B) \cdot a_t \rightarrow P_A + T - T - F_r = (m_A + m_B) \cdot a_t \rightarrow a_t = \frac{P_A - F_r}{(m_A + m_B)}\ .$$

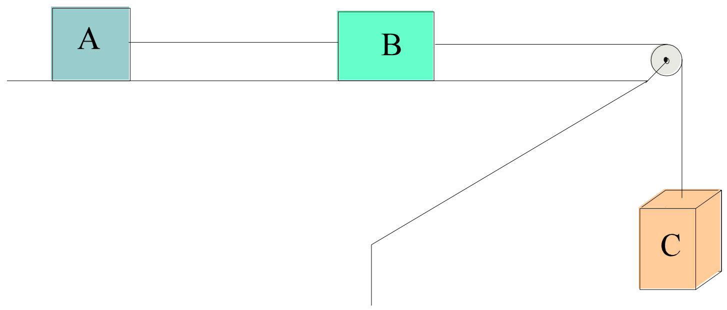
Que podemos expresar como: $\boxed{a_t = \dfrac{(m_A - \mu \cdot m_B)g}{m_A + m_B}}$

y sustituyendo los valores numéricos $a_t = 1$ m/s^2

Si analizamos el resultado obtenido, nos podemos dar cuenta de que, como es lógico, el valor de la aceleración sale menor que cuando no había rozamiento y de que la expresión literal obtenida se transforma en la anterior cuando introducimos en ella la condición de que no exista rozamiento ($\mu = 0$). El hecho de que la aceleración tangencial nos salga positiva, quiere decir que el vector aceleración ($\vec{a}$) tiene el sentido que hemos tomado como positivo.

Otro problema que podemos plantearnos es *averiguar el valor mínimo necesario que debería de tener m_A para que el sistema comenzase a moverse*, ya que como hemos visto, si hay rozamiento, las condiciones cambian y ya no se puede afirmar que m_B se moverá por pequeña que sea la masa de A.

28. Dado el dispositivo de la figura adjunta (m_A = 4 kg, m_B = 6 kg , m_C = 10 kg), considerad el rozamiento y las masas de la cuerda y polea despreciables y calculad:

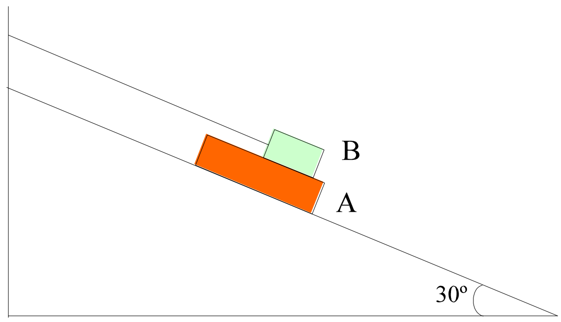


a) Aceleración del sistema
b) Tensión de las cuerdas
c) ¿Cuáles serían los resultados anteriores si hubiera rozamiento entre los bloques y la superficie con un coeficiente μ = 0'4?

sol: a) a_t = 5 m/s^2 ; b) T_1 =50 N ; T_2 =20 N c) a_t = 3m/s^2 , T_1 = 70 N, T_2 = 28 N

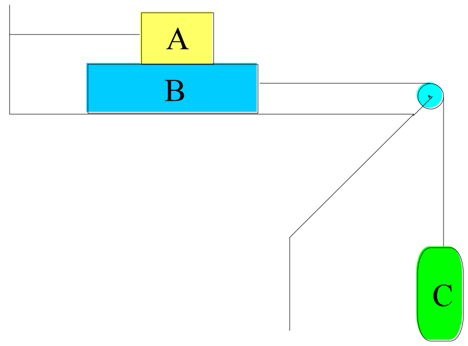
29. Determinad la aceleración con que desciende el cuerpo A y la tensión de la cuerda que sujeta al cuerpo B de la figura (m_A = 20 kg y m_B = 1 kg) en los siguientes casos:

a) No existe rozamiento
b) El coeficiente de rozamiento de A y el plano es 0'2 y el de B con A es 0'5.



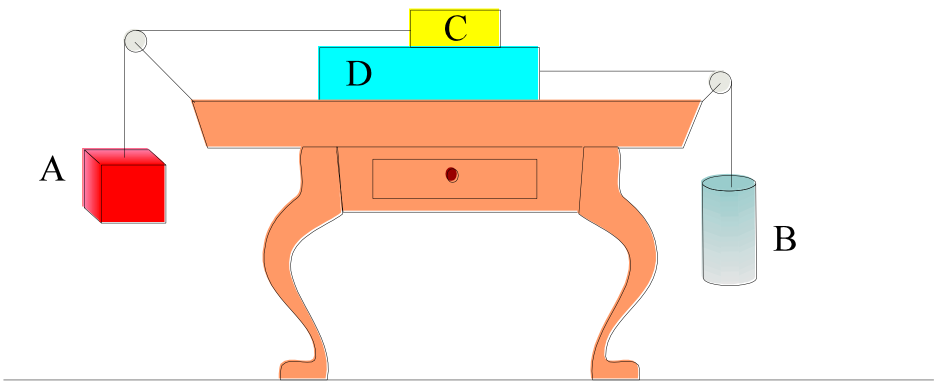
sol: a) a = 5 m/s^2 ; T = 5 N ; b) a = 2'96 m/s^2; T = 9'35 N

30. Calculad la tensión de la cuerda que sujeta al cuerpo A y la aceleración del cuerpo B sabiendo que el cuerpo A tiene una masa de 5 kg, el B de 15 kg y el C de 10 kg. El coeficiente de rozamiento entre los cuerpos A y B vale 0'3 y entre B y el plano 0'1.



sol: T_A = 14'7 N; a_t = 2'55 m/s^2

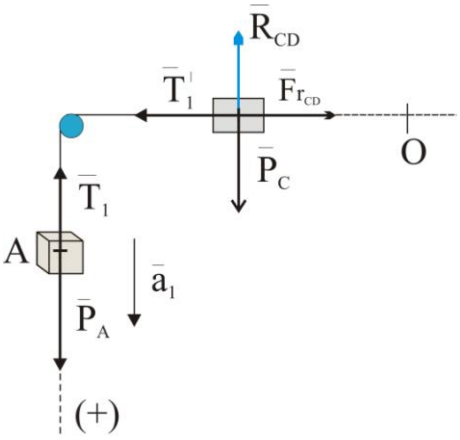
31. En el sistema de la figura las dos poleas se suponen sin masa y sin rozamiento. Desde una situación inicial de reposo, se abandonan simultáneamente las masas m_A y m_B, observándose que ambas descienden. En el instante después de abandonarlas se pide:

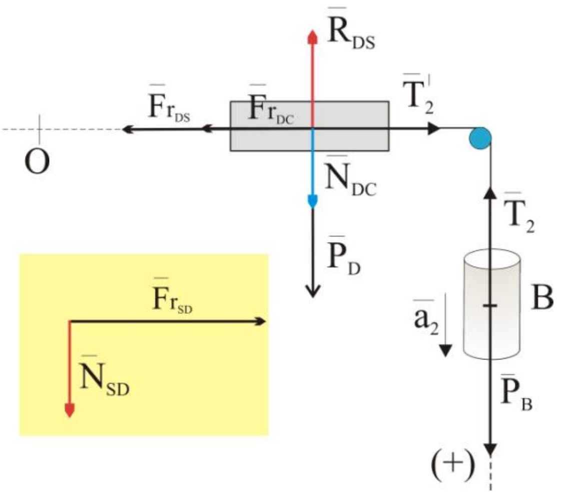


a) Valor de la tensión del hilo del que pende A.
b) Aceleración con que desciende B.
c) Fuerza total que ejerce C sobre D.

Datos: m_A = 1 kg; m_B = 2 kg; m_C = 0'5 kg; m_D = 1 kg; μ_{CD} = 1/3; μ_{DS} = 2/9

El sistema formado por A y C se mueve solidariamente hacia la izquierda y el formado por B y D hacia la derecha. Si, arbitrariamente, elegimos como sentido positivo el del movimiento, podemos representar las fuerzas que actúan en cada uno de dichos sistemas mediante los esquemas siguientes.





En el esquema de la izquierda se han incluido las siguientes fuerzas:

-Sobre el bloque A: $\vec{T}_1$ = fuerza que hace el hilo; $\vec{P}_A$ = fuerza que hace la Tierra.
-Sobre el bloque C: $\vec{T}'_1$ =fuerza que hace el hilo; $\vec{P}_C$ =fuerza que hace la Tierra;
$\vec{R}_{CD}$ = fuerza normal que sobre C hace D; $\vec{F}r_{CD}$ = fuerza de rozamiento que sobre C hace D.

En el esquema de la derecha se han incluido las siguientes fuerzas:

-Sobre el bloque B: $\vec{T}_2$ = fuerza que hace el hilo; $\vec{P}_B$ = fuerza que hace la Tierra.
-Sobre el bloque D: $\vec{T}'_2$ = fuerza que hace el hilo; $\vec{P}_D$ = fuerza que hace la Tierra;
$\vec{R}_{DS}$ = fuerza normal que sobre D hace la superficie de la mesa; $\vec{F}r_{DS}$ = fuerza de rozamiento que sobre D hace la mesa; $\vec{F}r_{DC}$ = fuerza de rozamiento que sobre D hace el bloque C.
-Sobre la mesa: $\vec{N}_{SD}$ = fuerza normal que sobre la superficie de la mesa hace D;
$\vec{F}r_{SD}$ = fuerza de rozamiento que sobre la superficie de la mesa hace D. (Con objeto de no complicar excesivamente la figura, estas dos fuerzas se han resaltado aparte mediante una zona sombreada).

De acuerdo con el principio de acción y reacción, sabemos que:

$T_1 = T'_1$; $R_{CD} = N_{DC}$; $R_{DS} = N_{SD}$; $Fr_{CD} = Fr_{DC}$; $Fr_{DS} = Fr_{SD}$; $T_2 = T'_2$

¿Cómo podríamos calcular la tensión del hilo del que pende el bloque A?

Dado que las trayectorias son conocidas, podemos utilizar un tratamiento escalar y aplicar la ecuación fundamental de la dinámica al bloque A y al C para tratar de obtener T_1:

Como sobre el bloque A no actúan fuerzas normales a la trayectoria, la única ecuación será: $F_{res\,t} = m_A \cdot a_{t1} \rightarrow P_A - T_1 = m_A \cdot a_{t1}$ (1)

Y para el bloque C: $F_{res\,t} = m_C \cdot a_{t1} \rightarrow T_1 - Fr_{CD} = m_C \cdot a_{t1}$ (2)

$F_{res\,n} = m_C \cdot a_{nC} \rightarrow R_{CD} - P_C = m_C \cdot a_{nC}$ (3)

Para calcular la tensión del hilo del que pende m_A podemos utilizar tanto la ecuación (1) como la (2), pero necesitamos saber primero cuál es la aceleración sobre la trayectoria. Para ello bastará sumar las ecuaciones (1) y (2) y despejar a_{t1}:

$P_A - T_1 = m_A \cdot a_{t1}$
$T'_1 - Fr_{CD} = m_C \cdot a_{t1}$
Sumando: $P_A - Fr_{CD} = (m_A + m_C) \cdot a_{t1}$, y despejando: $a_{t1} = \dfrac{P_A - Fr_{CD}}{m_A + m_C}$

Para poder hallar a_{t1} necesitamos determinar la fuerza de rozamiento que sobre C hace D. Como los bloques se están deslizando, el valor de esa fuerza coincidirá con el valor máximo, es decir: $Fr_{CD} = \mu_{CD} \cdot N_{DC} = \mu_{CD} \cdot R_{CD}$

¿Cómo podemos hallar R_{CD} ?

Para calcular R_{CD} hemos de aplicar la ecuación (3) y tener en cuenta que al no cambiar la dirección de su velocidad la aceleración normal es 0. Por tanto:

$R_{CD} - P_C = m_C \cdot a_n = 0 \rightarrow R_{CD} = P_C$ con lo que $Fr_{CD} = \mu_{CD} \cdot R_{CD} = \mu_{CD} \cdot P_C$

Así pues $a_{t1} = \dfrac{P_A - Fr_{CD}}{m_A + m_C} = \dfrac{P_A - \mu_{CD} \cdot P_C}{m_A + m_C}$

Observemos que según esta expresión, el valor de a_{t1} podría ser negativo, para ello bastaría que P_A fuese menor que la fuerza de rozamiento entre C y D (es decir, $\mu_{CD} \cdot P_C$). *¿Que querría decir esto?* Que la masa A subiría en lugar de bajar, aunque no es este el caso, ya que en el enunciado se nos informa que tanto A como B descienden.

Sustituyendo ahora esta expresión en la de T_1, nos queda:

$$T_1 = P_A - m_A \cdot a_{t1} \rightarrow T_1 = P_A - m_A \cdot \frac{P_A - \mu_{CD} \cdot P_C}{m_A + m_C} = 4'4 \text{ N}$$

Si la masa de A valiera 0, la tensión del hilo del que pende tendría que ser nula *¿Contempla este hecho el resultado que acabamos de obtener? ¿Puedes realizar algún otro razonamiento que permita analizar la validez de dicho resultado?*

Podemos referirnos, por ejemplo, a que si la masa de C fuese nula tampoco debería haber tensión en el hilo, como efectivamente se contempla en la expresión obtenida ya que en ese caso nos quedaría: $T_1 = P_A - m_A \cdot g = 0$. También a la igualdad en cuanto a las dimensiones, a lo que pasaría si el rozamiento fuese nulo, si el peso de C aumentase, etc.

¿Cómo podemos calcular la aceleración con que descenderá B?

En principio, podemos seguir la misma estrategia que utilizamos para calcular a_{t1} , es decir, aplicar la ecuación fundamental de la dinámica a los bloques B y D y sumar para eliminar las tensiones.

Sobre el bloque B: P_B - T_2 = $m_B \cdot a_{t2}$ (4)
Sobre el bloque D: T'_2 - Fr_{DS} - Fr_{DC} = $m_D \cdot a_{t2}$ (5)
R_{DS} - P_D - N_{DC} = $m_D \cdot a_{nD}$ (6)

Sumando las ecuaciones (4) y (5), nos queda : $P_B - Fr_{DS} - Fr_{DC} = (m_B + m_D) \cdot a_{t2}$

y despejando: $a_{t2} = \dfrac{P_B - Fr_{DS} - Fr_{DC}}{m_B + m_D}$

Para poder hallar a_{t2} necesitamos determinar la fuerza de rozamiento que sobre D hace el suelo y la que hace C. Como los bloques se están deslizando, los valores de esas fuerzas coincidirán con los valores máximos: $Fr_{DC} = \mu_{CD} \cdot R_{CD}$ y $Fr_{DS} = \mu_{DS} \cdot N_{SD}$. El primero de ellos ya vimos anteriormente que viene dado por: $Fr_{DC} = \mu_{CD} \cdot P_C$; en cuanto al segundo, para calcularlo, *necesitamos saber N_{SD}* .

Podemos calcular N_{SD} si tenemos en cuenta que de acuerdo con el principio de acción y reacción, $N_{SD} = R_{DS}$ y la ecuación (6) en la que la aceleración normal es nula. Nos queda así: $R_{DS} - P_D - N_{DC} = m_D \cdot a_{nD} = 0$, con lo que: $R_{DS} = P_D + N_{DC}$. Como ya hemos visto: $N_{DC} = P_C$, por tanto podemos escribir finalmente que: $R_{DS} = P_D + P_C$ y también que:
$Fr_{DS} = \mu_{DS} \cdot (P_D + P_C)$.

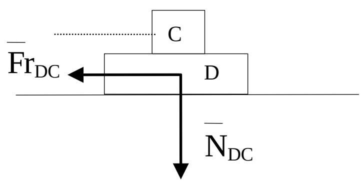
Introduciendo estas expresiones de las fuerzas de rozamiento en la ecuación que nos da a_{t2}:

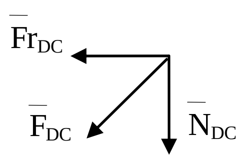
$$a_{t2} = \frac{P_B - Fr_{DS} - Fr_{DC}}{m_B + m_D} \rightarrow a_{t2} = \frac{P_B - \mu_{DS} \cdot (P_D + P_C) - \mu_{DC} \cdot P_C}{m_B + m_D} = 5 \text{ m/s}^2$$

Podemos ahora analizar el resultado obtenido, comprobando en primer lugar que la ecuación es dimensionalmente homogénea y que contempla algunos casos evidentes, como que si la masa de D y la de C fuesen nulas, B caería con la aceleración de la gravedad o cómo si eliminamos el bloque C, el resultado se transforma en otro ya conocido (ved problema 27).

Para terminar, calcularemos el valor de la fuerza total que el bloque C ejerce sobre el D.

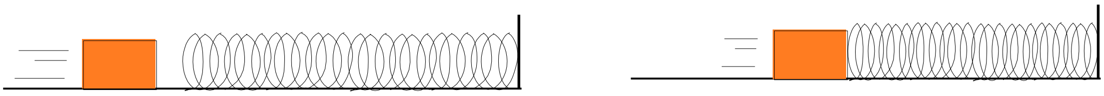
Analizando la interacción existente entre los dos bloques y centrándonos en la fuerza que el C ejerce sobre el D, concluimos que tanto la fuerza de rozamiento $\vec{Fr}_{DC}$ como la fuerza normal $\vec{N}_{DC}$ responden a la misma interacción, de modo que sumadas nos darán la fuerza total que sobre D ejerce C:





$\vec{F}_{DC} = \vec{Fr}_{DC} + \vec{N}_{DC}$ $\qquad$ $F_{DC} = \sqrt{(Fr_{DC})^2 + N_{DC}^2} = 5'3$ N

32. Un bloque de hierro ha sido lanzado hacia la derecha por una superficie horizontal contra un muelle elástico tal y como se representa en la figura adjunta:



Al chocar, el bloque no se para inmediatamente sino que sigue moviéndose hacia la derecha durante un tiempo y mientras esto ocurre irá empujando al muelle (razonad cuál es la proposición correcta):

a) Cada vez con más fuerza
b) Siempre con la misma fuerza
c) Cada vez con menos fuerza

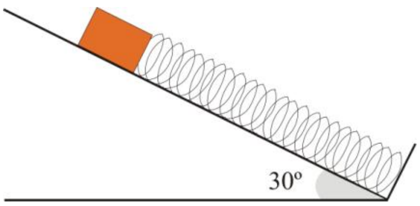
Cuando el bloque interacciona con el muelle, según el principio de acción y reacción, la fuerza que sobre el muelle hace el bloque $\vec{F}_{MB}$ ha de ser del mismo módulo pero sentido contrario a la fuerza que sobre el bloque hace el muelle $\vec{F}_{BM}$, es decir: $\vec{F}_{MB} = -\vec{F}_{BM}$ o bien en módulos $F_{MB} = F_{BM}$ y esto ha de ser así mientras dure dicha interacción.

Al tratarse de un muelle elástico, el módulo de la fuerza que ejerce el muelle ha de ser directamente proporcional al alargamiento o compresión de éste respecto a su longitud inicial (ley de Hooke), es decir, conforme se vaya aumentando la compresión del muelle irá aumentando también F_{BM} y en consecuencia también lo hará la fuerza que sobre el muelle hará el bloque F_{MB} ya que, como hemos dicho, ambas tienen el mismo módulo. Por tanto, la proposición correcta es la a).

El hecho de que muchas personas escojan como correcta la tercera propuesta suele deberse a que relacionan la fuerza con la velocidad en lugar de con la aceleración y eso les lleva a pensar que como el bloque va cada vez más lento ha de hacer cada vez menos fuerza. No tienen en cuenta que aunque el bloque vaya cada vez más despacio el módulo de la aceleración va aumentando (cada vez se para más deprisa) y que alcanzará su valor máximo justo en el momento en que el bloque se pare (máxima compresión del muelle) cuando la fuerza tome también su valor máximo, a pesar de que en ese preciso instante la rapidez sea nula. Finalmente, pensemos, que si en lugar del bloque fuese nuestra mano la que comprime el resorte, no dudaríamos en afirmar que para seguir comprimiéndolo tendríamos que hacer cada vez más fuerza.

33. Si el cuerpo del ejercicio 25 se sujeta mediante un resorte de constante elástica 50 N/m. Determinad el alargamiento que sufrirá el resorte.

34. El cuerpo de la figura tiene una masa de 5 kg. Sabiendo que la constante elástica del resorte vale 400 N/m, determinad la deformación del muelle en el equilibrio. (Se supone que no hay rozamiento).



sol: x = 6/5 m

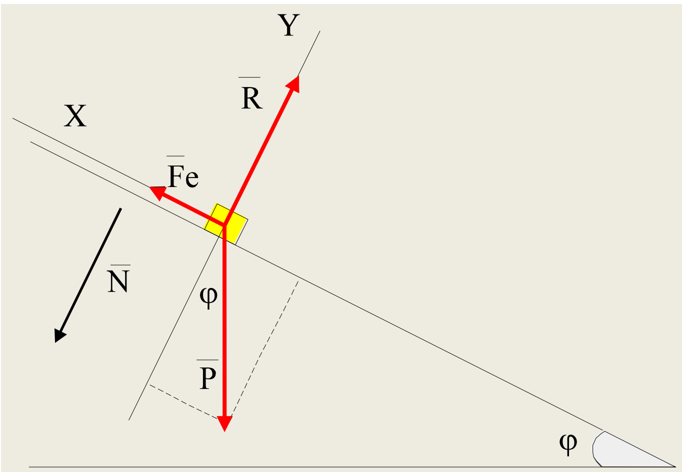
¿Qué fuerzas actuarán sobre el cuerpo en la posición de equilibrio?

En la posición de equilibrio, sobre el cuerpo actúan las fuerzas $\vec{P}$, $\vec{R}$ y $\vec{Fe}$ correspondientes al peso del cuerpo, fuerza normal que ejerce el plano y fuerza elástica que ejerce el muelle, y como se trata de una situación de equilibrio, la aceleración será nula y, en consecuencia, también deberá serlo la fuerza resultante: $\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{Fe} = 0$

¿Cómo podríamos hallar la deformación del muelle en la posición de equilibrio?

Sabemos que la fuerza elástica ejercida por el muelle ha de ser directamente proporcional a la elongación (ley de Hooke) según la expresión: $F_e = K \cdot \Delta l$, donde K es la constante elástica del muelle e Δl la deformación sufrida por el mismo (en valor absoluto). Para calcular la deformación, podemos hallar el valor de la fuerza elástica en primer lugar y sustituir en la expresión anterior.

Para determinar el valor de la fuerza elástica ejercida por el muelle sobre el cuerpo, aplicaremos la ecuación anterior, *expresando las fuerzas en un sistema de referencia cartesiano (ya que se trata de un equilibrio), como el que se indica en el esquema adjunto:*



$\vec{P} = P \cos (90^o + \varphi)\ \vec{i} + P \cos (180^o - \varphi)\ \vec{j} = -P \operatorname{sen} \varphi \cdot \vec{i} - P \cos \varphi \cdot \vec{j}$
$\vec{R} = R \cos 90^o \cdot \vec{i} + R \cos 0^o \cdot \vec{j} = R \cdot \vec{j}$
$\vec{Fe} = F_e \cos 0^o \cdot \vec{i} + Fe \cos 90^o \cdot \vec{j} = F_e \cdot \vec{i}$

Con lo que: $\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{Fe} \quad \rightarrow \quad \vec{F}_{res} = (F_e - P \operatorname{sen} \varphi)\ \vec{i} + (R - P \cos \varphi)\ \vec{j} = 0$

Descomponiendo la ecuación vectorial anterior en dos escalares nos queda:

(1) $F_e - P \operatorname{sen} \varphi = 0$
(2) $R - P \cos \varphi = 0$

De la primera obtenemos que F_e = P sen φ y como el módulo de la fuerza elástica también puede obtenerse como $F_e = K\cdot\Delta l$ (poniendo Δl en valor absoluto), podemos igualar

y despejar Δl, con lo que nos queda: $\Delta l = \dfrac{P\,\text{sen}\,\varphi}{K} = \dfrac{mg\,\text{sen}\,\varphi}{K}$ = 0'0625 m

La expresión anterior puede analizarse comprobando, como hacemos habitualmente, que es dimensionalmente homogénea (L en ambos miembros) y verificando que contempla algunos casos particulares evidentes, como, por ejemplo, que la comprensión del muelle en la situación de equilibrio ha de ser tanto mayor cuanto mayor sea la componente tangencial de la fuerza peso y menor sea la constante elástica del muelle .

Conviene tener en cuenta que P·sen φ y F_e no son una pareja de acción y reacción (corresponden a dos interacciones distintas) y que solo coinciden (en valor absoluto) justo en el punto de equilibrio, ya que P sen φ, vale siempre lo mismo mientras que F_e va cambiando según lo comprimido o alargado que esté el resorte ($F_e = K\cdot\Delta l$).

¿Qué le ocurriría al cuerpo si, en las condiciones explicitadas en el enunciado, se abandonase sobre el plano, sujeto al extremo libre del muelle?

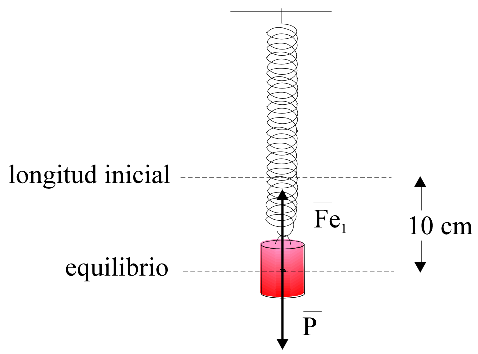
El objeto descendería porque inicialmente la fuerza elástica del muelle sería menor que la componente tangencial del peso P sen φ pero como F_e iría aumentando llegaría un momento (posición de equilibrio) que se igualarían ambas fuerzas. En ese punto el objeto estaría descendiendo con su máxima velocidad (siendo nula la fuerza resultante sobre el mismo), por lo que no se pararía inmediatamente sino que continuaría descendiendo. A partir de que se sobrepasa la posición de equilibrio, la fuerza elástica superaría cada vez más a la componente tangencial del peso y el cuerpo iría frenando hasta que en un instante dado se pararía (rapidez cero y F_e máxima) para comenzar a ascender empujado por el muelle hasta la situación inicial. El ciclo se repetiría indefinidamente (rozamiento nulo) y se puede demostrar que correspondería a un movimiento armónico simple.

35. Demostrad que dos resortes unidos de constantes K_1 y K_2 equivalen a uno solo de constante $K_1 \cdot K_2 / (K_1 + K_2)$.

36. De un resorte de 50 cm de longitud, sujeto al techo de un autobús en reposo, se suspende un cuerpo de 4 kg que le produce un alargamiento de 10 cm. El autobús arranca con una aceleración de 4 m/s^2 y en línea recta. ¿Qué ángulo formará el resorte con la vertical y cuál será su longitud en esa nueva situación?

Conviene distinguir entre la situación inicial con el autobús en reposo y la situación posterior, con el autobús moviéndose en línea recta y con aceleración constante.

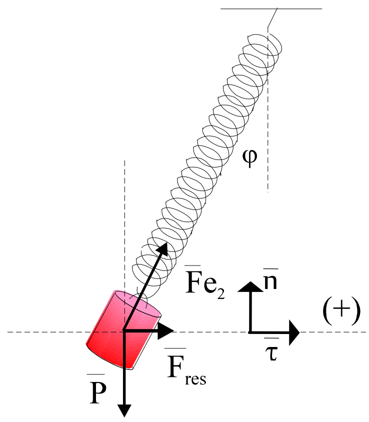
La primera (autobús en reposo), corresponde a una situación de equilibrio en la que la fuerza elástica que ejerce el muelle sobre el cuerpo hacia arriba se verá compensada por la fuerza peso que ejerce la Tierra sobre el cuerpo hacia abajo, según se indica en el esquema adjunto:



En la posición de equilibrio queda claro que : $\vec{\mathrm{Fe}}_1 + \vec{\mathrm{P}} = 0$, y por tanto que: Fe_1 = P, es decir: K · Δl_1 = mg, de donde podemos obtener el valor de la constante elástica del muelle haciendo K = mg/Δl_1 = 400 N/m

En la segunda situación (autobús acelerando), el cuerpo que pende del resorte, para un observador externo no se encuentra en equilibrio sino que se está moviendo con la misma aceleración que el autobús. *¿A qué fuerzas cabe atribuir dicha aceleración?*

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo serán el peso $\vec{P}$ y la fuerza elástica del muelle $\vec{\mathrm{Fe}}_2$ (distinta de la correspondiente a la situación anterior), de manera que la resultante de ambas tendrá la misma dirección y sentido que la aceleración con que se mueve el cuerpo:



$$\vec{\mathrm{F}}_{res} = \vec{P} + \vec{\mathrm{Fe}}_2 = \mathrm{m}\cdot\ \vec{a}$$

Expresando las fuerzas en componentes intrínsecas, según los vectores $\vec{\tau}$ y $\vec{n}$ de la figura y sustituyendo, nos queda:

$\mathrm{F}_{res\ t} = \mathrm{m}\cdot a_t \rightarrow\ \mathrm{Fe}_2 \cdot \mathrm{sen}\ \varphi =\ \mathrm{m}\cdot a_t$
$\mathrm{F}_{res\ n} = \mathrm{m}\cdot a_n \rightarrow\ \mathrm{Fe}_2 \cdot \cos\varphi - \mathrm{P} = \mathrm{m}\cdot a_n = 0$

A continuación mediante las dos ecuaciones anteriores podemos obtener el valor del ángulo φ y el de la fuerza elástica Fe_2

Despejando sen φ y cos φ de las ecuaciones anteriores y dividiendo:

$$\frac{sen\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\dfrac{m\cdot a_t}{Fe_2}}{\dfrac{P}{Fe_2}} \rightarrow tg\varphi = \frac{a_t}{g} \rightarrow \varphi = arctg\,\frac{a_t}{g} = arctg\,\frac{4}{10} = 21'8^{\circ}$$

Sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones anteriores y operando, obtenemos que Fe_2 = 43'1 N.

Para saber el alargamiento experimentado por el muelle, aplicamos $\mathrm{Fe}_2 = \mathrm{K}\cdot\Delta l$ y despejamos Δl:

$$\Delta l = \mathrm{Fe}_2/\mathrm{K} = 43'1/400 = 0'108\ \mathrm{m} = 10'8\ \mathrm{cm}$$

A la luz de lo hecho en este problema, proponed una forma de calcular la aceleración de un avión durante la maniobra de despegue (o aterrizaje) utilizando un péndulo simple y un transportador de ángulos.

37. Un cuerpo de 2 kg de masa se desplaza por un plano horizontal describiendo una circunferencia de 5 m de radio, sometido a la acción de una fuerza tangencial de módulo $4/(1+t)^2$ (en N para t en s). Determinad: a) su rapidez a los 3 s de comenzar a actuar la fuerza, sabiendo que inicialmente se encontraba en reposo; b) valor de la fuerza total que deberá estar actuando sobre el cuerpo a los tres segundos.

Si el cuerpo describe una trayectoria circular, su velocidad va cambiando continuamente de dirección, luego además de la fuerza tangencial deberá de actuar también otra fuerza normal, de manera que $\vec{F}_{\mathrm{res}} = \vec{F}_{\mathrm{t}} + \vec{F}_{\mathrm{n}} = F_{\mathrm{t}} \cdot \vec{\tau} + F_{\mathrm{n}} \cdot \vec{n}$. Si establecemos como sentido positivo el mismo que el del vector fuerza tangencial, podemos expresar las componentes intrínsecas del vector fuerza resultante como:

(1) $F_t = m \cdot a_t \rightarrow 4/1+t^2 = m \cdot a_t$
(2) $F_n = m \cdot a_n = m \cdot v^2/5$

¿Cómo podemos obtener ahora la ecuación que nos da la rapidez en cualquier instante?

Sabemos que la rapidez está relacionada con la aceleración sobre la trayectoria mediante la ecuación $a_t = dv/dt$. Integrando a partir de esta ecuación, podemos hallar v = v (t). Luego, bastará sustituir t por el valor correspondiente para calcular v en cualquier instante.

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a_t \cdot dt \rightarrow \int_{0}^{v} dv = \int_{0}^{t} \frac{2}{(1+t)^2} \cdot dt \rightarrow v = \frac{-2}{(1+t)} + 2 \rightarrow v = \frac{2t}{(t+1)}$$

Basta ahora sustituir t por 3 s para obtener v = 1’5 m/s.

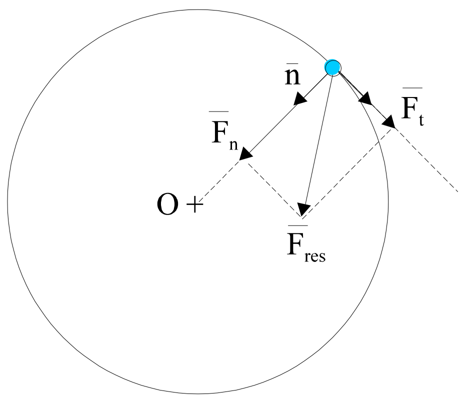
¿Cómo podríamos calcular la expresión de la fuerza total que actúa sobre el cuerpo en cualquier instante?

De acuerdo con la expresión $\vec{F}_{\mathrm{res}} = \vec{F}_{\mathrm{t}} + \vec{F}_{\mathrm{n}} = F_{\mathrm{t}} \cdot \vec{\tau} + F_{\mathrm{n}} \cdot \vec{n}$ tendremos que obtener en primer lugar F_t y F_n .

$F_t = m \cdot a_t = 2 \cdot 2/(1+t)^2 = 4/(1+t)^2$

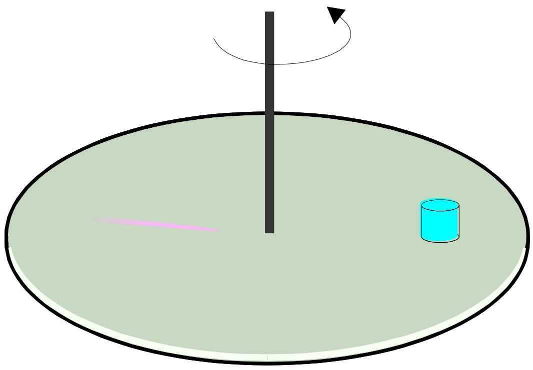
$F_n = m \cdot a_n = m \cdot v^2/R = 2 \cdot v^2/5$

Con lo que $\vec{F}_{res} = \frac{4}{(1+t)^2}\vec{\tau} + \frac{2}{5}v^2 \cdot \vec{n}$



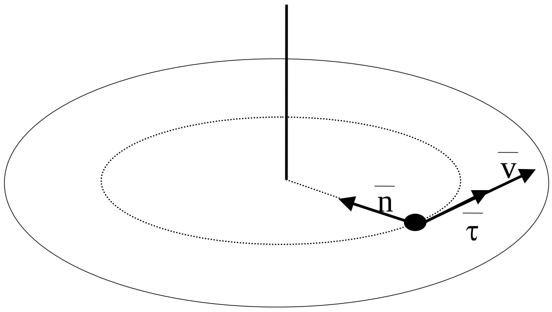
En el instante t = 3 s, nos queda: $\vec{F}_{res} = 0'25\,\vec{\tau} + 0'9\,\vec{n}$ N

38. Sobre una plataforma plana, capaz de girar en torno a un eje perpendicular, se deposita un cuerpo que presenta con la misma un coeficiente de rozamiento de 0'8. Encontrad la máxima distancia a que puede encontrarse el cuerpo del eje de giro, sin ser lanzado hacia el exterior, si hacemos girar la plataforma a razón de una vuelta por segundo.

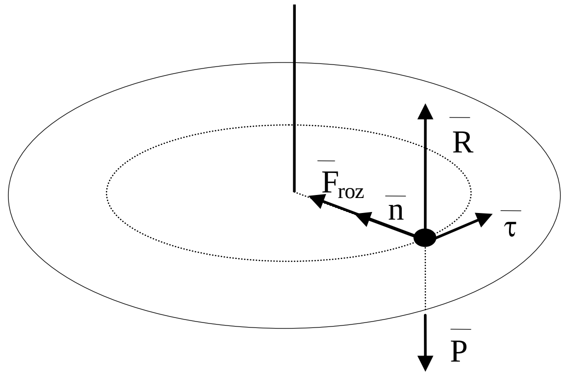


Si resolviéramos de forma experimental este ejercicio, veríamos que existe una distancia máxima al eje tal que para valores superiores a la misma, el cuerpo deslizaría por la superficie desplazándose hacia el exterior, mientras que para valores inferiores, el cuerpo permanece en el lugar en que se le sitúe, describiendo, al igual que cualquier punto del disco, un movimiento circular uniforme. Para que esto último suceda, será necesario que el cuerpo se encuentre sometido a la acción de una fuerza resultante según la dirección del radio y dirigida hacia el centro de la plataforma, es decir, en el mismo sentido que el vector unitario $\vec{n}$. *¿A qué se debe esa fuerza?*

Consideremos el objeto en un punto cualquiera de su trayectoria con un movimiento circular y uniforme alrededor del eje de giro. En dicho punto tendrá una velocidad $\vec{v}$ tangente a la trayectoria. Si no continúa moviéndose con dicha velocidad en la misma dirección y sentido, es porque ha de haber una fuerza resultante perpendicular a la trayectoria que obligue a cambiar constantemente la dirección del vector velocidad.



Las fuerzas que actúan sobre el objeto cuando está describiendo un movimiento circular uniforme solidariamente a la plataforma, son el peso $\vec{P}$, la reacción del plano $\vec{R}$ y la fuerza de rozamiento con la superficie $\vec{F}_{roz}$ (si no hubiese rozamiento sería imposible que el objeto pudiera girar estando sobre la plataforma) $\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{roz}$. Por otra parte, al tratarse de un movimiento circular uniforme, la fuerza resultante deberá de tener la dirección y sentido de $\vec{n}$.



Expresando en componentes intrínsecas la ecuación fundamental de la dinámica:
$\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a} = 0 \cdot \vec{\tau} + m\, a_n \cdot \vec{n}$, y sustituyendo nos queda: $\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{roz} = m\, a_n \cdot \vec{n}$.
Si analizamos la última ecuación, nos daremos cuenta de que la única posibilidad de que la fuerza resultante tenga la misma dirección y sentido que $\vec{n}$, es que $\vec{P} + \vec{R} = 0$, con lo que tendremos: $\vec{F}_{res} = \vec{F}_{roz} = m\, a_n \cdot \vec{n}$.

Todo sucede, pues, como si la única fuerza actuante fuera la de rozamiento que, además, está dirigida hacia el centro de la circunferencia descrita, de forma que si trabajamos escalarmente con la componente normal:

$F_{res\ n} = F_{roz} = m \cdot a_n = m \cdot v^2/r$ y como $v = w \cdot r$ nos queda que $F_{roz} = m \cdot w^2 \cdot r$

La expresión obtenida nos dice que cuanto mayor sea r (a igualdad de los restantes factores) mayor será la fuerza de rozamiento necesaria para que el objeto siga girando sobre la plataforma alrededor del eje con movimiento circular y uniforme.

¿Cómo podríamos calcular el máximo valor de r posible?

El mayor radio posible será aquel que corresponda al valor máximo que puede tomar la fuerza de rozamiento entre el cuerpo y la plataforma. Dicho valor máximo viene dado por:

$F_{r\,max} = \mu \cdot N = \mu \cdot R = \mu \cdot P = \mu \cdot mg$. Sustituyendo en $F_{roz} = m \cdot w^2 \cdot r$ podemos escribir que:

$\mu \cdot mg = m \cdot w^2 \cdot r_{max}$ y despejando: $\boxed{r_{max} = \dfrac{\mu \cdot g}{w^2}}$ $\rightarrow$ $r_{max} = 0'2$ m

Podemos analizar la expresión literal del resultado comprobando que es dimensionalmente homogénea (L = L) y que contempla algunos casos evidentes como, por ejemplo, que cuanto mayor sea el coeficiente de rozamiento mayor será el radio máximo y que al aumentar la rapidez angular de la plataforma disminuiría el radio máximo. En este último caso, es posible darse cuenta además de que al estar w elevada al cuadrado, influye más que los restantes factores, de forma que cuando w se duplica el radio máximo no se hace la mitad sino cuatro veces más pequeño.

39. El cuerpo del ejercicio anterior tiene una masa de 5 kg y se encuentra sujeto por una cuerda de 0'5 m desde el centro de giro. Determinad a qué rapidez angular se romperá la cuerda si soporta como máximo una tensión de 60 N.

En este caso la fuerza resultante que se requiere para que el cuerpo gire con movimiento circular uniforme será la suma de la fuerza de rozamiento y de la fuerza que realice la cuerda sobre el cuerpo (que como máximo puede valer 60 N). Dicha fuerza tendrá la dirección de la normal y estará dirigida hacia el centro de la circunferencia descrita.

Si el cuerpo gira con una rapidez angular w tal que la fuerza de rozamiento F_{roz} es suficiente para suministrarle la fuerza normal requerida, la cuerda no hará ninguna fuerza (la tensión de la cuerda será nula). Pero si la w es tan elevada que el valor máximo de la fuerza de rozamiento $F_{r\,max}$ es inferior al de dicha fuerza normal, la diferencia será aportada por la cuerda al ponerse en tensión (aunque como máximo solo pueda suministrar 60 N).

El planteamiento del ejercicio será similar al anterior (ved allí figura correspondiente), trabajando con las componentes intrínsecas de las fuerzas presentes.

$$\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}r_{max} + \vec{T}$$

Dado que $\vec{P}$ y $\vec{R}$ se anulan, podemos plantear directamente que: $\vec{F}_{res} = \vec{F}r_{max} + \vec{T}$
y como se trata de un movimiento de trayectoria conocida nos convendrá expresar todas las fuerzas en componentes intrínsecas:

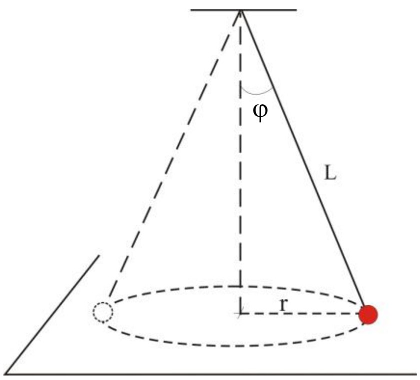
$F_{res\,t} = ma_t \rightarrow 0 = a_t$ (como corresponde a un movimiento uniforme)
$F_{res\,n} = ma_n \rightarrow F_{r\,max} + T = m \cdot a_n = m \cdot w^2 \cdot r$

Despejando nos queda: $w = \sqrt{\dfrac{F_{r\,max} + T}{m \cdot r}}$

La mayor rapidez angular con que la masa m podrá girar con movimiento circular uniforme alrededor del eje y a una distancia r del mismo, la podemos obtener a partir de la expresión anterior, simplemente sustituyendo la tensión por su valor máximo y teniendo en cuenta que $F_{r\,max} = \mu \cdot N = \mu \cdot R = \mu \cdot P = \mu \cdot mg$:

$$w_{max} = \sqrt{\frac{\mu \cdot mg + T_{max}}{m \cdot r}} = 6'3 \text{ rad/s}$$

40. Un péndulo cónico es un dispositivo formado por una masa m que cuelga de un hilo de longitud L, describiendo un círculo horizontal con cierto radio r. Calculad las expresiones que proporcionan la rapidez del cuerpo y la tensión del hilo en función de la masa m, la longitud L y el ángulo φ que forma el hilo con la vertical. Aplicadlo al caso en que la masa sea de 200 g, el radio de 50 cm y el ángulo de 30^0.

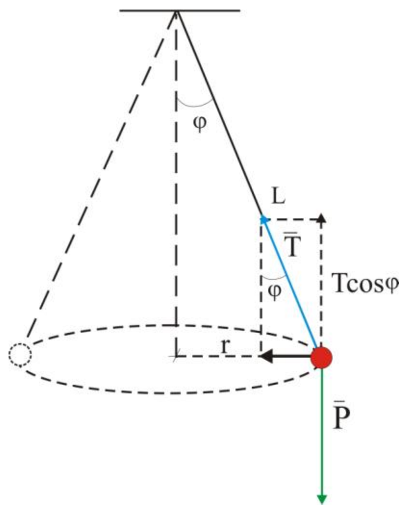


Para comenzar conviene que nos preguntemos por las fuerzas que están actuando sobre la masa que pende del hilo. Dichas fuerzas son la que ejerce el hilo $\vec{T}$ y el peso $\vec{P}$ (para simplificar, suponemos que no hay rozamiento), de manera que $\vec{F}_{res} = \vec{T} + \vec{P}$.

El problema presenta la particularidad de que ninguna de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, se encuentra en el plano que contiene a la trayectoria. Por otra parte, dichas fuerzas no se anulan entre sí ya que en ese caso el movimiento no podría ser circular, como de hecho es, sino rectilíneo y uniforme.

Para resolver el problema podemos aplicar la ecuación fundamental de la dinámica para saber con qué aceleración se mueve el cuerpo. Luego, a partir, de la aceleración podemos obtener la rapidez.

En primer lugar, veamos una forma sencilla de obtener la fuerza resultante si consideramos que el vector aceleración ha de estar contenido en el plano que contiene a la circunferencia descrita por el móvil, la fuerza resultante también deberá estar en ese mismo plano ($\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}$). Para comprender mejor la situación, podemos descomponer (ver figura siguiente) la tensión del hilo en dos fuerzas; una, en el plano de la trayectoria (dirigida hacia el centro O), y otra, perpendicular a ella (dirigida hacia arriba). Con ello tendremos tres fuerzas, que al sumarlas tienen que dar una fuerza resultante situada en el plano de la trayectoria y para que esto ocurra, la única posibilidad es que la componente vertical de la tensión y el peso se anulen, es decir, que T cos φ = P.



De acuerdo con lo anterior, la fuerza resultante sobre la bolita coincidirá con la componente horizontal de la tensión (dirigida siempre hacia el centro de la circunferencia descrita) y valdrá T sen φ. Si expresamos pues la ecuación fundamental de la dinámica en componentes intrínsecas, tendremos:

(1) $F_{res\ t} = m \cdot a_t = 0$
(2) $F_{res\ n} = m \cdot a_n \rightarrow T \text{ sen } \varphi = m \cdot a_n$

Si en la ecuación (2) sustituimos la componente normal de la aceleración por la expresión v^2/r y despejamos v, nos queda:

$$v = \sqrt{\frac{r \cdot T \,\mathrm{sen}\,\varphi}{m}}$$

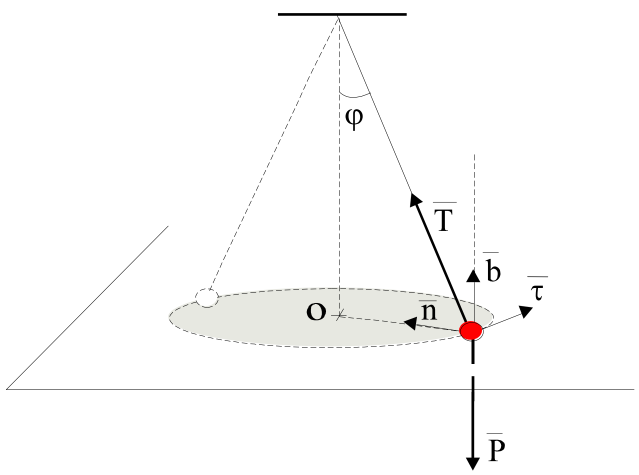
Así pues para hallar v necesitamos saber T *¿Y cómo podemos hallar T?*

Recordemos que al no existir aceleración en la vertical, se debe de cumplir que la fuerza vertical con que el hilo tira de la bolita hacia arriba se debe de anular con la fuerza peso y por tanto que: T cos φ = P = mg. Podemos, pues, utilizar esta expresión para obtener T, como: T = mg/cos φ = 2'3 N. Introduciendo esta expresión en la de v obtenida anteriormente, nos queda que:

$$v = \sqrt{\frac{r \cdot T \,\mathrm{sen}\,\varphi}{m}} = v = \sqrt{\frac{r \cdot mg \,\mathrm{sen}\,\varphi}{m \cos\varphi}} = \sqrt{rg \,\mathrm{tg}\,\varphi} = 1'7 \text{ m/s}$$

Podemos analizar el resultado obtenido comprobando en primer lugar que es dimensionalmente homogéneo, ya que a la izquierda del signo igual tenemos $L \cdot T^{-1}$ y a la derecha $\sqrt{L^2 \cdot T^{-2}} = L \cdot T^{-1}$. Por otra parte, es fácil darse cuenta de cómo dicho resultado contempla algún caso particular evidente, como por ejemplo, el hecho de que si el radio r es nulo, la rapidez sería 0 (no giraría), o que cuanto mayor sea r mayor será v.

Otra forma, más rigurosa, de resolver este tipo de problemas en los que actúan fuerzas que no están contenidas en el plano definido por $\vec{\tau}$ y $\vec{n}$, es mediante la utilización de los vectores unitarios tangencial $\vec{\tau}$, normal $\vec{n}$ y binormal $\vec{b}$, tal y como se indican en el esquema adjunto:



Si expresamos las fuerzas actuantes en estas componentes:

$$\vec{T} = T\cos 90^\circ\,\vec{\tau} + T\cos(90^\circ - \varphi)\,\vec{n} + T\cos\varphi\,\vec{b} = T\cos\varphi\,\vec{b} + T\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{n}$$
$$\vec{P} = \mathrm{P}\cos 90^\circ \cdot \vec{\tau} + \mathrm{P}\cos 90^\circ \cdot \vec{n} + \mathrm{P}\cos 180^\circ \cdot \vec{b} = -\mathrm{P} \cdot \vec{b}$$

Sumando obtenemos: $\vec{F}_{res} = \mathrm{T}\,\mathrm{sen}\,\varphi \cdot \vec{n} + (\mathrm{T}\cos\varphi - \mathrm{P}) \cdot \vec{b}$

La fuerza resultante expresada en componentes intrínsecas debe ser:

$F_{res\ t} = m\ a_t$
$F_{res\ n} = m\ a_n$
$F_{res\ b} = 0$

ya que como sabemos, tanto el vector aceleración como la fuerza resultante tienen que estar siempre contenidos en el plano formado por los vectores unitarios $\vec{\tau}$ y $\vec{n}$ (recordemos que la aceleración puede tener solo dos componentes intrínsecas de modo que $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$) y que esto obliga a que la componente binormal se anule.

Igualando ahora las componentes nos queda:

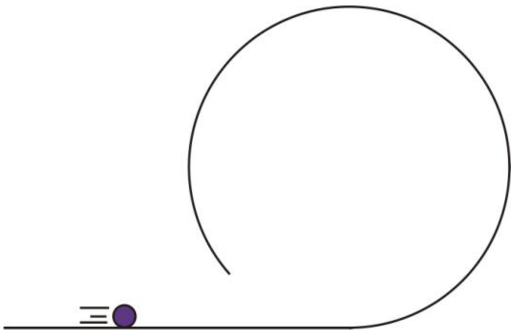
$0 = m\ a_t$
$T \text{ sen } \varphi = m\ a_n$
$T \cos \varphi - P = 0$

De la primera de ellas, queda claro que $a_t = 0$, de la segunda podemos despejar a_n como: $a_n = T \cdot \text{sen}\varphi / m$ y de la tercera $T = P / \cos \varphi$ y a continuación podemos proseguir como hicimos anteriormente para hallar v y T.

41. Un muelle de 1 m de longitud y constante elástica K = 10^3 N/m tiene un extremo fijo y en el otro una masa de 1 kg, encontrándose ambos sobre un plano horizontal y sin rozamiento. Si se hace girar la masa con rapidez angular constante de 10 rad/s ¿cuál será la deformación que sufrirá el muelle?

sol: $\Delta l = 1/9$ m

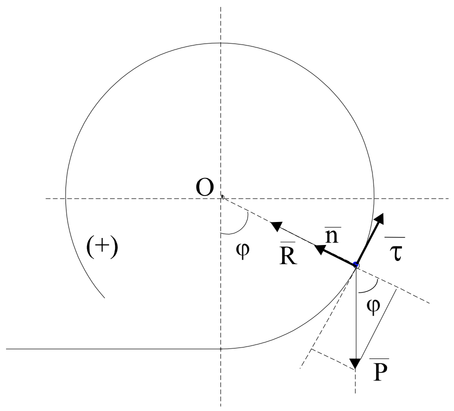
42. Desde la parte inferior de un "rizo" se lanza una bola de masa m. Determinad la mínima rapidez con que deberá llegar a la parte superior del "rizo" para conseguir pasarlo sin caer. Aplicadlo al caso en que el radio sea de 10 m.

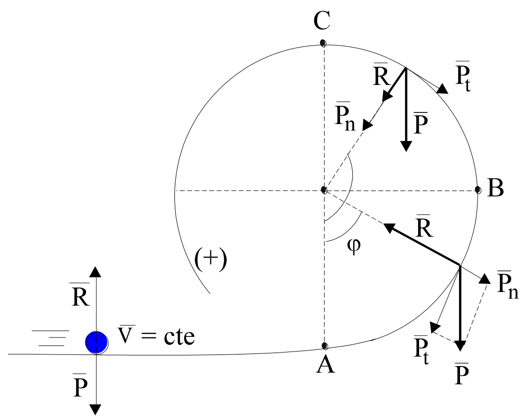


Para comenzar, conviene hacer un análisis cualitativo previo de la situación: la bolita lleva en cada instante una cierta velocidad y se encuentra con que la curvatura de la trayectoria la obliga a cambiar constantemente la dirección de dicha velocidad. Dicho de otro modo, la bolita está "chocando" con la superficie y como consecuencia de esa interacción se ejercerán fuerzas iguales y contrarias entre sí (principio de acción y reacción). La fuerza que sobre la bolita haga la superficie sumada con el peso, nos proporcionará en todo momento la fuerza resultante que actúa sobre la misma. (Nótese que en el momento en que la bolita cae, no existe interacción entre ella y la superficie).

Otra consideración de interés es que a lo largo de la primera cuarta parte del recorrido, la bolita no puede caer (se lo impide la superficie), sino solo retroceder (en caso de que no se lanzase con la suficiente rapidez inicial). En principio, podemos pensar que el punto más "crítico" será el más alto, donde "intuimos" que la interacción entre la bolita y la superficie será menor.

Como la bolita se encuentra describiendo un movimiento de trayectoria previamente conocida, convendrá expresar las fuerzas mediante sus componentes intrínsecas. Por otra parte, podemos descomponer el trayecto circular en dos tramos AB y BC analizando qué es lo que le ocurre a la bolita en cada uno. Para ello utilizaremos los siguientes esquemas:





En el trayecto horizontal actúan el peso $\vec{P}$ y la fuerza normal $\vec{R}$ que hace el plano. Puesto que la bolita, en ese tramo, lleva movimiento rectilíneo y uniforme, la resultante de ambas fuerzas es nula. No ocurre así en el trayecto circular, puesto que en él, la velocidad cambia tanto en módulo (disminuye conforme va subiendo la bolita) como de dirección. De acuerdo con el principio de acción y reacción la fuerza normal que el plano ejerce sobre la bolita $\vec{R}$ ha de ser en todo instante de igual módulo y sentido contrario a la que ejerce la bolita sobre dicho plano ($\vec{N}$), que no hemos incluido en la figura.

Tomando como sentido positivo el del movimiento, nos queda que para el tramo circular la fuerza resultante tiene las siguientes componentes intrínsecas:

$F_{res\ t} = P \cos (90^o + \varphi) = -P \operatorname{sen} \varphi$

$F_{res\ n} = P \cos (180^o - \varphi) + R \cos 0^o = R - P \cos \varphi$

Aplicando ahora la ecuación fundamental de la dinámica, nos queda:

(1) $m \cdot a_t = -P \operatorname{sen} \varphi$

(2) $m \cdot a_n = R - P \cos \varphi$

De la ecuación (1), comprobamos que existe aceleración tangencial y que es negativa, por lo que la rapidez irá decreciendo a medida que la bolita asciende.

La interpretación de la ecuación (2), será más clara si analizamos el movimiento de la bola por separado en los tramos AB y BC:

En el tramo AB, no puede caer porque la componente normal $\vec{P}_n$ del peso provoca que la bolita presione a la superficie. Dicha componente normal (P cos φ) va disminuyendo desde un valor máximo P en el punto A (φ = 0) hasta un valor 0 en el punto B (φ = 90º). La superficie hace una fuerza $\vec{R}$ sobre la bolita dirigida hacia el centro de la trayectoria circular. La fuerza $\vec{R}$ no solo compensa en todo momento a la fuerza $\vec{P}_n$ sino que es mayor que ella, de manera que siempre habrá una fuerza normal resultante dirigida hacia el centro de la circunferencia (necesaria para el giro). En efecto, la ecuación (2) puede ponerse como $R = m \cdot a_n + P \cdot \cos \varphi$, en la que los dos términos de la derecha son positivos (φ estará comprendido entre 0º y 90º), por lo que en AB siempre existirá $\vec{R}$, y por tanto, en el tramo AB siempre habrá interacción entre la bolita y la superficie.

En el tramo BC la componente normal del peso $\vec{P}_n$ va hacia el centro de la trayectoria (cos φ es negativo), al igual que $\vec{R}$. Para que la bolita gire con un radio r (igual al de la circunferencia) sabemos que ha de haber una fuerza normal resultante lo bastante grande como para obligarla a ello. En este tramo, P_n va aumentando desde 0 (en B) hasta P (en C), mientras que R va disminuyendo (la bolita va cada vez más lenta y presiona con menos fuerza a la superficie). Sabemos que cuanto mayor sea la rapidez de la bolita mayor tendrá que ser la fuerza normal necesaria para obligarla a girar ($F_{res\ n} = mv^2/r$), por tanto, si en un punto dado de este tramo, la velocidad de la bolita es tan pequeña que solo P_n ya resulta mayor que la fuerza normal necesaria, r disminuirá, es decir, la bolita describirá una curva con un radio menor, por lo que se "despegará" y caerá. Por el contrario, si la rapidez es tal que con solo P_n sería insuficiente para mantenerla en un giro de ese radio, la bolita "tiende" a irse por la tangente (para aumentar r), pero la superficie (curva) no se lo permite ejerciendo sobre ella una fuerza $\vec{R}$ que sumada con $\vec{P}_n$ nos dan la fuerza normal necesaria. A estas mismas conclusiones se pueden llegar manejando la ecuación (2) en la forma:

$$R = m \cdot v^2/r \ + \ P \cdot \cos \varphi$$

En dicha ecuación, $P \cdot \cos \varphi$ es negativo, por lo que mientras que la rapidez de la bolita se mantenga lo bastante grande como para que $m \cdot v^2/r$ sea igual o mayor que el valor absoluto de $P \cdot \cos \varphi$, existirá R (y N) y no caerá (estará interaccionando con la superficie). Pero si en algún momento $m \cdot v^2/r$ nos da menor que $P \cdot \cos \varphi$ (en valor absoluto), tendríamos que la R debería ser negativa, lo cual es imposible ya que ello querría decir (según el sistema de referencia adoptado) que la superficie tiraría de la bolita hacia sí, lo cual es absurdo.

El punto más crítico, como cabía esperar, es el C, ya que es allí donde P_n presenta el mayor valor posible (P). En ese punto la ecuación queda como $R = m \cdot v^2/r - P$ y la rapidez mínima con que se podrá pasar será aquella que R = 0, es decir:

$$0 = m \cdot \frac{v_{min}^2}{r} - mg \rightarrow v_{min} = \sqrt{gr} = 10 \text{ m/s.}$$

¿Cuál será la expresión de la rapidez de la bolita en cualquier punto de la trayectoria?

Podemos utilizar la ecuación (2) sustituyendo en ella la aceleración normal por v^2/r con lo que nos queda que:

R- P cos φ = m· v^2/r   de donde podemos despejar v y obtener: v = $\sqrt{\dfrac{(R - P\cos\varphi)\cdot r}{m}}$

En el punto más alto de la trayectoria φ = 180º con lo que la expresión de v para ese punto en particular será:

$$v = \sqrt{\frac{(R+P)\cdot r}{m}} = \sqrt{\frac{(R+mg)\cdot r}{m}}$$

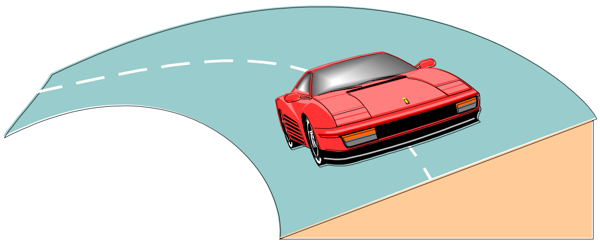
Analizad el resultado obtenido

Podemos ver que si la rapidez aumenta, la fuerza R (y por tanto N) tiene que aumentar (ya que un aumento de v no provoca variación alguna en P ni en el radio), pero si v disminuye, llegará un momento en que R (y por tanto N) valdrá 0, ése será el mínimo valor de v necesario, por debajo del mismo, la bolita no podrá pasar el punto C.

¿Qué ocurriría si en el punto C hiciéramos un agujero del tamaño de la bola?

Si la rapidez con que la bola llega a ese punto fuese la mínima necesaria no ocurriría nada (N = 0), pero si fuese mayor (N >0), se colaría. Esto debe interpretarse como que en ese caso la componente normal del peso sería insuficiente para proporcionar la fuerza normal necesaria para girar con lo que el radio de su trayectoria aumentaría. Este aumento se ve impedido por la superficie, que suministra la fuerza normal que falta, pero, si no hay superficie, nada se opone al aumento de r y la bola se escaparía por el agujero.

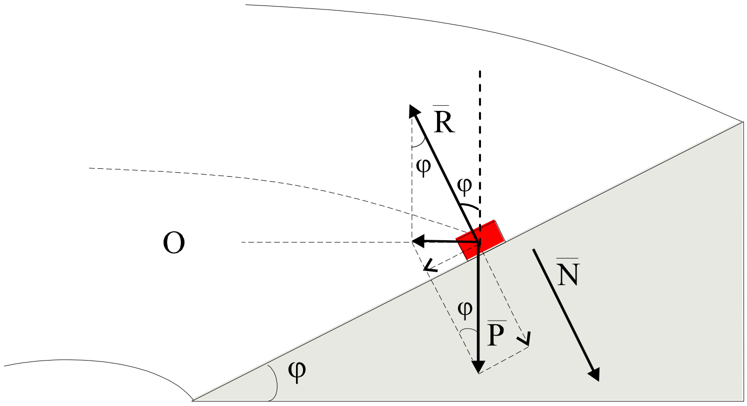
43. Un vehículo de 2000 Kg toma una curva de 20 m de radio y 30° de peralte. Suponiendo que el rozamiento es despreciable, determinad la única rapidez con que podría tomar la curva (con dicho radio). Razonad lo que sucedería si el vehículo tomase la curva con otra rapidez.



Si queremos conocer la rapidez constante a la que el vehículo podrá tomar la curva, debemos considerar que dicho vehículo describe un movimiento circular uniforme, y, en consecuencia, la fuerza resultante que actúa sobre él debe tener solo componente normal (dirección perpendicular a la trayectoria y dirigida hacia su centro O). Las únicas fuerzas que actúan sobre el vehículo son el peso $\vec{P}$ y la fuerza $\vec{R}$ que le ejerce la superficie y dan:

$$\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{R}$$

Conviene señalar que, el móvil no desliza a lo largo del plano que forma la curva peraltada sino que se mueve describiendo una circunferencia y manteniendo siempre la misma altura sobre la base del plano inclinado que se forma al realizar un corte transversal de la curva, tal y como se muestra en el esquema siguiente:



El vehículo, al igual que en la bolita del problema anterior, se encuentra permanentemente "chocando" con la superficie debido, en este caso, a la curva peraltada, lo que le impide seguir una trayectoria rectilínea. Como el vector aceleración solo tiene componente normal y dirigida hacia O, hemos de concluir que la fuerza peso tendrá que anularse con la componente vertical de $\vec{R}$, es decir: P = R cos φ y que el valor de la fuerza resultante que produce el movimiento circular uniforme del vehículo, vendrá dado por $F_{res\ n}$ = R·senφ con lo que aplicando la ecuación fundamental de la dinámica $F_{res\ n} = m \cdot a_n$ tenemos R·senφ = $m \cdot a_n = m \cdot v^2/r$, de donde podemos despejar v:

$$v = \sqrt{\frac{r \cdot R \,\mathrm{sen}\,\varphi}{m}}$$ Para obtener v, necesitamos conocer R

En este caso R se obtiene a partir de la expresión ya vista antes P = R cos φ, de la que R = P/ cos φ = mg/cosφ, y sustituyendo este valor en la expresión anterior nos queda:

$$v = \sqrt{g\,r\,\mathrm{tg}\,\varphi} = 10'8 \text{ m/s}$$

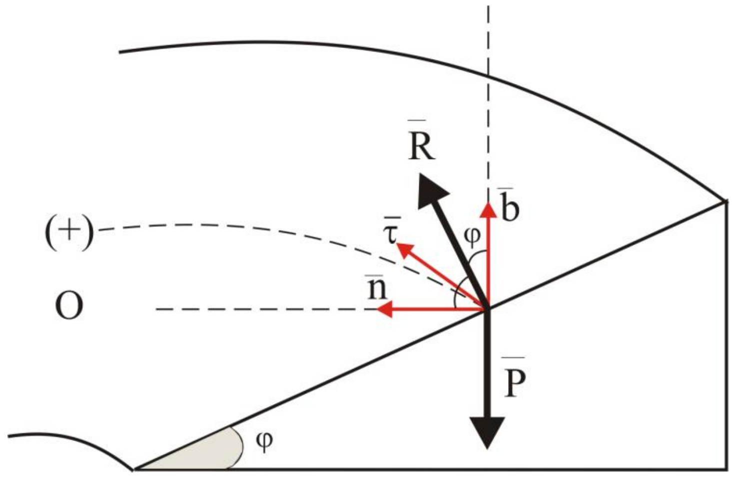
El análisis del resultado obtenido, nos revela en primer lugar que es dimensionalmente homogéneo. Además da cuenta de las siguientes situaciones:

Si el radio de la curva aumenta, también aumentará la rapidez a la que se puede tomar. Sin embargo, cuanto menor sea el peralte menor será la rapidez permitida, de manera que si no hay peralte (ni tampoco rozamiento), no será posible tomar la curva. Finalmente, si ponemos la expresión obtenida en la forma $v^2/r = g \cdot \mathrm{tg}\,\varphi$, nos damos cuenta que para un ángulo de peralte dado solo hay una rapidez posible a la que puede tomarse cada curva ya que si se aumenta (disminuye) v, como el cociente es constante (g ·tg φ), el radio también ha de aumentar (disminuir) y entonces el vehículo se puede salir de la carretera.

¿Cuánto vale la fuerza N que el vehículo ejerce sobre la carretera?

Dicha fuerza valdrá en todo momento lo mismo que la fuerza R que la carretera hace sobre el vehículo, que ya hemos calculado como mg/cosφ. Conviene darse cuenta que el valor obtenido es mayor que el del peso mg (ya que cos φ será inferior a 1). Este resultado es coherente con la idea ya expuesta, de que la curva peraltada al impedir que el móvil siga una trayectoria rectilínea, hace que este realice sobre el suelo una fuerza mayor de la que hace cuando no hay peralte.

Otra forma, más rigurosa, de resolver este mismo problema, es mediante la utilización de los vectores unitarios tangencial $\vec{\tau}$, normal $\vec{n}$ y binormal $\vec{b}$, tal y como se indican en el esquema adjunto:



En el esquema anterior, los vectores unitarios $\vec{n}$ y $\vec{\tau}$ se encuentran en un mismo plano (paralelo a la base del plano inclinado) y el vector $\vec{b}$ es perpendicular a ambos vectores. Podemos expresar los vectores fuerzas en función de dichos vectores unitarios:

$\vec{P}$ = P cos 90º · $\vec{\tau}$ + P cos 90º · $\vec{n}$ + P cos 180º · $\vec{b}$ = - P· $\vec{b}$
$\vec{R}$ = R cos 90º · $\vec{\tau}$ + R cos (90º- φ)· $\vec{n}$ + R cos φ· $\vec{b}$ = R sen φ· $\vec{n}$ + R cos φ· $\vec{b}$

Sumando obtenemos el vector fuerza resultante, que deberá estar dirigido hacia O (el automóvil lleva movimiento circular y uniforme)

$\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{R}$ = R sen φ· $\vec{n}$ + (R cos φ - P) · $\vec{b}$

Como la fuerza resultante no puede tener componente en la dirección del vector binormal, podemos descomponer la ecuación vectorial anterior en las siguientes escalares:

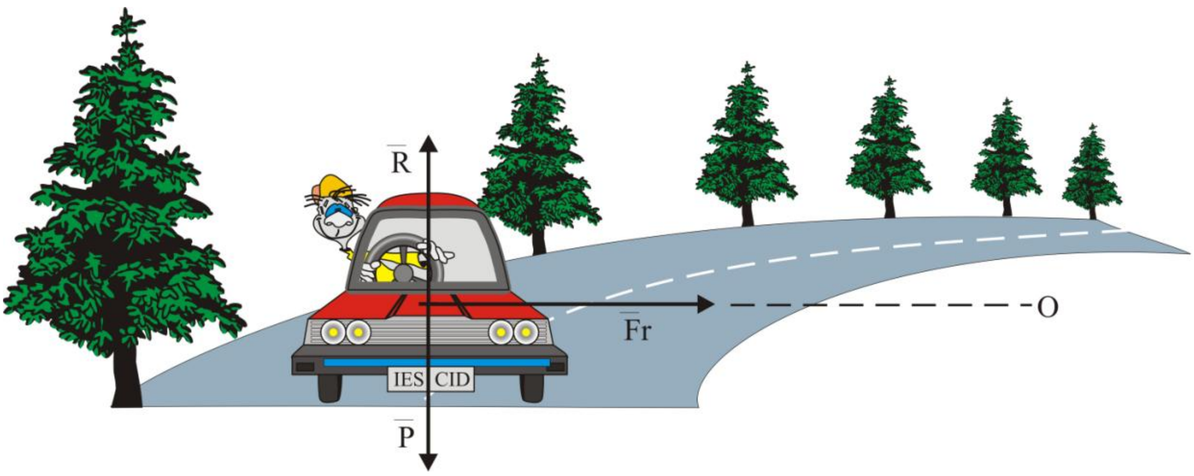
(1) $F_{res\ t} = 0 = m \cdot a_t \rightarrow a_t = 0$
(2) $F_{res\ n} = R \text{ sen } \varphi = m \cdot a_n \rightarrow R \text{ sen } \varphi = m \cdot v^2/r$
(3) $F_{res\ b} = R \cos \varphi - P = 0 \rightarrow R \cos \varphi = P$

Una vez que hemos llegado a estas ecuaciones se procedería igual que hicimos anteriormente para calcular la rapidez a la que se podría tomar la curva.

44. Determinad el ángulo mínimo con que habría que peraltar una curva de 25 m de radio para que un vehículo de 500 Kg pudiese tomarla, sin deslizar, con rapidez de 72 km/h, sabiendo que el coeficiente de fricción es 0’8.

En primer lugar, conviene constatar que únicamente con la fuerza debida al rozamiento (sin peralte), el vehículo no podría tomar una curva de ese radio con la rapidez que se nos indica:

En efecto, sobre una curva sin peraltar actuarían sobre el vehículo las fuerzas $\vec{P}$, $\vec{R}$ y $\vec{F}r$ siendo $\vec{F}r$ la fuerza de rozamiento.



Para que el vehículo describa la curva con movimiento circular uniforme, la fuerza resultante ha de tener la dirección del radio y sentido hacia el centro O de la circunferencia. La fuerza resultante viene dada por:

$$\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}r$$

Como la aceleración no tiene ninguna componente según la vertical, $\vec{P}$ y $\vec{R}$ se tienen que anular (P = R = N) y la fuerza resultante coincidirá con la de rozamiento.

De acuerdo con la ecuación fundamental de la dinámica:

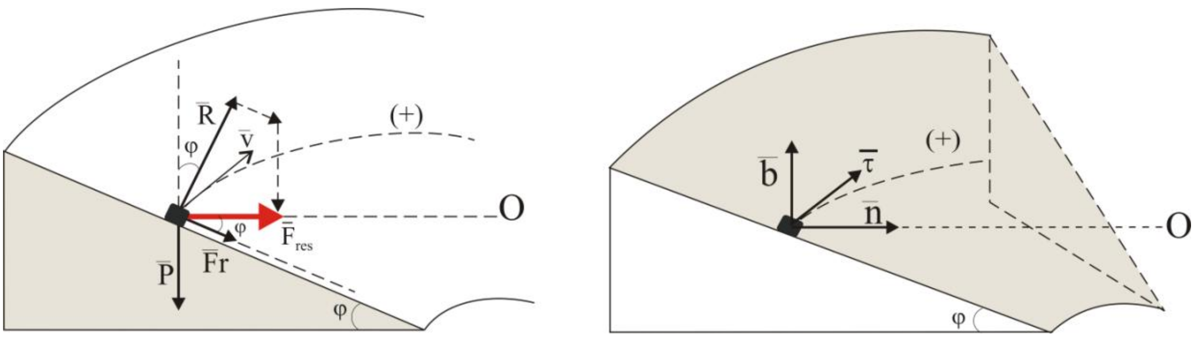
$$F_{res\ n} = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

con lo que sustituyendo obtenemos el valor que debería de tener la fuerza resultante para que el vehículo pudiera dar la curva en las condiciones que se nos impone en el enunciado del problema: $F_{res\ n} = 8000$ N.

¿Qué valor máximo puede tener la fuerza de rozamiento?

Si lo calculamos veremos que $F_{r\ max} = \mu \cdot N = \mu \cdot P = \mu \cdot mg = 4000$ N, por tanto, insuficiente para que el vehículo pueda dar una curva de ese radio con esa rapidez, por lo que será necesario peraltarla para que $\vec{R}$ contribuya también a obtener la fuerza resultante necesaria (ver figuras siguientes).

En las figura adjuntas se puede ver que $\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}r$ pero ahora, $\vec{P} + \vec{R}$ no se anulan sino que sumadas con la fuerza de rozamiento, proporcionan la fuerza resultante necesaria para que el vehículo de la curva con movimiento circular y uniforme.



¿Cómo podemos hallar el peralte que ha de tener la curva para que el vehículo pueda tomarla sin derrapar en las condiciones que se dan en el enunciado?

De acuerdo con el esquema anterior podemos expresar las fuerzas en función de los vectores unitarios tangencial $\vec{\tau}$, normal $\vec{n}$ y binormal $\vec{b}$ y sumar para obtener la fuerza resultante que actúa sobre el vehículo (en cuya expresión ha de figurar el ángulo de peralte). Luego aplicaremos la ecuación fundamental de la dinámica y a partir de la misma trataremos de obtener el valor de φ necesario para dar la curva con movimiento circular y uniforme,

$\vec{P} = -\mathrm{P}\vec{b}$

$\vec{R} = \mathrm{R}\cos(90^\circ - \varphi)\cdot\vec{n} + \mathrm{R}\cos\varphi\cdot\vec{b} = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cdot\vec{n} + \mathrm{R}\cos\varphi\cdot\vec{b}$

$\vec{F}r = \mathrm{Fr}\cos\varphi\cdot\vec{n} + \mathrm{Fr}\cos(90^\circ + \varphi)\cdot\vec{b} = \mathrm{Fr}\cos\varphi\cdot\vec{n} - \mathrm{Fr}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cdot\vec{b}$

$\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}r = (\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\varphi + \mathrm{Fr}\cos\varphi)\cdot\vec{n} + (\mathrm{R}\cos\varphi - \mathrm{P} - \mathrm{Fr}\,\mathrm{sen}\,\varphi)\cdot\vec{b}$

Teniendo en cuenta ahora que la fuerza resultante solo tiene componente normal (el vehículo lleva movimiento circular uniforme), podemos descomponer la ecuación vectorial anterior en las siguientes ecuaciones escalares:

$F_{res\ t} = 0 = m\cdot a_t \rightarrow a_t = 0$

$F_{res\ n} = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\varphi + \mathrm{Fr}\cos\varphi = m\cdot a_n \rightarrow \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\varphi + \mathrm{Fr}\cos\varphi = m\cdot v^2/r$

$F_{res\ b} = \mathrm{R}\cos\varphi - \mathrm{P} - \mathrm{Fr}\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0 \rightarrow \mathrm{R}\cos\varphi - \mathrm{Fr}\,\mathrm{sen}\,\varphi = \mathrm{P}$

Sustituyendo la fuerza de rozamiento por su valor máximo: $\mathrm{Fr} = \mu\cdot\mathrm{N} = \mu\cdot\mathrm{R}$, nos queda:

$\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\varphi + \mu\cdot\mathrm{R}\cos\varphi = m\cdot v^2/r$

$\mathrm{R}\cos\varphi - \mu\cdot\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\varphi = \mathrm{P}$

Dividiendo miembro a miembro nos queda: $\dfrac{\mathrm{sen}\,\varphi + \mu\cdot\cos\varphi}{\cos\varphi - \mu\cdot\mathrm{sen}\,\varphi} = \dfrac{v^2}{rg}$

A partir de la expresión anterior obtenemos que: $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{v^2 - \mu gr}{gr + \mu v^2}$ = 0'35

Así pues: φ = arctg 0'35 = 19'3º

¿Qué ocurriría si no existiese rozamiento? El resultado quedaría como: $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{v^2}{gr}$, que es precisamente el que obtuvimos en el problema anterior (rozamiento nulo).

¿A qué velocidad máxima podríamos tomar la curva considerada en este problema? Si despejamos v en el resultado obtenido, tendremos el valor máximo a que se puede tomar la curva (tengamos en cuenta que hemos sustituido la fuerza de rozamiento por su valor máximo):

$$v_{max} = \sqrt{\frac{gr(\mathrm{tg}\,\varphi + \mu)}{(1 - \mu\,\mathrm{tg}\,\varphi)}} = 20 \text{ m/s}$$

Analizad el resultado anterior. Además de comprobar que la expresión obtenida para la rapidez máxima es dimensionalmente homogénea, podemos ver que:

a) Si el ángulo φ se hiciera 0 (curva sin peralte), la rapidez máxima a la que el vehículo podría tomar la curva sería: $v_{max} = \sqrt{\mu gr}$ = 14'1 m/s

b) Si conservando el peralte, no hubiese rozamiento, la expresión sería: $v = \sqrt{gr\,\mathrm{tg}\,\varphi}$ = 9'3 m/s y representaría la única rapidez a que se podría tomar dicha curva, de manera que todo aumento en la misma supondría un aumento de r (el vehículo se iría hacia afuera de la curva) y viceversa.

c) Si μ + tg φ = 0 (lo que ocurrirá cuando φ = arctg (-μ), es decir para un cierto peralte negativo o curva con pendiente "al revés"), la rapidez máxima será 0 y, por tanto, la curva no se podría tomar ya que a cualquier rapidez se produciría derrape.

¿Quiere esto decir que no se puede circular por ninguna curva cuya inclinación esté hacia el lado contrario al que debería? No necesariamente, ya que la expresión obtenida no prohíbe que se puedan dar curvas con peralte negativo, siempre y cuando μ + tg φ > 0. Sin embargo, este tipo de curvas son muy peligrosas y se puede derrapar a velocidades muy pequeñas.

45. Si el vehículo del problema anterior entrara en la misma curva peraltada con una rapidez de 15 m/s, ¿qué valores presentarían la fuerza de rozamiento y la reacción del plano?

Si el vehículo entra en la curva peraltada de φ = 19'3º, seguro que podrá tomarla ya que, como hemos visto en el problema anterior, la fricción es tal que podría entrar hasta con una rapidez de 20 m/s.

Sabemos también que la rapidez con la que podría tomarse la curva sin necesidad de rozamiento, sería: v = $\sqrt{gr\,\text{tg}\,\varphi}$ = $\sqrt{10\cdot 25\cdot \text{tg}19'3^{o}}$ = 9’3 m/s.

¿Qué sucedería con un vehículo que entrase en la curva con una rapidez menor, igual o mayor de 9’3 m/s?

a) Si la rapidez fuese inferior al valor hallado de 9’3 m/s, el vehículo, además de girar, “tendería” a deslizar hacia abajo por el plano inclinado que forma la carretera y como consecuencia se produciría una fuerza de rozamiento en sentido contrario (hacia arriba del plano) que lo impediría tomando para ello el valor idóneo para que al sumarla con el peso $\vec{P}$ y la fuerza normal $\vec{R}$ que ejerce la superficie nos de la fuerza resultante necesaria para que se produzca un movimiento circular uniforme (fuerza resultante en la dirección de la normal y hacia el centro de la circunferencia descrita).

b) Si la rapidez fuese precisamente 9’3 m/s, la suma de $\vec{P}$ y $\vec{R}$ ya nos da la fuerza resultante necesaria y, por tanto, la fuerza de rozamiento por deslizamiento que se daría sería nula. Si el vehículo tomase la curva peraltada con esa velocidad, no importaría que en la carretera se hubiesen formado placas de hielo.

c) Si la rapidez fuese mayor de 9’3 m/s, el vehículo, además de girar, “tendería” a deslizar hacia arriba por el plano inclinado que forma la carretera, con lo que se produciría una fuerza de rozamiento hacia abajo que “intentaría” impedirlo, tomando para ello el valor idóneo para que al sumarla con el peso $\vec{P}$ y la fuerza normal $\vec{R}$ que ejerce la superficie nos de la fuerza resultante necesaria para que se produzca un movimiento circular uniforme, aunque, como ya sabemos, si la rapidez fuese mayor de 20 m/s esto no se podría conseguir ya que en ese caso el valor máximo que puede tomar la fuerza de rozamiento ya no sería suficiente para conseguir que la resultante tuviera la dirección de la normal.

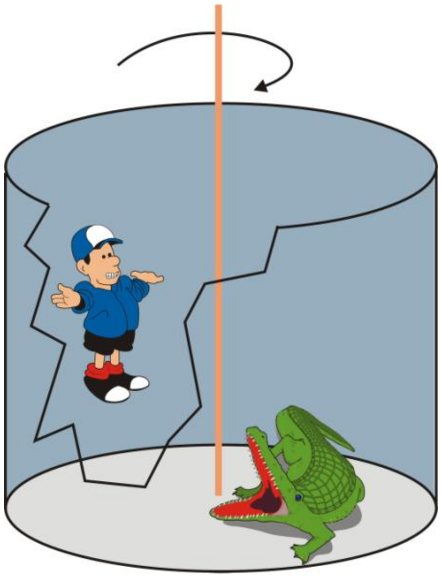
En este problema, la fuerza de rozamiento actuaría hacia abajo (como en el anterior) pero su valor no será el máximo (puesto que entra a menos de 20 m/s). Al tener el mismo sentido, las ecuaciones a utilizar serán las mismas, solo que ahora el dato es el ángulo φ y la incógnita la fuerza de rozamiento Fr.

$R \text{ sen } \varphi + Fr\cdot\cos\varphi = m\cdot v^2/r$
$R \cos\varphi - Fr\cdot\text{sen }\varphi = P$

Despejando R de la segunda ecuación obtenemos: R = $\dfrac{P + Fr\cdot \text{sen}\varphi}{\cos\varphi}$, y sustituyendo en la primera, podemos despejar Fr, con lo que nos queda:

$$Fr = \frac{mv^2}{r}\cdot\cos\varphi - P\text{sen}\varphi = 2594'5 \text{ N.}$$

Sustituyendo ahora este valor en la expresión de R, nos queda: R = 6206’3 N



46. En algunos parques de atracciones existe un "rotor" o cilindro hueco que se pone en rotación alrededor de un eje vertical que pasa por el centro del mismo. Cuando una persona se sitúa dentro de este aparato pegada a la pared, el cilindro va aumentado su rapidez de giro progresivamente hasta que al llegar a un valor predeterminado el suelo baja y, sin embargo, la persona queda pegada a la pared sin caer.

Suponiendo un rotor que tenga un radio de 2'5 m y que el coeficiente de fricción con la pared del mismo sea 0'4, determinad cuál debería de ser la rapidez angular mínima para que una persona pegada a la pared del mismo permaneciese sin caer.

sol : $\sqrt{10}$ rad/s

47. Un móvil de 2 Kg de masa se desplaza según la trayectoria: $\vec{r}$ = (0, 2t, 3) (m si t en s). Determinad su momento cinético respeto del origen de coordenadas y comentad el resultado.

El momento cinético respecto al origen de coordenadas viene dado por el producto vectorial $\vec{L} = \vec{r} x\, \vec{p}$. Como conocemos $\vec{r}$ podremos calcular $\vec{v}$ y por tanto la cantidad de movimiento $\vec{p}$.

$\vec{v}$ =d$\vec{r}$ /dt = (0, 2, 0) m/s. $\vec{p}$ = m·$\vec{v}$ = (0, 4, 0) kg·m/s

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2t & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -12\,\vec{i} \text{ kg·m}^2\text{/s}$$

¿Cómo puede interpretarse el resultado obtenido?

Podemos ver que el momento cinético es constante y dirigido según OX. Se trata de un resultado que cabría esperar si analizamos las implicaciones que tiene el hecho de que la velocidad sea constante. En efecto, si la velocidad es constante quiere decir que no habrá aceleración y que, por tanto, la fuerza resultante $\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}$ y el momento de dicha fuerza respecto al origen de coordenadas $\vec{M} = \vec{r} \text{ x } \vec{F}_{res}$ serán nulos. Ahora bien, como $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$, si $\vec{M}$ = 0, quiere decir que $\vec{L}$ tiene que ser constante, tal y como hemos obtenido anteriormente. Por otra parte, al estar los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ contenidos en el plano YOZ, su producto vectorial deberá dar en la dirección OX.

48. Calculad la expresión del momento cinético respecto del origen de coordenadas para un móvil que describe un movimiento circular y uniforme con centro en dicho origen.

Sol: $\vec{L} = m\,w\,r^2 \cdot \vec{k}$

49. Calculad el momento cinético de una masa puntual m que se mueve con rapidez constante v a lo largo del eje OX+, respecto del punto A (0, y, 0).

sol: $\vec{L}$= (0, 0, mvy)

50. Un cuerpo de 0'2 kg se desplaza con velocidad $\vec{v}$ = (2t, t, 1) m (si t en s). Sabiendo que en el instante inicial se encontraba en el origen, determinad el momento de la fuerza actuante respecto del origen.

¿Cómo puede calcularse la expresión del momento de una fuerza respecto a un punto?

Una posibilidad es manejar la ecuación $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. En este caso no conocemos ni el vector de posición $\vec{r}$ ni la fuerza $\vec{F}$, pero podemos calcularlos a partir de los datos del enunciado:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \int_0^r d\vec{r} = \int_0^t \vec{v} \cdot dt \rightarrow \vec{r} = \int_0^t (2t, t, 1) \cdot dt = (t^2, \frac{t^2}{2}, t)$$

Si ahora tenemos en cuenta que $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = (2, 1, 0)$ m/s^2 y que $\vec{F}$ = m·$\vec{a}$ = (0’4, 0’2, 0) N

podemos ya calcular el momento $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ sin más que efectuar el producto vectorial:

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t^2 & 0'5t^2 & t \\ 0'4 & 0'2 & 0 \end{vmatrix} = (-0'2t, 0'4t, 0)$$

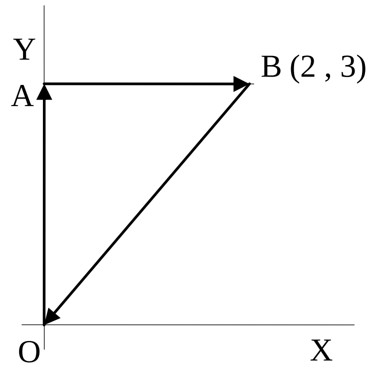
Otra posibilidad de calcular el momento habría sido partir de la expresión $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

A continuación comprobaremos que mediante este otro método obtenemos el mismo resultado al que acabamos de llegar.

$$\vec{L} = \vec{r} x\, \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t^2 & 0'5t^2 & t \\ 0'4t & 0'2t & 0'2 \end{vmatrix} = (-0'1t^2, 0'2t^2, 0) \rightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = (-0'2t, 0'4t, 0)$$

4. TRABAJO Y ENERGÍA

1. Una partícula que se mueve en el plano XY describe bajo la acción de la fuerza $\vec{F}$ = (y^2, -xy) el contorno triangular cerrado de la figura adjunta. Determinad el trabajo realizado por dicha fuerza a lo largo de todo el ciclo. (Se supone todo en unidades del sistema internacional).



El trabajo realizado a lo largo del ciclo lo podemos expresar como:

$W_{F\,O}^{\,O} = \int_O^A \vec{F} \bullet d\vec{r} + \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} + \int_B^O \vec{F} \bullet d\vec{r}$. Se trata, pues, de resolver cada integral y sumar.

Desde O hasta A, x = 0 (nos movemos sobre el eje Y). Lo que cambia es y, que lo hace desde 0 en el punto O hasta 3 en el punto A. Por tanto dx = 0, y dy ≠ 0.

$$\int_O^A \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_O^A (y^2, -xy) \bullet (dx, dy) = \int_0^0 y^2 dx - \int_0^3 xydy = 0 - 0 = 0$$

Desde A hasta B, lo que cambia es x (y = 3 en todo este trozo de trayectoria), que lo hace desde x = 0 en el punto A, hasta x = 2 en el B.

$$\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_A^B (y^2, -xy) \bullet (dx, dy) = \int_0^2 y^2 dx - \int_3^3 xydy = \int_0^2 9dx - 0 = \left[9x\right]_0^2 = 18\,\text{J}$$

Desde B hasta O, cambian x e y, de forma que x varía entre 2 y 0 y la y lo hace entre 3 y 0, todo ello a lo largo de una trayectoria recta.

$$\int_B^O \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_B^O (y^2, -xy) \bullet (dx, dy) = \int_B^O y^2 \cdot dx - \int_B^O xy \cdot dy.$$

Como podemos ver, ninguna de estas dos integrales puede resolverse si no *obtenemos previamente la función que relaciona a las variables x e y.*

Encontrar dicha función es obtener la ecuación de la trayectoria, que, en este caso, se trata de una línea recta que pasa por el origen de coordenadas, por lo que y = mx, siendo m la pendiente de la recta. Particularizando para el punto B, podemos hallar el valor de dicha pendiente: 3 = m·2 con lo que m = 3/2 y la ecuación de la trayectoria y = 3x/2. Diferenciando nos queda que dy = 3dx/2 y sustituyendo en las dos integrales anteriores ya podemos resolverlas:

$$\int_B^O y^2 \cdot dx - \int_B^O xy \cdot dy = \int_3^0 \frac{2}{3} y^2 dy - \int_3^0 \frac{2}{3} y^2 dy = \frac{2}{3}\left[\frac{y^3}{3}\right]_3^0 - \frac{2}{3}\left[\frac{y^3}{3}\right]_2^0 = -6 + 6 = 0 \text{ J}$$

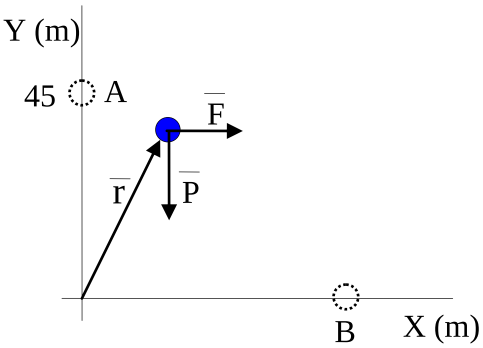
Al calcular estas integrales, hemos tenido en cuenta que el signo de dx y de dy viene implícito en los límites de la integral y, por tanto, no hay que ponerles ningún signo, aunque sepamos que tanto x como y disminuyen conforme nos movemos de B hacia O.

Así, pues, el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de todo el ciclo será:

$$W_{F\,O}^{\;O} = 0 + 18 + 0 = 18 \text{ J}$$

2. Se deja caer un cuerpo de 2 kg desde una altura de 45 m al tiempo que sopla un viento lateral que le ejerce una fuerza horizontal de valor F = 40 -1’2 t (unidades internacionales). Determinad el trabajo realizado por la fuerza resultante que actúa sobre dicho cuerpo desde que se suelta hasta que llega al suelo.

Sobre el cuerpo actúan dos fuerzas: el peso $\vec{P}$, que se considera constante, vertical y hacia abajo, y la fuerza $\vec{F}$ que le ejerce el viento, que es variable y perpendicular al peso. La trayectoria que sigue el cuerpo desde que se suelta en A hasta que llega al suelo en B es, en principio, desconocida, por lo que será necesario manejar magnitudes vectoriales.



El trabajo resultante puede calcularse mediante la expresión:

$$W_{res\,A}^{\;B} = \int_A^B \vec{F}_{res} \bullet d\vec{r} = \int_{x_A}^{x_B} F_{res\,x} \cdot dx + \int_{y_A}^{y_B} F_{res\,y} \cdot dy + \int_{z_A}^{z_B} F_{res\,z} \cdot dz$$

Para ello hemos de obtener en primer lugar la expresión de la fuerza resultante. Utilizando el sistema de coordenadas de la figura anterior, podemos escribir:

$\vec{F}_{res} = \vec{F} + \vec{P} = (40 - 1'2t, 0) + (0, -20) = (40 - 1'2t, -20)$, con lo que el trabajo resultante entre los puntos A y B será:

$$W_{res\,A}^{\;B} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_{x_A}^{x_B} (40 - 1'2t) \cdot dx + \int_{y_A}^{y_B} -20 \cdot dy$$

De las dos integrales anteriores, la primera no podemos resolverla sin hacer un cambio de variable (ni x ni t son constantes), mientras que la segunda no ofrece ninguna dificultad:

$$\int_{45}^{0} -20 \cdot dy = \left[-20y\right]_{45}^{0} = 20 \cdot 45 = 900 \text{ J.}$$

Para resolver la primera integral necesitamos conocer la relación funcional existente entre x y t. *Esto podemos hacerlo hallando la ecuación de la trayectoria en función de t.*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{res}}{m} = \frac{(40 - 1'2t, -20)}{2} = (20 - 0'6t, -10).$$

Teniendo en cuenta que $t_0 = 0$ y $\vec{v}_0 = 0$, podemos integrar para obtener el vector velocidad en cualquier instante:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a} \cdot dt \rightarrow \int_0^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_0^t (20 - 0'6t, -10) \cdot dt \rightarrow \vec{v} = (20t - 0'3t^2, -10t).$$

Considerando que el vector de posición del cuerpo a los 0 s es $\vec{r}_0 = (0,\ 45)\,\text{m}$, podemos integrar de nuevo para obtener $\vec{r} = \vec{r}(t)$:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v} \cdot dt = \int_0^t (20t - 0'3t^2, -10t) \cdot dt \rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = (10t - 0'1t^3, -5t^2)$$

$\vec{r} = (0, 45) + (10t - 0'1t^3, -5t^2) \rightarrow \vec{r} = (10t - 0'1t^3, -5t^2 + 45)$, con lo que la ecuación de la trayectoria será:

$$\left.\begin{aligned} x &= 10t^2 - 0'1t^3 \\ y &= -5t^2 + 45 \end{aligned}\right\} \text{ y diferenciando: } \left.\begin{aligned} dx &= (20t - 0'3t^2)\ dt \\ dy &= -10t \end{aligned}\right\}$$

Tenemos pues la función que nos relaciona la coordenada x con la variable t, con lo que ya podemos hacer el cambio de variable y resolver la integral:

$$\int_{x_A}^{x_B} (40 - 1'2t) \cdot dx = \int_{t_A}^{t_B} (40 - 1'2t) \cdot (20t - 0'3t^2)\ dt.$$

Sabemos que $t_A = 0$, *pero no conocemos* t_B *o instante en que el cuerpo llega al suelo.* Podemos calcularlo si tenemos en cuenta que en ese momento la componente "y" del vector de posición será 0 y, por tanto: $-5t^2 + 45 = 0$, de forma que $t_B = 3$ s. Conociendo los límites, podemos resolver ahora la integral anterior

$$\int_0^3 (40 - 1'2t) \cdot (20t - 0'3t^2) \cdot dt = \int_0^3 (800t - 36t^2 + o'36t^3) \cdot dt = \left[\frac{0'36}{4}t^4 - \frac{36}{3}t^3 + \frac{800}{2}t^2\right]_0^3 =$$

3283’3 J

Con lo que el trabajo resultante desde A hasta B será: W_{res} = 900 + 3283’3 = 4183’3 J

3. Calculad el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$= (x, yz, 2) cuando actúa sobre un cuerpo de masa m que se desplaza a lo largo de la curva: x=2t; y=t^3 ; z=$3t^2$ desde el punto A(0, 0, 0) al punto B(2, 1, 3).

sol: W = 9’125 J.

4. Resolved el ejercicio anterior en el caso en el que el desplazamiento sea a lo largo de la recta que une los puntos A y B.

sol: W = 9 J.

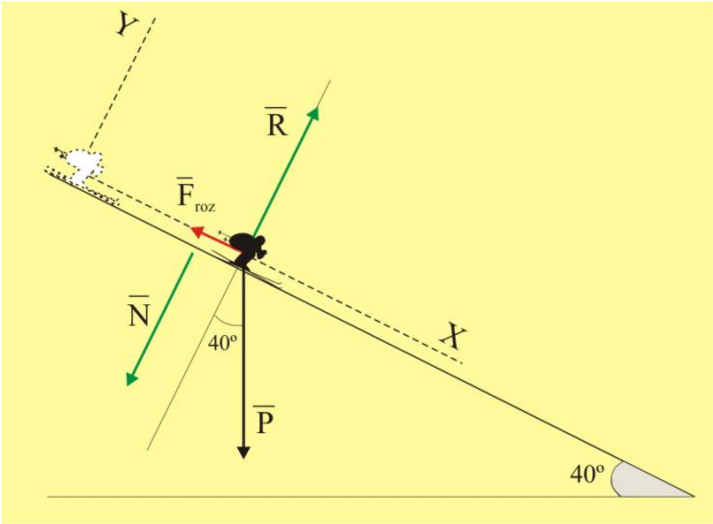
5.Comprobad que en el caso de los 2 ejercicios anteriores, si la fuerza viniese dada por $\vec{F}$=(1, 3, 2) N, el trabajo sería independiente de la trayectoria.

6. Un esquiador de 80 kg se desliza por una pista plana y con una inclinación de 40º. Suponiendo que el coeficiente de rozamiento valga 0’1 y que el esquiador recorra una longitud de 500 m, determinad el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el mismo.

Podemos considerar que a lo largo del desplazamiento, sobre el esquiador actúan tres fuerzas: el peso $\vec{P}$, la fuerza normal $\vec{R}$ que ejerce la superficie y la fuerza de rozamiento $\vec{F}_r$. Todas ellas tienen módulo constante y forman un ángulo también constante con el desplazamiento. Por tanto, para calcular el trabajo podremos utilizar la expresión:

$$W = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$$

en la que, el trabajo se calcula como el producto escalar de los vectores fuerza y desplazamiento. En este caso, el vector desplazamiento será tangente al plano y dirigido hacia abajo, de manera que su módulo coincidirá con la distancia recorrida por el esquiador. Por otra parte, como la trayectoria se supone rectilínea, la velocidad solo puede cambiar de módulo y la fuerza resultante (si no es nula) deberá ser tangente a la trayectoria y en el mismo sentido que el desplazamiento.



Aplicando la expresión anterior a cada una de las fuerzas actuantes tendremos:

$W_{P\,A}^{\;B} = \vec{P} \bullet \Delta\vec{r} = P \cdot \Delta r \cdot \cos 50^o = 800 \cdot 500 \cdot \cos 50^o = 257.115$ J

$W_{R\,A}^{\;B} = \vec{R} \bullet \Delta\vec{r} = R \cdot \Delta r \cdot \cos 90^o = 0$ J

$W_{Fr\,A}^{\;B} = \vec{F}_r \bullet \Delta\vec{r} = Fr \cdot \Delta r \cdot \cos 180^o = - Fr \cdot \Delta r$, donde $Fr = \mu N$

Para determinar el valor de N, hemos de tener en cuenta que N = R (principio de acción y reacción) y que, como la componente normal de la aceleración es nula (la trayectoria es rectilínea), R ha de valer lo mismo que $P_n = mg \cos 40^o$, con lo que $Fr = \mu\, mg \cos 40^o$.

$W_{Fr\,A}^{\;B} = - Fr \cdot \Delta r = - \mu\, mg \cos 40^o \cdot \Delta r = -30.641'8$ J

¿Cómo podemos hallar el trabajo realizado por la fuerza resultante?

Una posibilidad es determinar primero la fuerza resultante y después calcular el trabajo que realiza a lo largo del desplazamiento fijado:

$$\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_r = (P\cos 50^o,\ P\cos 140^o) + (R\cos 90^o,\ R\cos 0^o) + (F_r\cos 180^o,\ F_r\cos 90^o)$$

$$\vec{F}_{res} = (mg\cos 50^o - F_r,\ R - mg\cos 40^o) = (mg\cos 50^o - \mu\, mg\cos 40^o,\ R - mg\cos 40^o)$$

$$W_{res\,A}^{\;B} = \vec{F}_{res} \bullet \Delta\vec{r} = (mg\cos 50^o - Fr,\ R - mg\cos 40^o) \cdot (\Delta r,\ 0)$$

$$W_{res\,A}^{\;B} = (mg\cos 50^o - \mu\, mg\cos 40^o) \cdot \Delta r$$

y sustituyendo nos queda: $W_{res\,A}^{\;B} = 226.473'2$ J.

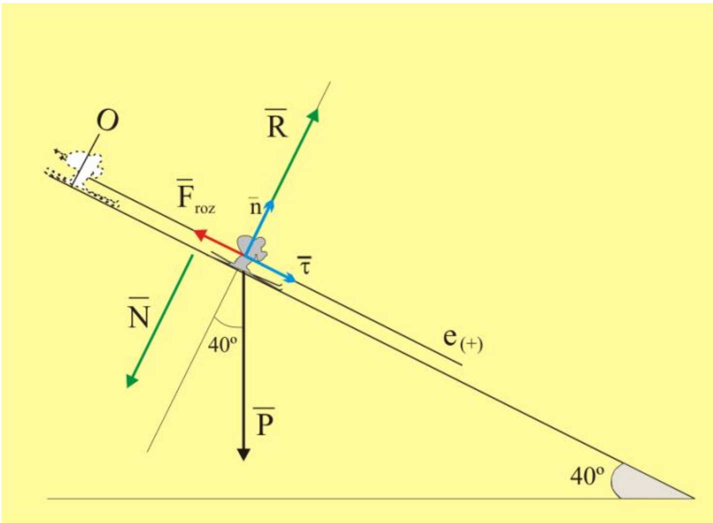
Otra posibilidad es sumar cada uno de los trabajos correspondientes a las distintas fuerzas actuantes (ya que, en casos como el que nos ocupa, el trabajo total coincide con el trabajo realizado por la fuerza resultante):

$$W_{res}{}_A^B = W_P{}_A^B + W_R{}_A^B + W_{Fr}{}_A^B = 257.115 - 30.641'8 = 226.473'2 \text{ J.}$$

El problema también puede resolverse si en lugar de calcular el trabajo como el producto escalar de la fuerza y el desplazamiento $W = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$, utilizamos la expresión equivalente:

$$W = F_t \cdot \Delta e$$

en la que F_t es la componente escalar tangencial del vector fuerza, que será positiva o negativa según lo sea el coseno del ángulo que forme el vector $\vec{F}$ con el vector unitario $\vec{\tau}$ (siempre tangente a la trayectoria y en el sentido tomado como positivo), y el Δe es el desplazamiento espacial, que será positivo o negativo dependiendo de que el espacio e aumente o disminuya.



Aplicando la expresión anterior a cada una de las fuerzas tendremos:

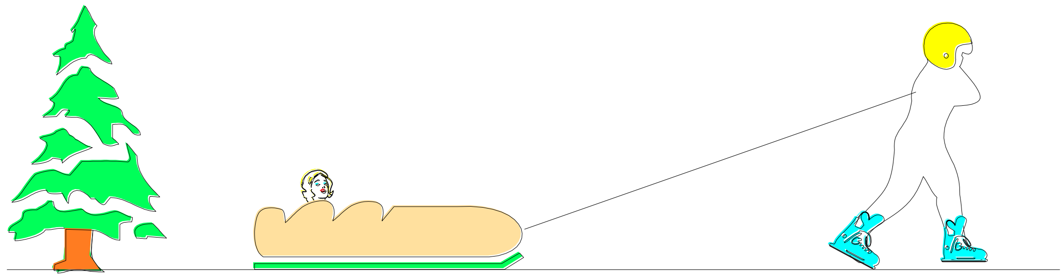
$$W_P{}_A^B = P_t \cdot \Delta e = P \cos 50^\circ \cdot \Delta e = mg\, \Delta e \cos 50^\circ = 800 \cdot 500 \cdot \cos 50^\circ = 257.115 \text{ J}$$

$$W_R{}_A^B = R_t \cdot \Delta e = R \cos 90^\circ = 0 \text{ J}$$

$$W_{Fr}{}_A^B = Fr_t \cdot \Delta e = Fr \cos 180^\circ \cdot \Delta e = - Fr \cdot \Delta e = - \mu\, N \cdot \Delta e = - \mu\, mg \cos 40^\circ \cdot \Delta e = -30.641'8 \text{ J}$$

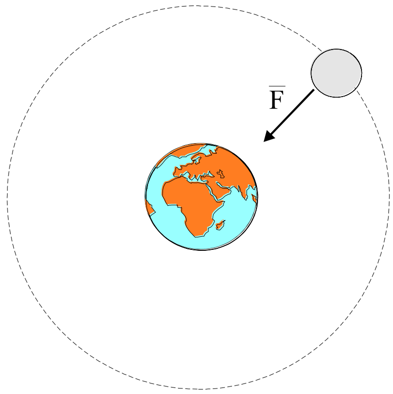
Para calcular el trabajo realizado por la fuerza resultante se procedería de forma análoga a como hicimos anteriormente.

7. Una persona arrastra por el suelo un trineo mediante una cuerda, que forma un ángulo de 30º con la horizontal, recorriendo una distancia de 5 m. Si la tensión de la cuerda es de 200 N, ¿qué trabajo realizará?



sol: 870 J

8. Admitiendo que la Luna tiene una masa 81 veces menor que la de la Tierra y que gira alrededor de nuestro planeta con un movimiento circular uniforme de 384.000 km de radio dando una vuelta completa cada 27'3 días. Calculad el trabajo realizado por la fuerza con que la Tierra la atrae, cuando la Luna haya recorrido la mitad de su órbita (El esquema no está a escala).



sol: 0 J.

9. Sobre un cuerpo actúa una fuerza $\vec{F}$ = (- 400x, 0, 0) N (si x en m). Calculad el trabajo realizado por dicha fuerza cuando el cuerpo se desplaza desde el punto A (5, 0, 0) cm al punto B (0, 0, 0) cm. ¿Será necesario conocer la trayectoria?.

Dado que tenemos el vector fuerza expresado según sus componentes cartesianas y que no se trata de una fuerza constante, utilizaremos para calcular el trabajo la expresión:

$$W_{F\,A}^{\;\;B} = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z dz$$

donde F_x, F_y y F_z son las componentes cartesianas escalares (positivas o negativas) del vector fuerza $\vec{F}$. <u>Conviene recordar que en estas integrales a dx, dy y dz no se les pone nunca signo, ya que éste se halla implícito en los límites de la integral</u>.

Sustituyendo los datos nos queda: $W_{F\,A}^{\;\;B} = \int_{0'05}^{0} -400x \cdot dx$ = 0'5 J

Como vemos, las integrales anteriores se pueden resolver sin necesidad de conocer la forma que tiene la trayectoria, por lo tanto, sea cual sea la forma de la trayectoria seguida por el cuerpo cuando se desplaza desde A hasta B, el trabajo siempre valdrá 0'5 J.

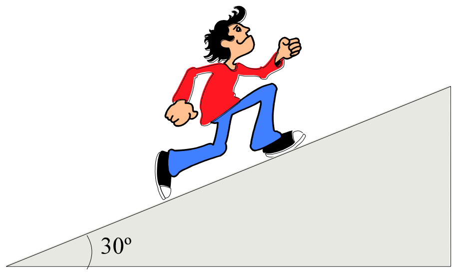
10. Dad el coste del consumo energético mensual de una plancha de 1200 W que funciona una media de 0'7 horas al día. (Suponed que 1 kWh cuesta 0'125 € y un mes de 30 días).

sol: 3'15 €

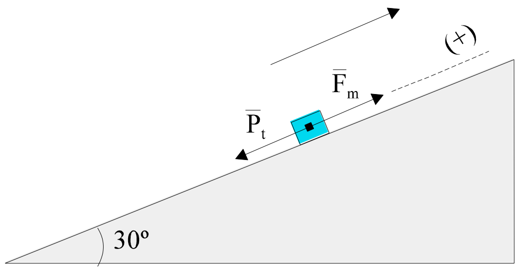
11. El motor de un ascensor dispone de una potencia máxima de 10 kW. Sabiendo que la caja del mismo tiene una masa de 300 kg, determinad la máxima rapidez con que podría ascender.

sol: v = 3’33 m/s

12. una persona de 80 kg sube por una cuesta de 30º con rapidez constante de 3’6 km/h. Calculad la potencia que desarrolla. (Se supone nulo el rozamiento con el aire).



Para que la persona pueda subir la cuesta con velocidad constante, la fuerza resultante que actúa sobre ella ha de ser nula. Llamaremos fuerza motriz $\vec{F}_m$ a la fuerza paralela al plano que la hace ascender.



Como las fuerzas perpendiculares al desplazamiento no realizan ningún trabajo (cos 90º = 0), solo nos interesan las componentes tangenciales de todas las fuerzas que actúan. En este caso, se desplaza con movimiento uniforme, luego $a_t = 0$.

Así pues, la componente tangencial de la fuerza resultante es nula: $F_{res\ t} = 0$. Como $F_{res\ t} = F_m - P_t$, nos queda que para que la persona ascienda con movimiento uniforme debe existir una fuerza motriz de módulo $F_m = P_t$ y en sentido ascendente.

¿Cómo podemos calcular la potencia que desarrolla?

La potencia que desarrolle la persona vendrá dada por el trabajo que realice la fuerza motriz, por unidad de tiempo. Como en este caso las fuerzas son constantes y el movimiento rectilíneo y uniforme, podemos calcular el valor de dicha potencia mediante:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\vec{F}_m \bullet \Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{F}_m \bullet \vec{v} = F_m \cdot v \cdot \cos 0^o = P_t \cdot v = mg\ sen30^o \cdot v = 400\ W$$

Analizad la expresión literal obtenida

La expresión obtenida para la potencia nos relaciona la misma con el valor de la fuerza motriz y de la velocidad, de manera que, cuando se mantenga constante una potencia determinada (por ejemplo la máxima posible), si se aumenta la fuerza motriz la velocidad disminuirá y viceversa. La persona puede subir una cuesta de mayor pendiente con la misma potencia, pero para ello ha de disminuir la velocidad con que asciende.

En general, muchos vehículos tienen distintas marchas que para una misma potencia, son capaces de desarrollar más o menos velocidad. Las marchas cortas pueden hacer que la fuerza motriz sea muy grande, pero en cambio la velocidad es más pequeña, mientras que con las largas sucede lo contrario. Por este motivo, cuando se precisa realizar un adelantamiento rápido se recomienda cambiar a una marcha más corta (para conseguir mayor fuerza motriz y, por tanto, mayor aceleración).

Para terminar. ¿Quién ejerce la fuerza motriz que actúa sobre la persona?(recordad lo que dice el principio de acción-reacción).

13. La persona del ejercicio anterior asciende con una aceleración de 0'1 m/s^2, partiendo con rapidez nula desde la base. ¿Qué potencia instantánea desarrolla a los 3 s? ¿Cuál será la potencia media desarrollada en estos 3 s?

Para que suba la cuesta con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, será necesario que sobre la persona actúe una fuerza resultante tangente al plano, dirigida hacia arriba y de módulo constante. Si, al igual que en el ejercicio anterior, tomamos como sentido positivo el del movimiento, podemos escribir:

$$F_{res\ t} = m \cdot a_t \rightarrow F_m - P_t = m \cdot a_t \rightarrow F_m = m \cdot a_t + P_t = m \cdot a_t + mgsen30^o$$

¿Cómo puede calcularse la potencia que se está desarrollando en un instante dado?

La potencia instantánea es una magnitud que indica “lo aprisa” que se está realizando trabajo en un momento dado y se calcula derivando el trabajo respecto al tiempo:

$$P_i = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}_m \bullet d\vec{r}}{dt} = \vec{F}_m \bullet \vec{v}$$

Teniendo en cuenta que en este caso, la fuerza motriz y la velocidad tienen la misma dirección y sentido, y que se trata de un movimiento uniformemente acelerado, nos queda:

$$P_i = F_m \cdot v \cdot \cos 0^o = F_m \cdot v = (m \cdot a_t + mg\ sen30^o) \cdot (v_0 + a_t \cdot t)$$

Sustituyendo, obtenemos Pi = 122'4 W.

La expresión obtenida, nos permite comprobar que la potencia desarrollada, en las condiciones que se fijan en el enunciado del problema, depende del tiempo, de forma que su valor irá aumentando regularmente con el tiempo.

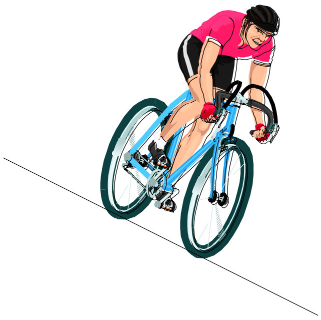
Si la potencia va cambiando con el tiempo ¿cómo podemos determinar su valor medio durante los tres primeros segundos?

Como en este caso la potencia varía linealmente con el tiempo, su valor medio entre dos instantes cualesquiera, se podrá determinar mediante la semisuma de los valores de la potencia inicial y final. No obstante, es mejor aplicar el procedimiento general, que consiste en calcular el trabajo realizado y dividirlo por el intervalo de tiempo correspondiente:

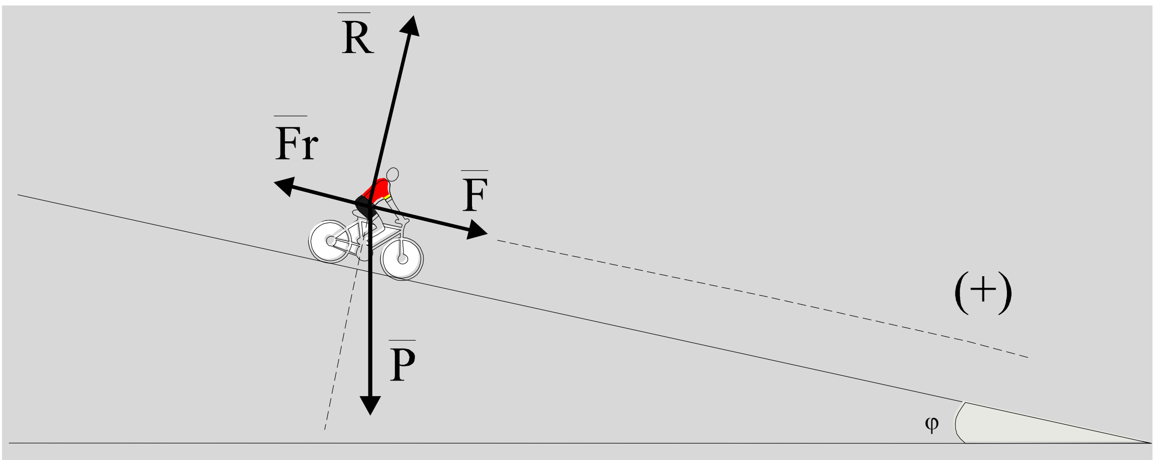
$dW = P_i \cdot dt \rightarrow W = \int_0^t P_i \cdot dt$, con lo que:

$$P_m = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\int_0^t P_i \cdot dt}{\Delta t} = \frac{(m \cdot a_t + mg \cdot sen30^o) \cdot (v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2})}{3}$$ y sustituyendo: $P_m = 61'2$ W

14. Un ciclista de 65 kg de masa utilizando una bicicleta de 10 kg, desciende por una carretera cuya pendiente es del 6% con una rapidez constante de 72 km/h. Determinad la fuerza de rozamiento que le está haciendo el aire, sabiendo que para mantener constante esa rapidez el ciclista ha de estar suministrando continuamente una potencia de 500 W. (La pendiente de una carretera nos da los metros de desnivel por cada 100 que se recorren).



Hablamos de "potencia suministrada" porque se mide únicamente la energía que por unidad de tiempo recibe el conjunto ciclista-bicicleta. Las fuerzas que actúan sobre el sistema ciclista-bicicleta son $\vec{F}, \vec{P}, \vec{R}$, y $\vec{Fr}$ (fuerza motriz, peso, fuerza normal y fuerza de rozamiento con el viento, respectivamente), según se aprecia en la figura adjunta:



Como es un movimiento de trayectoria conocida podemos trabajar escalarmente, considerando las componentes escalares tangencial y normal de las distintas fuerzas:

$F_{res\,t} = m \cdot a_t \rightarrow F + P_t - Fr = m \cdot a_t$. Por ser un movimiento uniforme $a_t = 0 \rightarrow Fr = F + P_t$ (1)
$F_{res\,n} = m \cdot a_n \rightarrow P_n - R = m \cdot a_n$. Por ser un movimiento rectilíneo $a_n = 0 \rightarrow R = P_n$ (2)

La fuerza Fr debida a la fricción con el aire, podemos calcularla a partir de la ecuación (1) si determinamos primero F y P_t. La fuerza F se puede obtener mediante la relación que liga la potencia con la velocidad, que en este caso, como en los dos ejercicios anteriores, viene dada por $P = F \cdot v$ (porque el ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{v}$ es 0º), con lo que $F = P/v$. La componente tangencial del peso vale $P_t = mg\, sen\varphi$. Sustituyendo en (1):

$Fr = F + P_t = P/v + mg\, sen\varphi = 25 + 45 = 70$ N.

15. Determinad la fuerza de frenado (por efecto del aire) que sufre un vehículo de 1200 kg sabiendo que, para mantener constante una rapidez de 72 km/h al ascender por una carretera que tiene una pendiente del 13 %, debe desarrollar una potencia constante de 60 CV. (1 CV = 735 W).

sol: 645 N

16. Sobre un cuerpo de 2 kg de masa, inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal, se ejerce una fuerza de 20 N paralela a la superficie. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la superficie es de 0'2, determinad el incremento de energía cinética cuando dicho cuerpo se haya desplazado 3 m.

sol: $\Delta E_c = 48$ J.

17. Se eleva un cuerpo de 15 kg de masa, mediante una fuerza igual a su peso. Calculad la variación de energía cinética que sufrirá cuando haya recorrido 10 m.

sol: $\Delta E_c = 0$ J.

18. Probad, aplicando el teorema del trabajo-variación de energía cinética, que si un cuerpo describe un movimiento circular y uniforme, la fuerza resultante sobre él ha de ser, en todo momento, perpendicular a la trayectoria.

19. Sea un cuerpo de 4 kg de masa sobre el que actúan varias fuerzas. Determinad de tantas formas como sea posible, el trabajo realizado por la fuerza resultante entre los instantes 1 y 2 segundos, sabiendo que su vector de posición viene dado por la expresión $\vec{r} = \frac{t^3}{3}\vec{i} + 2\vec{j} + (t-1)^2\vec{k}$ m (si t en s).

Si llamamos estados A y B a las situaciones en los instantes 1 s y 2 s, el trabajo realizado por la fuerza resultante se podrá evaluar aplicando:

$$W_{res\,A}^{\;B} = \int_A^B \vec{F}_{res} \bullet d\vec{r}$$

¿Cómo podríamos determinar la fuerza resultante?

Podemos obtenerla a partir de la aceleración ya que $\vec{F}_{res} = m\cdot\vec{a}$ y la aceleración se obtiene a partir de $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \left[t^2,\ 0,\ 2(t-1)\right] \rightarrow \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = (2t,\ 0,\ 2)$ m/s^2, con lo que nos queda: $\vec{F}_{res}$ = (8t, 0, 8).

Sustituyendo este valor en la expresión del trabajo $W_{res\,A}^{\ \ B} = \int_A^B \vec{F}_{res} \bullet d\vec{r}$ tenemos:

$W_{res\,A}^{\ \ B} = \int_A^B 8t\cdot dx + \int_A^B 8\cdot dz$. *¿Cómo podemos resolver estas integrales?*

En la primera de las integrales anteriores existen dos variables, por lo que para poder resolverla, será necesario un cambio de variable para reducirlas a una sola. La relación funcional entre las variables la determina la ecuación de la trayectoria.

$x = t^3/3 \rightarrow dx = t^2\cdot dt$
$y = 2$
$z = (t-1)^2 \rightarrow dz = (2t-2)\cdot dt$

$W_{res\,A}^{\ \ B} = \int_1^2 8t\cdot t^2\cdot dt + \int_1^2 8\cdot(2t-2)\cdot dt$ = 30 + 24 - 16 = 38 J.

¿De qué otra forma podríamos haber resuelto el problema?

Otro de método de resolución consistiría en utilizar la expresión que relaciona directamente el trabajo resultante con la variación de energía cinética (antiguamente conocido como teorema de las fuerzas vivas), aplicándola entre los estados A y B:

$$W_{res\,A}^{\ \ B} = Ec_B - Ec_A = \frac{m\cdot v_B^2}{2} - \frac{m\cdot v_A^2}{2}$$

Tanto v_B como v_A se pueden obtener a partir de la expresión del vector velocidad $\vec{v} = \left[t^2,\ 0,\ 2(t-1)\right]$ sustituyendo t por los valores correspondientes:

$\vec{v}_A$ = (1, 0, 0) m/s $\rightarrow v_A$ = 1 m/s
$\vec{v}_B$ = (4, 0, 2) m/s $\rightarrow v_B = \sqrt{20}$ m/s

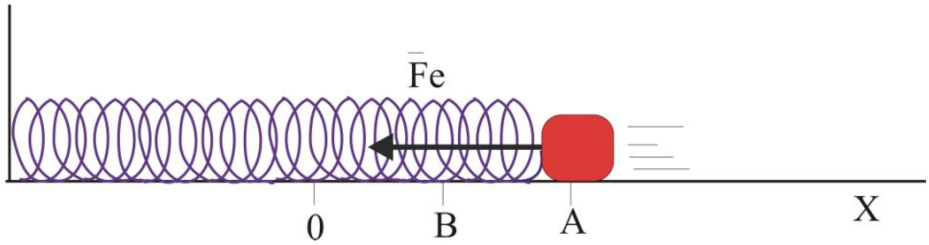
Sustituyendo ahora los valores numéricos en la expresión del trabajo, nos queda:

$$W_{res\,A}^{\ \ B} = Ec_B - Ec_A = \frac{m\cdot v_B^2}{2} - \frac{m\cdot v_A^2}{2} = 2\cdot 20 - 2 = 38 \text{ J}$$

20. Deducid la expresión de la energía potencial gravitatoria del sistema formado por un cuerpo de masa m (situado a una pequeña altura sobre el suelo) y la Tierra.

sol: $E_p = mg_0h + C$ (siendo C una constante, m la masa del cuerpo y g_0 la intensidad del campo gravitatorio terrestre en la superficie del planeta).

21. Calculad la expresión de la energía potencial elástica de un resorte de constante elástica K.



En el sistema de la figura cuando el muelle tiene su longitud normal (relajado) su extremo de la derecha se encuentra en x = 0. Vamos a analizar lo que ocurre cuando al extremo libre del muelle sujetamos un bloque, estiramos hasta llevarlo a una posición a la derecha de A y luego lo dejamos en libertad. Los valores de x representan la elongación del muelle y son positivos a la derecha del punto 0 y negativos a su izquierda. Cuando el bloque de masa m se desplaza hacia la izquierda sometido a la acción de la fuerza elástica $\vec{F}e$ y nos centramos en lo que pasa entre las posiciones A y B, podemos decir que dicha fuerza realiza un trabajo positivo (la fuerza tiene el mismo sentido que el desplazamiento), cuyo valor se puede determinar como:

$$W_{FeA}^{\ B} = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_{x_A}^{x_B} F_x \cdot dx = \int_{x_A}^{x_B} -Kx \cdot dx = -\left(\frac{Kx_B^2}{2} - \frac{Kx_A^2}{2}\right)$$

Analizando el resultado obtenido podemos ver que el trabajo realizado por la fuerza elástica entre las posiciones A y B, se expresa como la diferencia entre lo que vale la función $Kx^2/2 + C$ (donde C es una constante) en el primer punto A y lo que vale esta misma función en el segundo punto B. Dicha función, para un muelle dado, solo depende del valor de x, lo que nos muestra que la fuerza elástica es una fuerza conservativa (el trabajo que realiza entre dos puntos dados, no depende de la trayectoria seguida). Designaremos, pues, a esa función como energía potencial elástica Ep.

Conviene darse cuenta de que la energía potencial es una función indeterminada (no sabemos lo que vale la constante C). Sin embargo esto lo único que quiere decir es que no tiene sentido hablar de valores absolutos de la energía. La principal utilidad de la función Ep es que al ser una función de estado (depende de la posición), permite calcular fácilmente el trabajo realizado por la fuerza conservativa asociada a dicha energía potencial, mediante la expresión general:

$$Wc_A^B = -\Delta Ep_A^B = -(Ep_B - Ep_A) = Ep_A - Ep_B$$

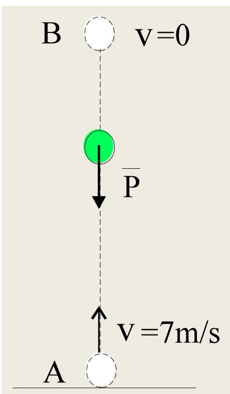
Así pues, lo que medimos siempre, son variaciones de energía y no valores absolutos de la misma. No obstante, si adoptamos el criterio de asignar el valor 0 a la energía potencial elástica del muelle cuando este se encuentra relajado (es decir, cuando x = 0), tenemos que $Ep_0 = 0 + C \rightarrow C = 0$, es decir la constante C queda determinada y podemos referirnos a la energía potencial elástica del muelle en cualquier posición como:

$\frac{Kx^2}{2}$. Aunque lo que en realidad significa esta expresión es que si el muelle pasara de encontrarse distendido (extremo libre del mismo en la posición x = 0) a otra situación de compresión o alargamiento (extremo libre en una posición cualquiera x distinta de 0) la energía potencial elástica aumentaría justamente en $\frac{Kx^2}{2}$.

22. Se lanza un cuerpo de 8 kg de masa, verticalmente hacia arriba, con rapidez de 7 m/s. Determinad la altura que alcanzará en los siguientes casos: a) no existe rozamiento con el aire; b) durante el ascenso pierde una energía de 80 J por el rozamiento. ¿Cómo sería la energía cinética con la que llegaría al suelo en cada uno de los casos anteriores?

Si despreciamos el efecto del rozamiento con el aire, podemos suponer que la energía cinética inicial del cuerpo va disminuyendo conforme este asciende debido al trabajo negativo que realiza sobre él la fuerza peso ($\vec{P}$ forma un ángulo de 180º con el desplazamiento) hasta llegar a un punto en el que dicha energía cinética será nula, habiendo alcanzado el cuerpo su máxima altura respecto al punto de lanzamiento. Como el cuerpo sigue sometido a la misma fuerza $\vec{P}$, esta le hace descender realizando ahora el mismo trabajo que antes pero positivo (formará un ángulo de 0º con el desplazamiento), lo que causará un aumento de la energía cinética, de forma que, cabe pensar que el cuerpo llegue de vuelta al punto de lanzamiento con la misma energía cinética con que partió.

Para resolver el ejercicio mediante consideraciones de trabajo y energía, hemos de establecer (a conveniencia) dos estados A y B entre los cuales aplicaremos la expresión:



$$(1)\quad W_{res}{}_A^B = \Delta Ec$$

Seleccionaremos como estado A, el correspondiente a cuando el cuerpo sale (porque de él tenemos información) y como estado B el que se encuentra el cuerpo cuando alcanza la máxima altura (porque de él nos piden información). La ecuación anterior puede escribirse como:

$$(2)\quad W_{res}{}_A^B = W_c{}_A^B + W_{nc}{}_A^B = \Delta Ec$$

en la que $W_c{}_A^B$ representa el trabajo realizado por las fuerzas conservativas que actúan sobre el cuerpo desde la posición A a la B y $W_{nc}{}_A^B$ el que realizan las fuerzas no conservativas. Como en nuestro caso, la única fuerza que actúa es el peso y esta es conservativa, nos queda que:

$$(3)\quad W_c{}_A^B = W_P{}_A^B = \Delta Ec$$

Esta ecuación puede servirnos para calcular la altura h_B alcanzada por el cuerpo si conseguimos expresar el trabajo realizado por la fuerza peso en función de dicha altura.

¿Cómo podemos calcular el trabajo que realiza la fuerza peso?

Como siempre que la fuerza sea conservativa, habrá dos formas:

a) Aplicando la expresión del trabajo realizado por una fuerza (en este caso constante):

$$W_{P_A}^{\ B} = \vec{P} \bullet \Delta\vec{r} = P \cdot \Delta r \cdot \cos 180^{o} = -mgh_B$$

b) En función de la variación de la energía potencial a la que está asociada dicha fuerza.:

$$W_{P_A}^{\ B} = -\Delta Ep_A^B = -(Ep_B - Ep_A) = -mgh_B$$

En este ejercicio no tiene mayor importancia realizar el cálculo de una forma u otra, pero en otros casos el cálculo del trabajo realizado puede ser mucho más complejo (por ejemplo, si la trayectoria seguida no es rectilínea) y, si la fuerza es conservativa, el hecho de que el trabajo pueda calcularse simplemente restando dos valores de la energía potencial, supone una gran ventaja.

Sustituyendo ahora en la ecuación (3) y teniendo en cuenta que $v_B = 0$, nos queda:

$$-\ mgh_B = 0 - \frac{mv_A^2}{2} \text{ o lo que es lo mismo: } \frac{mv_A^2}{2} = mgh_B$$

¿Cómo puede interpretarse la ecuación que acabamos de obtener?

Toda la energía cinética inicial del lanzamiento, se ha transformado en energía potencial gravitatoria cuando el cuerpo alcanza la máxima altura

Obtened la altura máxima alcanzada y analizad el resultado obtenido

Despejando h_B de la expresión anterior, obtenemos que: $\boxed{h_B = \frac{v_A^2}{2g}} \rightarrow h_B = 2'45$ m

En primer lugar, vemos que el resultado literal obtenido es dimensionalmente homogéneo (L en ambos miembros). Por otra parte, nos damos cuenta de que contempla algunos casos evidentes, como por ejemplo, que si $v_A = 0$, la altura será 0; que si no hubiese gravedad la altura alcanzada por el cuerpo sería infinita (no habría nada que le frenase); si v_A aumenta, la altura máxima aumentará, etc. Además, podemos comprobar que en este caso, la masa del cuerpo no influye, es decir, un guijarro o un gran peñasco, alcanzarán la misma altura siempre que se lancen hacia arriba con la misma velocidad y en ausencia de rozamiento.

Comprobad que la energía cinética del cuerpo cuando llega de vuelta al punto de partida es la misma con que salió.

Basta con aplicar (ahora desde B hasta A): $W_{res\,B}^{\ \ A} = \Delta Ec_B^A = Ec_A - Ec_B = Ec_A = \frac{mv_A^2}{2}$

Teniendo en cuenta de nuevo que la única fuerza es el peso y que se trata de una fuerza conservativa: $W_{res\,B}^{\ \ A} = W_{P\,B}^{\ A} = -\Delta Ep_B^A = mgh_B$

Con lo que finalmente obtenemos que: $mgh_B = \dfrac{mv_A^2}{2}$

Es decir, toda la energía potencial gravitatoria correspondiente a la situación B, se ha transformado en energía cinética en el instante en que el cuerpo vuelve al punto desde donde se lanzó.

¿Cómo cambia el problema si no hacemos la simplificación de considerar la fricción con el aire despreciable?

En ese caso, ya no puede pensarse en que la energía cinética con que sale el cuerpo sea la misma que con la que vuelve, ya que la fuerza de rozamiento es no conservativa. El trabajo realizado por este tipo de fuerzas a lo largo de una trayectoria cerrada es siempre negativo y esto hace que la energía mecánica con que vuelve el cuerpo al punto de partida sea siempre menor que la energía con la que salió.

Ahora en el ascenso actúan dos fuerzas, el peso $\vec{P}$ y la fuerza de rozamiento $\vec{F}r$. Ambas tienen sentido contrario al desplazamiento, por lo que realizan un trabajo negativo que producirá una disminución de la energía y, en consecuencia, podemos pensar que el cuerpo se quedará sin energía cinética a menos altura que antes (cuando no había rozamiento). Aplicando de nuevo la ecuación (2):

$$W_{res\,A}^{\ \ B} = W_{c\,A}^{\ B} + W_{nc\,A}^{\ B} = \Delta Ec \rightarrow W_{P\,A}^{\ B} + W_{Fr\,A}^{\ \ B} = \Delta Ec_A^B \rightarrow \Delta Ec_A^B + \Delta Ep_A^B = W_{Fr\,A}^{\ \ B}$$

La ecuación anterior puede ponerse como: $(Ec_B + Ep_B) = (Ec_A + Ep_A) + W_{Fr\,A}^{\ \ B}$

Interpretad la expresión obtenida

Como el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es negativo, la suma de la energía cinética y potencial en la situación final será menor que en la inicial. (En este caso 80 J menor porque, de acuerdo con el enunciado: $W_{Fr\,A}^{\ \ B} = -80$ J).

Conviene recordar que, aunque habitualmente se hable de energía perdida, <u>ello no quiere decir que esa energía haya desaparecido</u>. En realidad sigue estando, pero se encuentra repartida entre muchas de las partículas que forman el cuerpo y el aire.

Teniendo en cuenta que $v_B = 0$ y que $h_A = 0$, esta última ecuación puede ponerse como

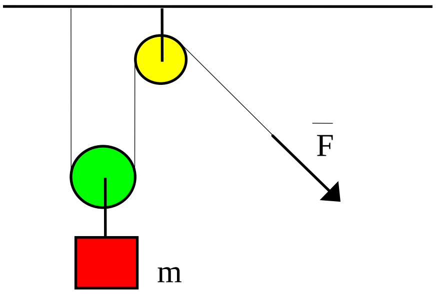
$$mgh_B - \frac{mv_A^2}{2} = W_{Fr\,A}^{\ \ B}.$$

Despejando h_B obtenemos: $\boxed{h_B = \dfrac{\dfrac{mv_A^2}{2} + W_{Fr\,A}^{\ \ B}}{mg}} \rightarrow h_B = 1'45$ m

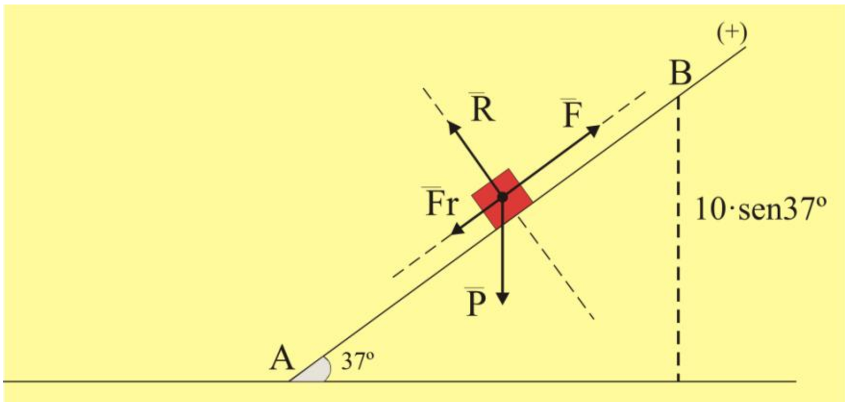
Analizad la expresión obtenida

Podemos resaltar, por ejemplo, cómo, ahora sí que influye la masa que tenga el cuerpo y que esta expresión se convertiría en la anterior ($h_B = \frac{v_A^2}{2g}$), si no hubiese rozamiento.

23. Demostrad, por aplicación del teorema del trabajo-variación de energía cinética, que la fuerza F que debemos aplicar para subir el cuerpo de la figura con movimiento uniforme es mg/2. (Suponed masas de poleas y cuerda despreciables).



24 . El cuerpo de la figura adjunta tiene una masa de 3 kg y se encontraba inicialmente en reposo en la base del plano inclinado (origen de espacios) cuando se le aplicó una fuerza $\vec{F}$ en la dirección del plano y sentido ascendente. El módulo de la fuerza, que depende de la posición "e", viene dado por: F = e^2 +25 (N para "e" en m) y el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano vale 0'5. ¿Cuál será la rapidez del cuerpo cuando haya recorrido 10 m sobre el plano?



Designaremos como A la posición inicial del cuerpo y como B la posición que ocupa tras recorrer los 10 m sobre el plano inclinado siguiendo la trayectoria rectilínea que se indica en la figura. Sobre dicho cuerpo actúan tres fuerzas que realizan trabajo: el peso $\vec{P}$, la fuerza $\vec{F}$ y la fuerza de rozamiento $\vec{Fr}$. La rapidez con que se mueva el cuerpo al llegar a B, dependerá del trabajo realizado por la fuerza resultante a lo largo del trayecto desde A hasta B:

$$W_{res}{}_A^B = Ec_B - Ec_A$$

El trabajo resultante puede calcularse en este caso como: $W_{res}{}_A^B = W_P{}_A^B + W_F{}_A^B + W_{Fr}{}_A^B$
A continuación trataremos de obtener cada uno de esos tres trabajos, para después calcular el trabajo resultante sumándolos y poder hallar la rapidez que nos piden:

Al ser el peso una fuerza conservativa: $W_P{}_A^B = -\Delta Ep_A^B = -(Ep_B - Ep_A) = -mg(h_B - h_A)$
Como $h_A = 0$ y sen $\varphi = h_B/L$ (siendo L = 10 m la longitud de plano entre A y B), nos queda:

$$W_P{}_A^B = -mg\,h_B = -mgL\text{sen}\varphi = -180\text{'}5 \text{ J}$$

En cuanto a la fuerza que tira del cuerpo hacia arriba, podemos hallar el trabajo como:

$$W_F{}_A^B = \int_A^B F_t \cdot de = \int_A^B \mathbf{F} \bullet d\mathbf{e} = \int_0^L (e^2 + 25) \bullet de = \frac{L^3}{3} + 25L = 583\text{'}3 \text{ J}$$

Finalmente, el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento, vendrá dado por:

$W_{Fr}{}_A^B = Fr_t \cdot \Delta e = -Fr \cdot L = -\mu N \cdot L$

N, es el módulo de la fuerza normal que el cuerpo hace sobre el plano y, de acuerdo con el principio de acción y reacción N = R. Como, por otra parte, la componente normal de la aceleración es nula, tiene que cumplirse que $R = P_n = mg\cos\varphi$. Por tanto $Fr = -\mu mg \cos\varphi$.

$$W_{Fr}{}_A^B = -\mu\, mg \cos\varphi \cdot L = -119\text{'}8 \text{ J}$$

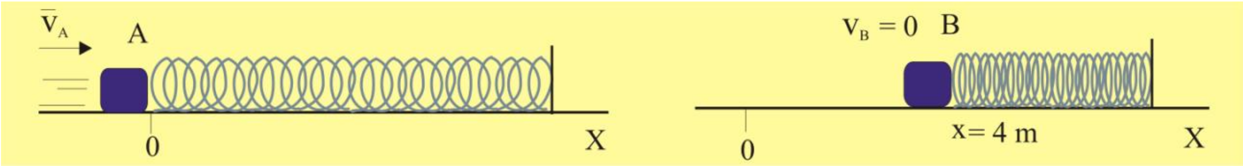
Sumando los tres trabajos tenemos: $W_{res}{}_A^B$ = -180'5 + 583'3 -119'8 = 283 J.

Así pues, la energía cinética se verá incrementada en 283 J. Como el cuerpo estaba inicialmente en reposo podemos escribir que Ec_B = 283 J y por tanto $mv^2/2$ = 283 de donde podemos obtener la rapidez del cuerpo como:

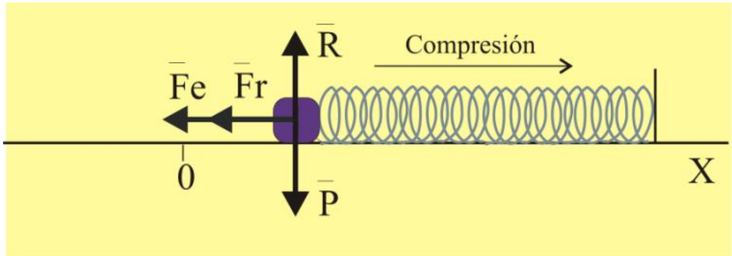
$$v = \sqrt{\frac{2 \bullet 283}{3}} = 13\text{'}7 \text{ m/s}$$

Resolved de nuevo el problema calculando antes la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo, para después calcular el trabajo realizado por la misma y, finalmente, la rapidez que nos piden mediante la aplicación del teorema trabajo resultante-variación de energía cinética.

25. Un bloque de 1 kg choca contra un resorte, de masa despreciable y constante elástica K = 2 N/m, según se aprecia en la figura. Sabiendo que el resorte sufre una compresión máxima de 4m y que el coeficiente de fricción es 0'25, determinad la rapidez con la que chocó el cuerpo con el resorte.



El bloque llegará con cierta rapidez v_A al resorte (que se encuentra inicialmente distendido) y comenzará a interaccionar con él comprimiéndolo. Las fuerzas que actuarán sobre el bloque durante la compresión del resorte serán, la fuerza de rozamiento $\vec{F}r$, el peso $\vec{P}$, la fuerza normal $\vec{R}$ que hace el plano y la fuerza elástica $\vec{F}_e$ que ejerce el resorte.



¿Qué características tiene cada una de dichas fuerzas?

La fuerza de rozamiento es constante, vale μ N siendo $\vec{N}$ la fuerza normal que el bloque hace sobre el plano (del mismo módulo y sentido contrario que $\vec{R}$), tiene sentido contrario a la velocidad del bloque y es no conservativa. La fuerza elástica, también tiene sentido contrario a la velocidad del bloque, pero es conservativa y no es constante, sino que va aumentando conforme aumenta la compresión x que sufre el muelle, de manera que su módulo vale Fe = Kx, siendo K la constante elástica del muelle y x lo que ha variado su longitud (en valor absoluto). El peso y la fuerza normal que hace el plano sobre el bloque tienen sentido contrario y han de anularse (P = R) ya que la aceleración no tiene componente normal (al ser una trayectoria rectilínea la velocidad no cambia de dirección). El bloque se moverá, pues, cada vez más lento y la fuerza elástica que actúa sobre el mismo irá aumentando hasta alcanzar un valor máximo en el instante en que se pare (x = 4 m).

¿Cómo podemos hallar la rapidez que llevaba el bloque al chocar contra el muelle?

Una posibilidad es mediante consideraciones de trabajo y energía, aplicando la ecuación $W_{res} = \Delta Ec$ a los estados A (cuando el bloque choca) y B (cuando el muelle se halla comprimido al máximo y el bloque parado). Si distinguimos entre las fuerzas conservativas y no conservativas que actúan sobre el bloque, podemos escribir la ecuación anterior como:

$$W_{res}{}_A^B = W_c{}_A^B + W_{nc}{}_A^B = \Delta Ec.$$

Si tenemos en cuenta que $W_c{}_A^B = -\Delta Ep_A^B$ y reagrupamos los términos, la expresión anterior puede escribirse como:

(1) $W_{nc}{}_A^B + Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$ en la que:

$$W_{nc}{}_A^B = W_{Fr}{}_A^B = \vec{F}r \bullet \Delta\vec{r} = Fr \cdot x_B \cdot \cos 180^o = -\mu N \cdot x_B = -\mu mg \cdot x_B$$

$Ec_A = \dfrac{mv_A^2}{2}$, $Ep_A = 0$, $Ep_B = \dfrac{Kx_B^2}{2}$, $Ec_B = 0$.

Sustituyendo en (1) y despejando, obtenemos $v_A = \sqrt{\dfrac{Kx_B^2 + 2\mu mgx_B}{m}}$ = 7'2 m/s

Un análisis del resultado literal obtenido, nos permite mostrar en primer lugar que es dimensionalmente homogéneo (L/T en ambos miembros) y al mismo tiempo que contempla algunos casos evidentes como es el hecho de que si x_B valiese 0 (el muelle no se comprime) la rapidez sería nula, o que cuanto mayor resulte x_B (siempre a igualdad de los restantes factores) con más rapidez habrá chocado el bloque contra el muelle, etc.

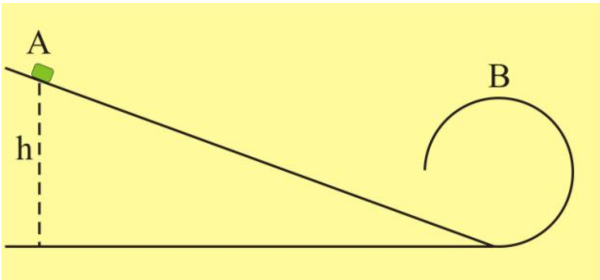
26. Sobre el plato de una balanza de muelle se deja suavemente, acompañándola con la mano, una masa de 200 g de forma que se alcanza la posición de equilibrio que corresponde a una compresión de 1 cm. Si apretando se la hace descender 2 cm más, y se suelta el plato, se efectúan oscilaciones. ¿Cuál es la energía cinética de la masa cuando el muelle tiene su longitud natural?

sol: $E_c = 3 \cdot 10^{-2}$ J

27. Sobre un resorte de masa despreciable, dispuesto verticalmente, se deja caer un cuerpo de 2'5 kg. Determinad la constante elástica del resorte sabiendo que sufre una compresión máxima de 15 cm al soltar el cuerpo desde una altura de 90 cm sobre el extremo superior del resorte.

sol: K = 2.333 N/m.

28. Un cuerpo de masa m se desliza sobre un plano inclinado terminado en una circunferencia de radio r. Admitiendo nulos los rozamientos, ¿desde qué altura mínima debemos soltar el cuerpo para que pase el rizo?



Como ya vimos en dinámica (ejercicio 42), para que el cuerpo pase el rizo, es necesario que en la parte superior disponga de la rapidez mínima necesaria para describir una curva de igual radio que la circunferencia. Ello exige que exista una fuerza normal tal que $F_n = m \cdot v^2/r$, donde $F_n = P + R$, siendo P el módulo de la fuerza peso y R el de la fuerza normal que hace la superficie sobre el cuerpo, de manera que para ese punto podemos escribir:

$mg + R = m \cdot v^2/r$ y despejar v con lo que nos queda: $v = \sqrt{\dfrac{(mg + R)\, r}{m}}$

de donde concluimos que el valor mínimo que podrá tomar v en el punto considerado, corresponderá al caso en el que R sea 0, es decir, que toda la fuerza normal requerida sea suministrada por la fuerza peso, con lo que $v_{min} = \sqrt{gr}$. Si llegase con una rapidez inferior, la fuerza peso sería mayor que la fuerza normal necesaria y r disminuiría por lo que el cuerpo caería. Si llega con una rapidez mayor, el radio tendería a aumentar porque el peso sería insuficiente para mantener al cuerpo en una trayectoria con esa curvatura, pero la superficie se lo impide suministrando la fuerza R necesaria.

La rapidez con que llegue el cuerpo a la parte superior del rizo, dependerá de la altura desde la que se suelte. *¿Cómo podemos encontrar esta relación?*

En el sistema formado por el bloque, las superficies y la Tierra, al no haber rozamientos no hay ninguna fuerza no conservativa que realice trabajo y, por tanto, la energía mecánica ha de conservarse, es decir, la energía mecánica en A ha de valer lo mismo que la energía mecánica en B.

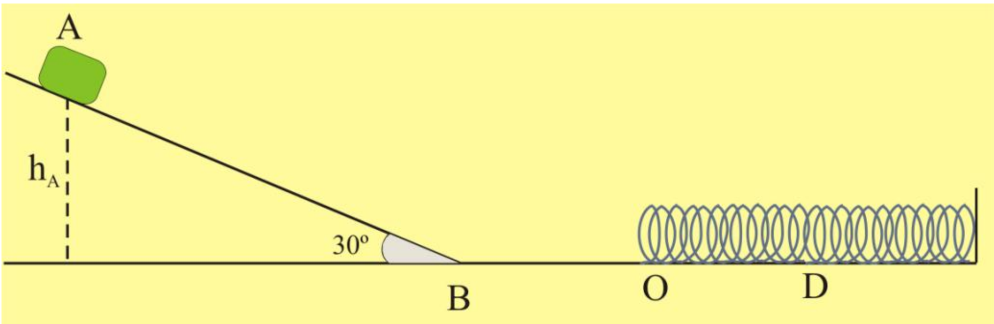
$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$

Teniendo en cuenta que en A la energía cinética es 0, obtenemos: $Ep_A = Ec_B + Ep_B$

Tomando como nivel 0 de energía potencial gravitatoria la superficie horizontal:

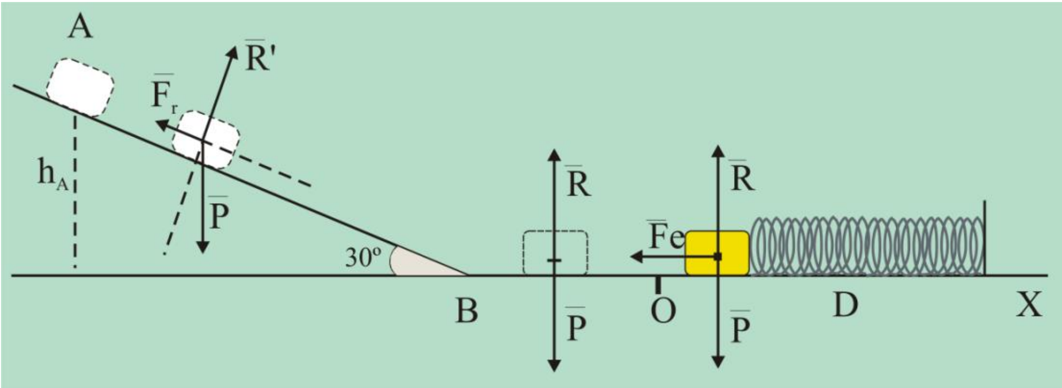
$$mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B, \text{ de donde: } h_A = \frac{\dfrac{v_B^2}{2} + gh_B}{g} \text{ y sustituyendo } v_B \rightarrow \boxed{h_A = \frac{5 \cdot r}{2}}$$

29. Dado el esquema de la figura, determinad (por aplicación del principio de conservación de la energía) la máxima compresión que se producirá en el resorte cuando tras soltar el cuerpo impacte en el mismo. La altura h_A vale 1 m, el cuerpo se abandona en el punto A, su masa es de 1 kg, la constante elástica del muelle vale K = 20 N/m, el coeficiente de rozamiento en el tramo AB vale 0'2 y en el tramo horizontal se considera despreciable.



El cuerpo de la figura descenderá por el plano inclinado AB (el valor máximo de la fuerza de rozamiento resulta inferior a la componente tangencial del peso) y mientras descienda el trabajo realizado por la fuerza resultante hará que aumente su energía cinética. Luego se desplazará por el tramo horizontal BO sin que se realice trabajo sobre él (la fuerza resultante es 0) por lo que la energía cinética se mantendrá constante. Al llegar al resorte chocará contra el comprimiéndolo, de manera que la fuerza elástica que el resorte ejerce sobre el cuerpo lo irá frenando haciendo que la energía cinética vaya disminuyendo hasta valer 0 en el punto D (instante en que la compresión del resorte es máxima y el cuerpo se encuentra momentáneamente en reposo).

Para resolver el problema, podemos aplicar la expresión que relaciona el trabajo resultante con la variación de energía cinética (en la cual se halla implícito el principio de conservación de la energía) en cada uno de los tramos, teniendo en cuenta que entre A y B solo realizan trabajo el peso y la fuerza de rozamiento, entre B y C no se realiza trabajo y finalmente que entre O y D es la fuerza que el muelle ejerce sobre el bloque la única que realiza trabajo.



$$W_{res\,A}^{\;B} = Ec_B - Ec_A$$

$$W_{res\,B}^{\;O} = Ec_O - Ec_B$$

$$W_{res\,O}^{\;D} = Ec_D - Ec_O$$

Sumando nos queda que: $W_{res\,A}^{\;B} + W_{res\,B}^{\;O} + W_{res\,O}^{\;D} = Ec_D - Ec_A$ o lo que es lo mismo:

$$W_{res\,A}^{\;D} = Ec_D - Ec_A = 0$$
$$W_{res\,A}^{\;D} = W_{P\,A}^{\;B} + W_{Fr\,A}^{\;B} + W_{Fe\,O}^{\;D} = 0$$

¿Cómo podemos determinar la compresión máxima que sufrirá el muelle?

El trabajo que realiza la fuerza elástica está relacionado con la variación de la energía potencial elástica $Kx^2/2$, en la que x representa la variación de longitud del resorte y K su constante elástica. Podemos hallar el trabajo realizado por cada una de las fuerzas y sustituir en la ecuación anterior para obtener la x correspondiente a la máxima compresión.

Como la fuerza peso es conservativa $W_{P\,A}^{\;B} = -(Ep_B - Ep_A) = Ep_A - Ep_B$

y tomando el suelo como nivel 0 de energía potencial gravitatoria, nos queda que:

$$W_{P\,A}^{\;B} = Ep_A - Ep_B = mg\,h_A$$

El trabajo de la fuerza de rozamiento (no conservativa) lo podemos hallar como:

$$W_{Fr\,A}^{\;\;B} = \vec{F}r \bullet \Delta\vec{r} = Fr \cdot \Delta r \cdot \cos 180^{o} = -\mu N \frac{h_A}{sen30^{o}}$$

En la expresión anterior, N es la fuerza normal que el cuerpo hace sobre el plano. Como en el tramo AB la velocidad no cambia de dirección, la componente normal del vector aceleración es 0, lo que implica que $\vec{R} + \vec{P}_n = 0$ y por tanto que R = P_n = mg cos30º con lo que N = mg· cos30º y el trabajo de rozamiento a lo largo del plano inclinado puede expresarse como:

$$W_{Fr\,A}^{\;\;B} = -\mu\, mg \cos 30^{o} \bullet \frac{h_A}{sen30^{o}}$$

La fuerza elástica es una fuerza conservativa, de manera que teniendo en cuenta que el punto O corresponde a la posición del extremo del muelle cuando está distendido (x = 0) y que el punto D (situado a x m de O) es el que corresponde a la situación de máxima compresión del muelle, podemos escribir que:

$$W_{Fe\,O}^{\;\;D} = -(Ep_D - Ep_O) = Ep_O - Ep_D = 0 - \frac{Kx^2}{2}$$

Sumando cada uno de los trabajos anteriores e igualando a 0:

$$mgh_A - \mu mg\cos 30^{o} \cdot \frac{h_A}{sen30^{o}} - \frac{K \cdot x^2}{2} = 0$$

En la ecuación anterior x corresponde a la compresión máxima experimentada por el muelle. Despejando, obtenemos que:

$$x = \sqrt{\frac{2mg\,h_A}{K}\left(1 - \frac{\mu}{tg30^{o}}\right)} = 0\text{'}81 \text{ m}$$

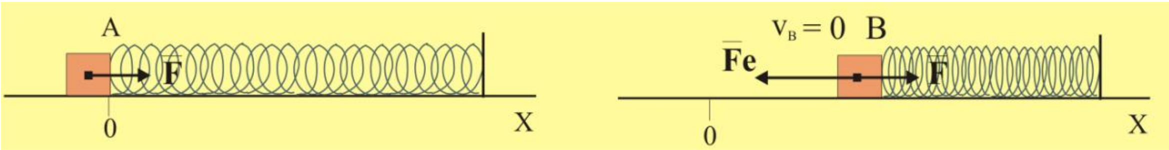
Podemos ahora analizar el resultado obtenido:

Conviene comprobar en primer lugar que es dimensionalmente homogéneo. A continuación podemos ver que el resultado contempla el hecho de que cuanto mayor sea la altura h_A desde la que se deje el cuerpo, mayor sea su peso y menor sea la constante elástica (muelle más "blando"), mayor será la compresión del muelle. Cuanto menor sea el ángulo de inclinación del plano, menor será la compresión. El resultado también nos permite predecir cuál será la compresión máxima en el caso de que no hubiera rozamiento (manteniendo constantes los demás factores):

$$x = \sqrt{\frac{2mg\,h_A}{K}}$$

Además, podemos ver que si cambiamos el coeficiente de rozamiento y lo aumentamos hasta que llegue a valer tg30º = 0'58, el muelle no se comprimirá (x = 0). Ello es lógico, puesto que, como ya se vio en dinámica, cuando μ vale lo mismo que tg φ es porque la fuerza de rozamiento máxima (μmgcosφ), toma el mismo valor que la componente tangencial del peso (mg senφ) y, en consecuencia, el cuerpo permanecería en su situación inicial de reposo. Este mismo efecto se conseguiría si, para un coeficiente de rozamiento dado vamos variando el ángulo de inclinación del plano hasta que su tangente tome el valor de dicho coeficiente.

30. Disponemos de un bloque de 10 kg unido a un resorte, de masa despreciable y cuya constante elástica vale 40 N/m, según se aprecia en la figura. Calculad la máxima compresión que sufrirá el resorte al aplicar la fuerza constante F de 5 N.



Al aplicar la fuerza $\vec{F}$se provocará una aceleración al bloque el cual irá comprimiendo el resorte ejerciendo sobre éste una cierta fuerza, que, en todo momento será del mismo módulo y sentido contrario a la fuerza que hará el resorte sobre el bloque (principio de acción y reacción). Así pues, sobre el bloque actuarán dos fuerzas paralelas al plano: la que nosotros le aplicamos $\vec{F}$, que es constante, y otra de sentido contrario que le ejerce el resorte $\vec{F}e$ cuyo módulo es directamente proporcional a la variación de longitud que sufre el muelle (es decir, que va aumentando conforme el resorte se comprime).

Sobre el bloque también actúan otras dos fuerzas, que son el peso $\vec{P}$ y la fuerza normal $\vec{R}$que ejerce la superficie , pero no las tendremos en cuenta ya que se anulan entre si y no realizan ningún trabajo.

Como al principio la fuerza aplicada es mucho mayor que la fuerza elástica que ejerce el muelle, el bloque acelera hacia la derecha, pero como F permanece constante mientras que Fe va aumentando, la aceleración será cada vez más pequeña y llegará un momento en que valdrá 0 porque los módulos de ambas fuerzas serán iguales F = Fe (posición de equilibrio). En un principio, podría pensarse que esta es la situación de máxima compresión del resorte, pero no es así, ya que en ese instante, aunque la fuerza resultante sea nula, el bloque no está parado sino que se está moviendo con una cierta rapidez (alcanzada a lo largo del trayecto) y se seguirá moviendo comprimiendo al resorte, si bien a partir de la posición de equilibrio, la fuerza elástica superará a la fuerza aplicada F y, en consecuencia, habrá una fuerza resultante hacia la izquierda, cuyo módulo será cada vez mayor, que provocará una aceleración que hará que la velocidad del bloque vaya disminuyendo hasta que se detenga. En ese punto, la velocidad del bloque pasa por el valor 0 y la fuerza resultante sobre él irá hacia la izquierda, haciendo que el bloque continúe moviéndose en ese sentido, contrario al inicial.

Para resolver el problema tomaremos como origen de espacios la posición inicial del bloque y como sentido positivo el del movimiento durante la compresión del muelle.

¿Cómo podríamos determinar la compresión máxima que sufrirá el resorte?

Podemos tratar de resolver el problema aplicando la expresión que relaciona el trabajo resultante con la variación de energía cinética, ya que en ella interviene el trabajo realizado por la fuerza elástica, que está relacionado, como sabemos, con la variación de energía potencial elástica, y esta con la posición.

Tomaremos como estado inicial A el correspondiente al instante en que comienza a actuar la fuerza $\vec{F}$ y como estado final B, el del instante en que la rapidez del bloque es 0.

$$W_{res\,A}^{\;\;B} = \Delta Ec_A^B = Ec_B - Ec_A = 0$$

$$W_{res\,A}^{\;\;B} = W_{F\,A}^{\;B} + W_{Fe\,A}^{\;\;B}$$

$$W_{F\,A}^{\;B} = F_t \cdot \Delta x = F\cos 0 \cdot x_B = F \cdot x_B$$

$$W_{Fe\,A}^{\;\;B} = -\Delta Ep = -(Ep_B - Ep_A) = -\frac{Kx_B^2}{2}$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en la del trabajo resultante nos queda:

$W_{res\,A}^{\;\;B} = F \cdot x_B - \dfrac{K \cdot x_B^2}{2}$ = 0, o lo que es equivalente: $F \cdot x_B = \dfrac{Kx_B^2}{2}$

Esta última expresión podemos interpretarla diciendo que todo el trabajo realizado por $\vec{F}$ entre A y B, se ha empleado en aumentar la energía potencial elástica. A partir de dicha expresión es fácil obtener la compresión máxima del muelle como:

$$x_B = \frac{2F}{K} = 0'25 \text{ m}$$

El análisis del resultado literal obtenido nos lleva a comprobar en primer lugar que es dimensionalmente homogéneo y a constatar que contempla algunos casos particulares evidentes como, por ejemplo, que si F = 0, no habrá compresión, que si F aumenta la compresión máxima conseguida será mayor y que si K aumenta (muelle mas “duro”) dicha compresión será menor.

Otra posibilidad es *resolver el problema utilizando un tratamiento cinemático-dinámico en lugar de utilizar consideraciones de trabajo y energía*. Esto puede hacerse en muchos problemas de mecánica, lo que constituye una muestra la coherencia de este campo de conocimientos y de la validez de las expresiones que en él se manejan. No obstante, la resolución de problemas a partir de las ecuaciones de trabajo y energía suele ser, más corta y sencilla que mediante cinemática y dinámica, como se puede comprobar en este mismo ejemplo.

A partir de la ecuación fundamental de la dinámica, podemos hallar la aceleración tangencial del bloque y con ella la expresión de la rapidez. Luego, hemos de buscar una relación entre la rapidez y la posición del bloque, para hallar dónde estará cuando se detenga.

$F_{rest} = m·a_t \rightarrow$ F-K·x = $m·a_t \rightarrow a_t = \dfrac{F - K\cdot x}{m}$. Como a_t = dv/dt, nos queda: $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{F - K\cdot x}{m}$

Para poder integrar, multiplicaremos por "dx" en ambos miembros, con lo que nos queda:

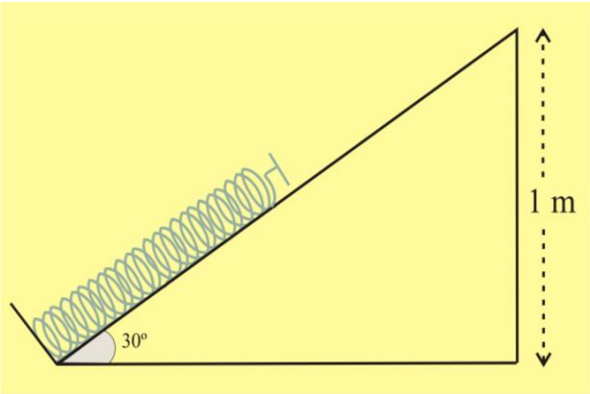
$$\frac{dv}{dt}\cdot dx = \frac{F - K\cdot x}{m}\cdot dx \rightarrow v\cdot dv = \frac{(F - K\cdot x)}{m}\cdot dx \rightarrow \int_0^v v\cdot dv = \int_0^x \frac{(F - K\cdot x}{m}\cdot dx$$

Resolviendo estas integrales obtenemos una expresión que nos relaciona v con x:

$v^2 = \dfrac{2F\cdot x - K\cdot x^2}{m}$ y haciendo v = 0 y x = x_B, se obtiene fácilmente que: $x_B = \dfrac{2F}{K}$

31. Dado el dispositivo de la figura adjunta determinad la rapidez con que llegará al extremo del plano un cuerpo de 2 kg de masa que se apoya sobre el resorte, cuando tras comprimir a éste último 50 cm, se deje en libertad.

Datos: Longitud del resorte distendido 1m, constante elástica del resorte 400 N/m y coeficiente de rozamiento 0'2.

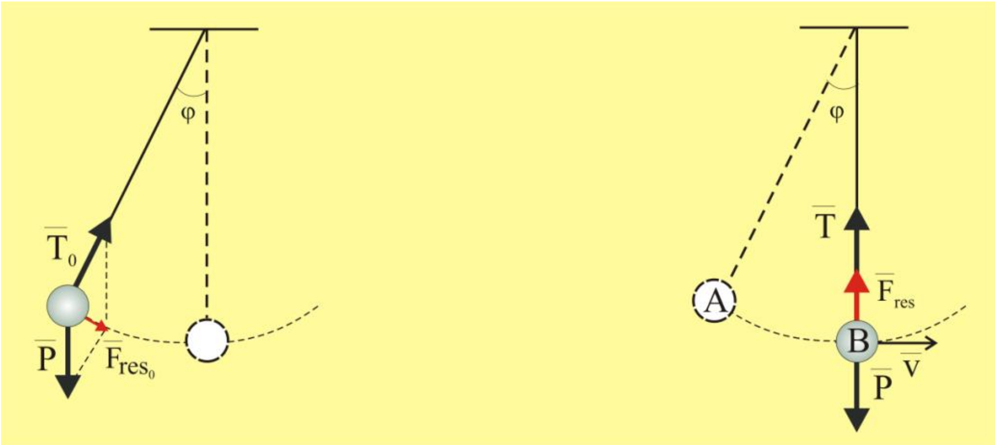


sol: v = 5'4 m/s

32. Disponemos de un péndulo constituido por un hilo, de masa despreciable y un cuerpo esférico de 1 kg. Sabiendo que el hilo tiene una longitud de 20 cm y que soporta como máximo una tensión de 15 N, determinad el mínimo valor de la amplitud angular "φ" de partida, para que al dejar libre el péndulo se rompa el hilo.

Si el péndulo permanece en reposo en la posición $\varphi = 0$ la fuerza resultante sobre la bola ha de ser nula y por tanto, el peso $\vec{P}$ y la tensión del hilo $\vec{T}$ han de ser de igual módulo y tener sentidos contrarios.

Al soltar el péndulo desde una cierta posición correspondiente a $\varphi \neq 0$, la fuerza resultante sobre la bola será perpendicular a la tensión del hilo en ese instante ("$\vec{T}_0$") y la bola describirá un movimiento de trayectoria circular, a lo largo del cual irán variando tanto la tensión como la fuerza resultante. Cuando se encuentre en la posición $\varphi = 0$, tendrá cierta rapidez (tanto mayor cuanto mayor sea la altura desde la que se soltó). En este punto la resultante no será nula, ya que la bola no está en reposo sino describiendo un movimiento circular (de radio igual a la longitud L del hilo), por lo que en dicha posición tendrá que haber una fuerza resultante en la dirección de la normal (recordemos que en el movimiento circular la dirección del vector velocidad está cambiando constantemente).



¿Cómo podemos calcular el valor de la máxima rapidez con que podrá llegar la bola al punto considerado?

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica a la bolita en el instante en que pasa por la posición más baja, podemos obtener el valor de la tensión del hilo en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} F_{res\,n} = m \cdot a_n \\ F_{res\,n} = T - P \end{array}\right\} \rightarrow T - P = m \cdot a_n \rightarrow T = P + m \cdot \frac{v^2}{L}$$

Como P, m y L son valores fijos, vemos que la tensión de la cuerda depende de la rapidez con que la bola pase por la posición más baja, cuanto mayor sea dicha rapidez, mayor será la tensión del hilo. Sin embargo la máxima tensión que puede aguantar el hilo es de 15 N, por tanto, para calcular la rapidez máxima que podrá llevar la bola, tendremos que sustituir T por su valor máximo y despejar v, con lo que nos queda:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{(T_{max} - P) \cdot L}{m}} = 1 \text{ m/s}$$

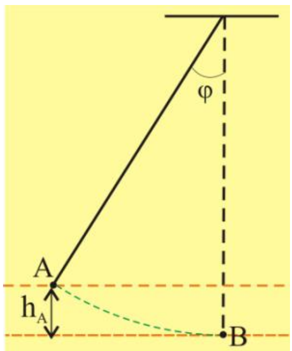
Esta rapidez dependerá del ángulo φ desde el que se haya soltado la bolita.

¿Cómo podemos determinar la relación existente entre ambas magnitudes?

Podemos aplicar la ecuación $W_{res\,A}^{\ B} = \Delta Ec_A^B$ entre los estados A (cuando soltamos la bolita desde un ángulo φ) y B (cuando pasa por la posición más baja):

$$W_{res\,A}^{\ B} = Ec_B - Ec_A = Ec_B = \frac{mv_B^2}{2}$$

$$W_{res\,A}^{\ B} = W_{P\,A}^{\ B} + W_{T\,A}^{\ B} \rightarrow W_{P\,A}^{\ B} + W_{T\,A}^{\ B} = \frac{mv_B^2}{2}$$



$$W_{P\,A}^{\ B} = -\Delta Ep_A^B = Ep_A - Ep_B = Ep_A = mgh_A$$

(tomando como Ep = 0 la del punto más bajo).

$W_{T\,A}^{\ B} = 0$ ya que en todo momento la fuerza $\vec{T}$ es perpendicular a la trayectoria.

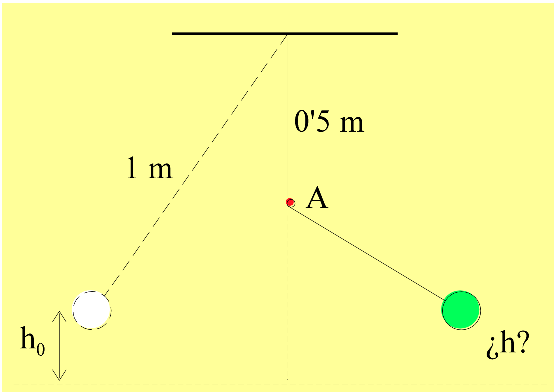
Sustituyendo en $W_{res\,A}^{\;B}$ obtenemos que: $mg\,h_A = \dfrac{mv_B^2}{2} \rightarrow h_A = \dfrac{v_B^2}{2g}$

Si ahora sustituimos v_B por su valor máximo obtendremos el valor de la altura límite desde la que podemos soltar la bolita sin que el hilo se rompa: h_{max} = 0'05 m.

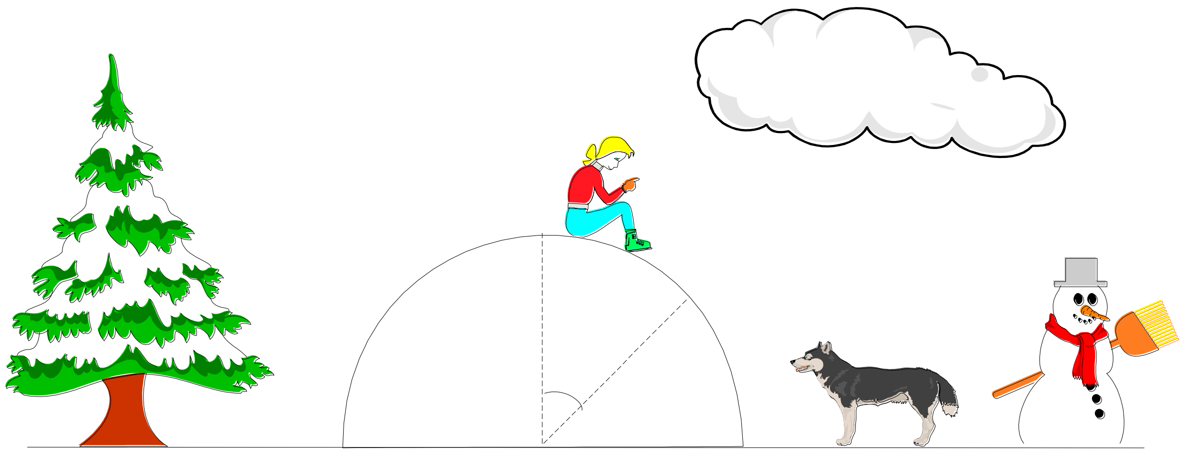
Como $\cos\varphi = \dfrac{L-h}{L}$, basta con sustituir h por el valor obtenido para poder hallar al ángulo φ que nos piden, resultando cos φ = 0'75 → φ = 41'4º. Soltando la bolita del péndulo desde este ángulo, la tensión del hilo en la posición más baja será de 15 N. Para ángulos mayores la tensión será mayor y, por tanto, el hilo se romperá.

33. El sistema de la figura representa una masa puntual colgada de un hilo sin masa que se abandona desde una altura h_0. Cuando llega a la vertical, el hilo se encuentra con un punto A que hace que se doble dicho hilo. ¿A qué altura h ascenderá la masa?

sol: $h = h_o$



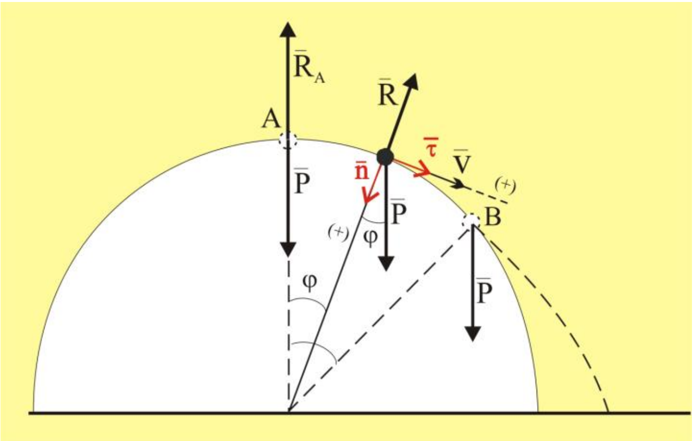
34. Desde lo alto de una esfera de radio r = 2'4 m, se desliza, sin rozamiento, un cuerpo de masa m. Determinad cuál será su rapidez en el momento en que se separe de la esfera.



Las únicas fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso $\vec{P}$ y la fuerza normal $\vec{R}$ que ejerce la superficie. Cuando la chica se encuentra en la posición más alta y en reposo, ambas fuerzas se ejercen en la misma dirección y se anulan. Sin embargo, en cuanto se separe ligeramente de esa posición, comenzará a deslizar ya que las dos fuerzas dejan de estar en la misma dirección ($\vec{P}$ no cambia, pero sí lo hace $\vec{R}$ que en todo momento ha de ser perpendicular a la superficie) y no se anulan. Conforme vaya deslizando, la velocidad irá aumentando de valor y cambiando de dirección, por lo que el vector aceleración tendrá componentes tangencial y normal.

Podemos pensar que al ir deslizando por la superficie de la semiesfera, debido a la curvatura de ésta, la fuerza normal $\vec{N}$ que la chica hace sobre la superficie (y por tanto, la fuerza normal $\vec{R}$ que la superficie hace sobre ella) va disminuyendo, hasta que al llegar a una cierta posición B, llega a valer 0. A partir de ese punto ya no hay interacción entre la chica y la superficie.

Por otra parte, como no actúan fuerzas no conservativas, la suma de la energía potencial gravitatoria y cinética ha de permanecer constante, de manera que, si bien la energía potencial va disminuyendo conforme la chica se mueve hacia el suelo, la energía cinética debe ir aumentando justo en la misma proporción, para que la suma de ambas valga siempre lo mismo.



Como la trayectoria desde el punto más alto hasta donde se despega, es conocida, para ese recorrido podemos aplicar un tratamiento escalar, con lo que:

$F_{res\ t} = m \cdot a_t \rightarrow P\cos(90-\varphi) = m \cdot a_t \rightarrow a_t = g\,\text{sen}\varphi$ (1)

$F_{res\ n} = m \cdot a_n \rightarrow P\cos\varphi - R = m \cdot a_n \rightarrow a_n = \dfrac{mg\cos\varphi - R}{m}$ (2)

Mediante la ecuación (1), podemos comprobar que la componente tangencial de la aceleración no es nula (va aumentando) y por tanto la rapidez será cada vez mayor.

En cuanto a la aceleración normal, sabemos que esta viene dada por $a_n = v^2/r$ siendo r el radio de curvatura. Como v va aumentando y entre A y B el radio es constante, queda claro que la aceleración normal también tendrá que aumentar y que para que ello ocurra, según la expresión (2), la fuerza R tiene que disminuir de forma que la diferencia P_n - R sea cada vez mayor.

Lo que ocurre entre A y B se puede interpretar admitiendo que como la rapidez va aumentando cada vez es mayor la fuerza normal que se necesita para mantener a la chica describiendo una trayectoria del mismo radio ($F_n = m \cdot v^2/r$). El valor de esa fuerza normal viene dado por la diferencia P_n - R en donde P_n va disminuyendo conforme el ángulo aumenta (recordemos que P_n = mg cosφ), luego R ha de disminuir más aprisa todavía para que la diferencia de ambos términos vaya aumentando. En el punto B, R ha llegado a valer 0 y toda la fuerza normal es suministrada por P_n, pero, como la rapidez sigue aumentando también lo hará la fuerza normal "requerida" para que siguiese describiendo una trayectoria de igual radio r. Dicha fuerza normal, a partir de ese punto, será superior a P_n por lo que r aumentará (ya que P_n será insuficiente para mantener el mismo radio). A esta misma conclusión se llega mediante la expresión $P_n = m\cdot v^2/r$ (válida a partir de B) en la que podemos ver que si v aumenta y P_n disminuye, r tiene que aumentar y, en consecuencia, la chica se despega de la superficie.

¿Cómo podríamos hallar la rapidez con que se mueve la chica en el preciso instante en que deja de tener contacto con la superficie?

Una posibilidad sería partir de a_t = g senφ y como a_t = dv/dt, tratar de integrar con el fin de obtener v en función del ángulo φ y luego particularizar (en el punto B) introduciendo la condición de que R valga 0. Otro procedimiento, más sencillo, es mediante consideraciones de trabajo y energía, relacionando el trabajo resultante entre A y B con la variación de energía cinética producida:

$$W_{res\,A}^{\;\;B} = \Delta Ec_A^B$$

$$W_{res\,A}^{\;\;B} = W_{P\,A}^{\;\;B} + W_{R\,A}^{\;\;B} = W_{P\,A}^{\;\;B}$$ ($\vec{R}$ no realiza trabajo por ser perpendicular a la trayectoria).

Como la fuerza peso es conservativa, podemos hacer $W_{P\,A}^{\;\;B} = -\Delta Ep_A^B$

Así pues obtenemos que $-\Delta Ep_A^B = \Delta Ec_A^B$ es decir, la disminución de energía potencial gravitatoria que se produce cuando la chica pasa desde A hasta B, es igual al aumento de energía cinética.

Desarrollando esta última expresión obtenemos que: mg h_A - mg h_B = $\frac{mv_B^2}{2}$, con lo que:

$$v_B^2 = 2g(h_A - h_B) = 2g(r - r\cos\varphi_B)$$

Vemos que, como habíamos supuesto, la rapidez va aumentando a medida que baja (aumenta φ). Para conocer la rapidez en el punto B, *necesitamos saber el valor del ángulo.*

Recordemos que mediante la ecuación (2) podemos relacionar el ángulo con la rapidez.

En efecto, según dicha ecuación $a_n = \frac{mg\cos\varphi - R}{m}$ y como $a_n = \frac{v^2}{r}$ y en B la fuerza R es nula, obtenemos para el punto B, que:

$\frac{v_B^2}{r} = g\cos\varphi_B$, con lo que cos $\varphi_B = \frac{v_B^2}{gr}$ y sustituyendo en la expresión anterior nos queda:

$$v_B^2 = 2g\,(r - r\cos\varphi_B) = 2g\,(r - r\cdot\frac{v_B^2}{gr})$$

y de aquí podemos simplificar y despejar v_B con lo que:

$$v_B = \sqrt{\frac{2gr}{3}} = 4 \text{ m/s}$$

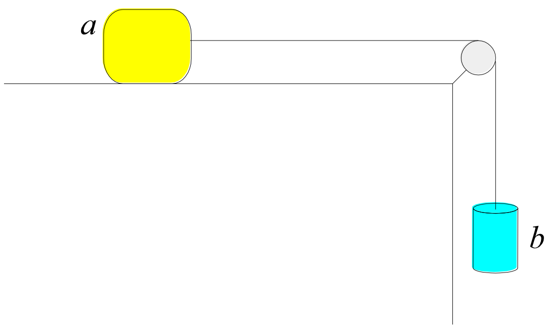
¿Cómo podríamos calcular φ_B ?

Bastaría introducir el resultado obtenido en la ecuación $\cos\varphi_B = \frac{v_B^2}{gr}$ y despejar, con lo que se obtiene $\cos\varphi_B = 2/3$ (independiente del radio) y $\varphi_B = 48^o$.

35. De un resorte de 1 m de longitud y constante elástica 200 N/m se suspende un cuerpo de 2 kg. Se le acompaña hasta la posición de equilibrio y una vez en ésta se le aplica una fuerza vertical y hacia abajo de 10 N. Determinad la longitud máxima que alcanzará el resorte.

sol: L = 1'2 m

36. El bloque *a* de la figura tiene una masa de 10 kg y el *b* de 2 kg. Determinad la rapidez con que se desplazarán cuando se les deje en libertad y hayan recorrido 4 m cada uno de ellos. (El coeficiente de fricción entre el bloque *a* y el plano vale 0'1).



En este problema tenemos dos cuerpos (*a* y *b*) que se desplazan bajo la acción de unas fuerzas, de manera que el trabajo de la fuerza resultante que actúa sobre cada uno producirá una variación en su energía cinética. Como los dos bloques se hallan unidos mediante una cuerda que se supone inextensible, la rapidez de ambos en cada instante deberá de coincidir.

La trayectoria que siguen los dos cuerpos es única y conocida. Tomaremos como origen de espacios la posición inicial del bloque *a* y como sentido positivo el del movimiento. Supondremos que ambos bloques se encuentran inicialmente en reposo, tomando como origen de tiempos el instante en que se dejan en libertad.

¿Qué podemos hacer para calcular la rapidez cuando se hayan desplazado 4 m?

Una posibilidad es aplicar la ecuación $W_{res\,A}^{\ B} = \Delta Ec_A^B = Ec_B - Ec_A$ tomando como estado A el correspondiente al instante inicial o momento en que se dejan en libertad ($v_A = 0$) y como final el que corresponde a cuando se han desplazado 4 m sobre la trayectoria.

Para el bloque *a*: $W_{T\,A}^{\ B} + W_{Fr\,A}^{\ B} = Eca_B - Eca_A \rightarrow T\cdot\Delta e - Fr_a\cdot\Delta e = m_a\cdot v^2/2$
Para el bloque *b*: $W_{T\,A}^{\ B} + W_{P_b\,A}^{\ B} = Ecb_B - Ecb_A \rightarrow -T\cdot\Delta e + m_b\, g\cdot\Delta e = m_b\cdot v^2/2$

Sumando las dos ecuaciones anteriores nos queda:

$$m_b\, g\cdot\Delta e - Fr_a\cdot\Delta e = (m_a + m_b)\cdot v^2/2$$

La fuerza de rozamiento vale $\mu\cdot N$ (N es la fuerza normal que el bloque a ejerce sobre la superficie). Sabemos que, de acuerdo con el principio de acción y reacción N = R (fuerza normal que la superficie hace sobre el bloque). Por otra parte, la componente normal del vector aceleración es nula (el bloque a se mueve en línea recta) y, por tanto, R = P, con lo que concluimos que en este caso $N = P = m_a\, g$ y $Fr_a = \mu\cdot m_a\, g$. Sustituyendo en la expresión anterior y despejando v, queda:

$$v = \sqrt{\frac{2g\Delta e\,(m_b - \mu\, m_a)}{m_a + m_b}} = 2'58 \text{ m/s}$$

Analizad el resultado literal obtenido

Se trata de un resultado dimensionalmente homogéneo (L/T en ambos miembros). Además contempla algunos casos evidentes, como, por ejemplo, que si la gravedad o el desplazamiento son nulos, la rapidez será 0 (no se moverán). Lo mismo ocurrirá cuando $\mu\cdot m_a$ valga lo mismo que m_b (o, lo que es equivalente, cuando la fuerza de rozamiento sobre *a* y el peso de *b* sean iguales).

Utilizad el resultado del problema para averiguar con qué rapidez se movería el bloque b a los 4 m si la masa del a valiese 0.

Lo único que hemos de hacer es sustituir m_a por 0 en la expresión obtenida, con lo que nos quedaría:

$$v = \sqrt{\frac{2g\cdot\Delta e\cdot m_b}{m_b}} = \sqrt{2g\cdot\Delta e} = 8'9 \text{ m/s}$$

(Como era de esperar, mayor que la anterior).

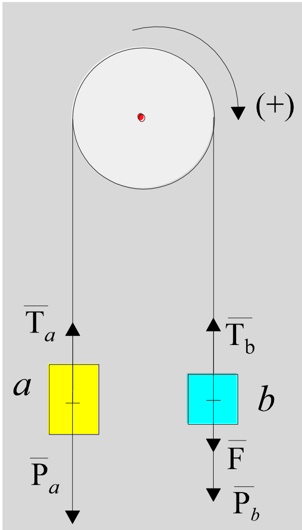
A los mismos resultados podríamos haber llegado si en lugar de aplicar la ecuación $W_{res\,A}^{\ B} = \Delta Ec_A^B$ a cada uno de los bloques por separado y luego sumar, hubiésemos planteado directamente la suma como:

$$W_{P_b\,A}^{\ B} + W_{Fr\,A}^{\ B} = \Delta Eca + \Delta Ecb \rightarrow -\Delta Epb + W_{Fr\,A}^{\ B} = Eca_B + Ecb_B$$

Otra posibilidad es utilizar un tratamiento de cinemática y dinámica:

Resolved el problema mediante un tratamiento cinemático-dinámico y comprobad que se obtiene el mismo resultado.

37. Los bloques *a* y *b* de la figura (de 4 kg y 3 kg de masa respectivamente), se encuentran inicialmente a la misma altura. En el momento de dejarlos en libertad comienza a actuar sobre *b* una fuerza vertical y hacia abajo, de 15 N. Determinad la rapidez de los cuerpos cuando la distancia entre ellos sea de 6 m.



Como el peso de **a** es mayor que el de **b**, si no existiera la fuerza $\vec{F}$ que tira del **b** hacia abajo, al dejar el sistema en libertad **a** descendería y **b** subiría, pero como $P_b + F > P_a$, ocurre lo contrario y es **b** quien desciende y **a** quien sube.

¿Cómo podemos calcular la rapidez cuando la diferencia de alturas sea de 6 m?

Podemos aplicar la expresión $W_{res}{}_A^B = \Delta Ec_A^B = Ec_B - Ec_A$ a los estados A (cuando soltamos los cuerpos) y B (cuando **a** haya subido 3 m y **b** haya descendido otros 3 m). Tomaremos como sentido positivo el del movimiento y como origen de espacios la posición inicial del bloque **a**, con lo que nos queda:

$$W_{res}{}_A^B = W_{Pa}{}_A^B + W_{Pb}{}_A^B + W_{Ta}{}_A^B + W_{Tb}{}_A^B + W_F{}_A^B = (Eca_B - Eca_A) + (Ecb_B - Ecb_A).$$

Como el desplazamiento sobre la trayectoria es el mismo para los dos cuerpos, las fuerzas son constantes y la fuerza que ejerce la cuerda sobre cada cuerpo tiene el mismo módulo (se considera que la masa de la cuerda es despreciable), podemos expresar cada uno de los trabajos como el producto de la componente escalar tangencial de cada fuerza y el desplazamiento espacial (cada factor con su signo correspondiente), como se indica a continuación:

$$W_{Pa}{}_A^B = -Pa \cdot \Delta e;\ W_{Pb}{}_A^B = Pb \cdot \Delta e;\ W_{Ta}{}_A^B = T \cdot \Delta e;\ W_{Tb}{}_A^B = -T \cdot \Delta e;\ W_F{}_A^B = F \cdot \Delta e$$

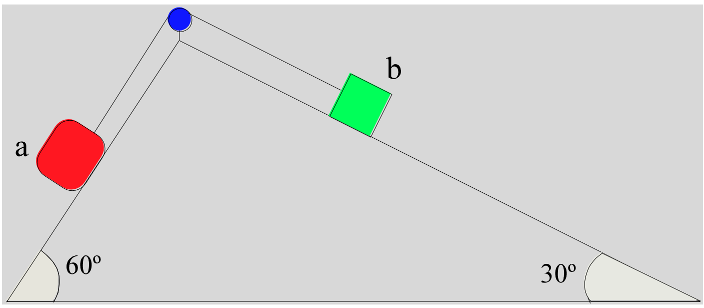
Así pues: $W_{res}{}_A^B = -m_a\, g \cdot \Delta e + m_b g \cdot \Delta e + F \cdot \Delta e = Eca_B + Ecb_B = (m_a + m_b) \cdot v^2/2$

Finalmente, despejamos v y obtenemos: $v = \sqrt{\dfrac{2g\Delta e\,(m_b - m_a) + 2F\Delta e}{m_a + m_b}}$ → v = 2’07 m/s

Analizad el resultado literal obtenido

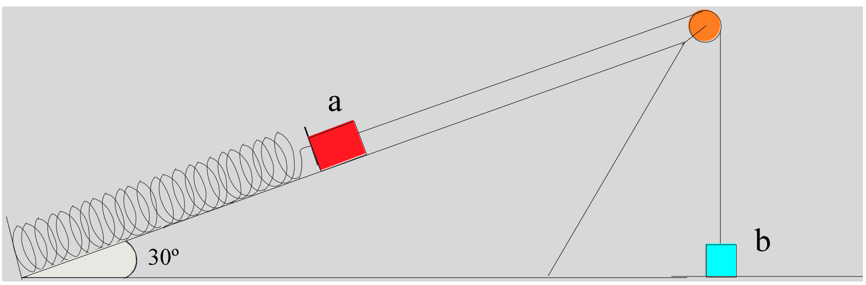
Después de comprobar que es dimensionalmente homogéneo (L/T en ambos lados del signo igual), podemos ver, por ejemplo, que si el desplazamiento es 0, también lo será v (no se mueven los cuerpos) y que lo mismo ocurriría si las masas fuesen iguales y F = 0. Por otra parte, si m_a fuese 0 y F también, obtendríamos v = $\sqrt{2g\Delta e}$, que coincide, precisamente con la rapidez de un objeto que se deja caer libremente, en el instante en que ha descendido Δe m.

38. Calculad, aplicando el principio de conservación de la energía, la rapidez que adquirirán los cuerpos de la figura, cuando se hayan desplazado 1m. (El coeficiente de rozamiento es 0’2, m_a = 20 kg y m_b = 5 kg).



sol: v = 3’1 m/s.

39. Dado el esquema adjunto, determinad la máxima compresión que sufrirá el resorte al dejar en libertad el sistema. (La masa de A es de 4 kg, la de B es de 1 kg , la constante elástica del resorte vale 20 N/m y se supone que no hay rozamiento).

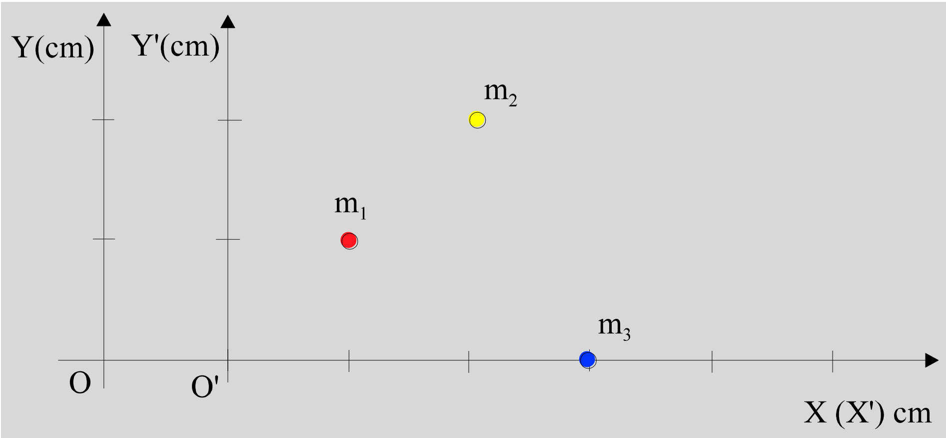


sol: 1 m

40. Sobre un resorte de masa despreciable y dispuesto verticalmente, se deja caer un cuerpo de 2'5 kg de masa. Determinad la constante eléctrica del resorte sabiendo que este sufre una compresión máxima de 15 cm cuando el cuerpo se suelta desde 90 cm altura respecto del extremo superior de dicho resorte. sol: 233N/m

5. SISTEMAS DE PARTÍCULAS

1. Obtened las coordenadas del centro de masas del sistema formado por las tres partículas de la figura (m_1 = 1g , m_2 = 1g , m_3 = 2 g) en cada uno de los sistemas de coordenadas cartesianas representados (O y O').



Tal y como se define el centro de masas (en adelante, cdm) de un sistema de partículas, es evidente que sus coordenadas dependerán del sistema de referencia elegido, pero su localización física (su situación respecto a las partículas que forman el sistema) solo dependerá de las masas dichas partículas y de sus posiciones relativas, por tanto, sea cual sea el sistema de referencia que escojamos, el centro de masas ha de ocupar el mismo lugar, mientras no cambie la disposición relativa de las partículas que lo forman.

El ejercicio se puede resolver sin más que aplicar las expresiones correspondientes a las coordenadas del cdm en cada uno de los sistemas de referencia.

En el sistema de referencia O, las coordenadas de cada partícula son:

Para m_1: x_1 = 2 cm, y_1 = 1 cm
Para m_2: x_2 = 3 cm, y_2 = 2 cm
Para m_3: x_3 = 4 cm, y_3 = 0 cm

En el sistema de referencia O', las coordenadas de cada partícula son:

Para m_1: x'_1 = 1 cm, y'_1 = 1 cm
Para m_2: x'_2= 2 cm, y'_2= 2 cm
Para m_3: x'_3= 3 cm, y'_3= 0 cm

El vector de posición del cdm según el sistema de referencia O, viene dado por:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_1^n m_i \cdot \vec{r}_i}{M}$$

en donde m_i es la masa de una de las n partículas de que consta el sistema, $\vec{r}_i$ su vector de posición y M, la masa total (suma de las masas de todas las partículas). Así pues:

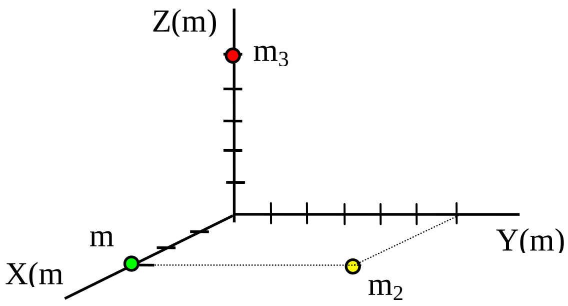
$$\vec{r}_C = \frac{\sum_1^n m_i \cdot \vec{r}_i}{M} = \frac{1(2,\ 1) + 1(3,\ 2) + 2\,(4,\ 0)}{4} = \left(\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right) \text{ cm}$$

El vector de posición del cdm según el sistema de referencia O', viene dado por:

$$\vec{r}\,'_C = \frac{\sum_1^n m_i \cdot \vec{r}\,'_i}{M} = \frac{1(1,\ 1) + 1(2,\ 2) + 2\,(3,\ 0)}{4} = \left(\frac{9}{4}, \frac{3}{4}\right) \text{ cm}$$

Analizando los resultados obtenidos, es fácil darse cuenta de que la coordenada “y” es la misma en ambos sistemas de referencia (debido a que al coincidir el eje X con el X’ las ordenadas de las tres partículas son las mismas en los dos sistemas). Además, si señalamos la posición del cdm, en ambos sistemas de referencia obtenemos el mismo punto, tal y como supusimos al principio.

2. Determinad el vector de posición $\vec{r}_C$ del c.d.m. del sistema de partículas representado en la figura adjunta (m_1 = 2 kg, m_2 = 3 kg y m_3 = 5 kg).



sol: $\vec{r}_c$= (1'5, 1'8, 2'5) m

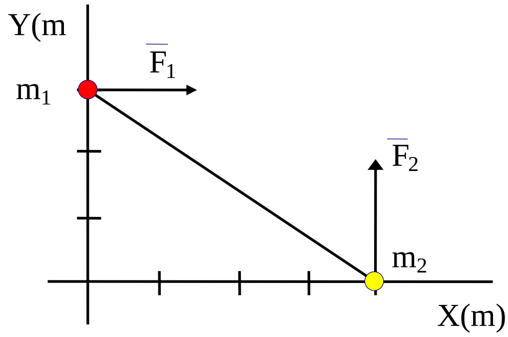
3. Determinad la posición del c.d.m. del sistema del ejercicio anterior, en el supuesto de que el origen del sistema referencial se trasladara hasta ocupar la misma posición que la partícula de masa m_2.

Sol: $\vec{r}_C$ = (-1'5, -4'2, 2'5) m

4. Dado el sistema de partículas de la figura, las cuales se encuentran inicialmente en reposo y sabiendo que están unidas por una varilla rígida y de masa despreciable, se pide:

a) El vector de posición del c.d.m. un instante t después de comenzar a actuar las dos fuerzas exteriores representadas.
b) Caso de no existir la varilla ¿Afectaría eso al movimiento de cada una? ¿Y al del c.d.m.?

(m_1 = 0'2 kg; m_2 = 0'3 kg; F_1 = 3N; F_2 = 4 N)



El sistema está formado por dos partículas sobre las que actúan, respectivamente, las fuerzas exteriores $\vec{F}_{ext\,1} = (3, 0)$ N y $\vec{F}_{ext\,2} = (0, 4)$ N, así como dos fuerzas interiores $\vec{F}_{12}$ (fuerza que sobre m_1 hace m_2) y $\vec{F}_{21}$ (fuerza que sobre m_2 hace m_1) que son desconocidas aunque sabemos que, por tratarse de una pareja de acción y reacción se debe de cumplir que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

¿Cómo podemos obtener la posición del cdm en cualquier instante?

Una posibilidad sería, en principio, intentar aplicar la expresión $\vec{r}_C = \dfrac{\sum_1^n m_i \cdot \vec{r}_i}{M}$

Sin embargo, para ello, necesitaríamos conocer la ecuación de movimiento $\vec{r} = \vec{r}(t)$ de cada una de las partículas. Dicha ecuación se podría obtener por integración si supiéramos la expresión de la aceleración con que se mueve cada partícula, pero como no sabemos cuánto valen las fuerzas interiores, no podemos tener ese dato y, por tanto, no es posible resolver el problema de esta forma.

Otro procedimiento, consiste en calcular la aceleración del centro de masas y después, por integración, llegar a obtener el vector de posición.

El cálculo de la aceleración correspondiente al cdm puede realizarse teniendo en cuenta que la fuerza resultante que actúa sobre un sistema de partículas es la suma de todas las fuerzas exteriores y de todas las interiores. Dicha suma puede expresarse como:

$$\vec{F}_{res} = \sum \vec{F}_{ext\,i} + \sum \vec{F}_{int\,ij} = \sum \vec{F}_{ext\,i} = \vec{F}_{ext} = \sum_1^n m_i \cdot \vec{a}_i$$

en la que hemos tenido en cuenta que la suma de las fuerzas interiores entre cada dos partículas ij es siempre 0 ya que se trata de parejas acción-reacción. Por otra parte, del concepto mismo del cdm, sabemos que si multiplicamos la masa total del sistema por la aceleración del cdm, deberemos de obtener también la fuerza resultante que actúa sobre el sistema, por tanto:

$$\vec{F}_{res} = M \cdot \vec{a}_C$$

Igualando las dos expresiones anteriores, podemos obtener la aceleración del cdm como

$$\vec{a}_C = \frac{\sum \vec{F}_{ext\,i}}{M} = \frac{\vec{F}_{ext}}{M} = \frac{(3,\ 0)+(0,\ 4)}{0'2+0'3} = \frac{(3,\ 4)}{0'5} = (6,\ 8)\ \mathrm{m/s^2}$$

La expresión literal anterior nos dice que solo mediante una fuerza exterior resultante es posible cambiar el movimiento del cdm de un sistema, es decir, las fuerzas internas de un sistema no pueden modificar la velocidad del cdm, que permanecerá constante mientras no haya una fuerza exterior resultante actuando sobre el sistema.

Expresando ahora la aceleración como $\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt}$ y teniendo en cuenta que el sistema se encuentra inicialmente en reposo podemos integrar para obtener la expresión de la velocidad del cdm en cualquier instante:

$$\int_0^{\vec{v}_C} d\vec{v}_C = \int_0^t \vec{a}_C \cdot dt \rightarrow \vec{v}_C = \vec{a}_C \cdot t = (6t,\ 8t)\ \mathrm{m/s}$$

La velocidad del cdm se puede expresar como $\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt}$ con lo que integrando de nuevo podemos obtener el vector de posición del cdm:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}_C = \int_0^t \vec{v}_C \cdot dt \rightarrow \vec{r}_C = \vec{r}_{0C} + \int_0^t \vec{a}_C \cdot t\,dt \rightarrow \vec{r}_C = \vec{r}_{0C} + \frac{1}{2}\vec{a}_C \cdot t^2$$

El vector de posición inicial $\vec{r}_{CO}$ del cdm se puede calcular fácilmente puesto que sabemos las posiciones iniciales de cada una de las partículas, de modo que:

$$\vec{r}_{CO} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{M} = \frac{0'2\,(0,\ 3)+0'3(4,\ 0)}{0'5} = \frac{(1'2,\ 0'6)}{0'5} = (2'4,\ 1'2)\,\mathrm{m}$$

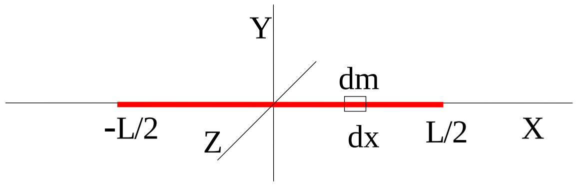
Sustituyendo este resultado en la expresión obtenida para $\vec{r}_C$ nos queda finalmente:

$$\vec{r}_C = \vec{r}_{0C} + \frac{1}{2}\vec{a}_C \cdot t^2 = (2'4,\ 1'2) + \frac{1}{2}(6,\ 8)\ t^2 \rightarrow \vec{r}_C = (3t^2 + 2'4,\ 4t^2 + 1'2)$$

Si las partículas no estuviesen unidas por la varilla, el movimiento del cdm sería el mismo, porque lo único que se eliminarían serían las fuerzas interiores y estas, como ya hemos visto, no afectan a la velocidad del cdm. No obstante, lo que sí se vería afectado sería el movimiento de cada partícula, ya que la fuerza resultante sobre cada una de ellas sería distinta. La varilla impide también que cambie la distancia entre las partículas, formando así lo que se conoce como un sólido rígido.

5. Determinad la posición del dentro de masas de una varilla longitudinal homogénea de masa m y longitud L

Siempre que tengamos un objeto extenso homogéneo y de geometría regular, podremos calcular las coordenadas de su cdm considerándolo como un sistema formado por un conjunto de infinitos elementos de masas infinitesimales, tan pequeños como queramos. En el caso que nos ocupa se trata de un objeto longitudinal, es decir, un objeto en el que una de sus dimensiones es mucho mayor que las otras dos y podemos descomponerlo en toda una serie de elementos de longitud dL a cada uno de los cuales corresponderá una masa dm, tal y como se indica en la figura adjunta (en donde ya hemos escogido un sistema de referencia, respecto al que obtendremos las coordenadas del cdm).



Si tomamos el sistema de referencia de la figura, podemos ver que dL = dx y que los elementos infinitesimales se distribuyen de forma continua desde que x = -L/2 (extremo izquierdo de la varilla) hasta que x = L/2 (extremo derecho de la varilla. Se trata de una suma de infinitos sumandos infinitesimales, lo que nos conduce a expresar las coordenadas del centro de masas como:

$$x_C = \frac{\int_{-L/2}^{L/2} dm \cdot x}{\int_0^m dm}; \; y_C = 0; \; z_C = 0.$$

En el numerador de la expresión de x_C figura una integral que, de entrada, no podemos resolver porque en ella existen dos variables (m y x). Una forma de solucionar este inconveniente es *buscar una relación entre dichas variables*.

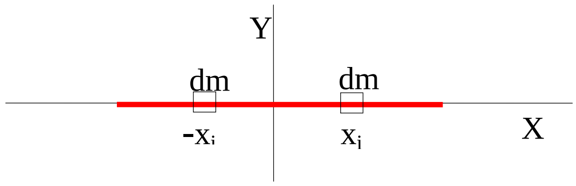
Como la varilla es homogénea la densidad de la misma será constante, esto significa que será la misma sea cual sea la longitud del trozo de varilla que se considere. Por otra parte, al tratarse de un objeto longitudinal, podemos calcular el valor de su densidad dividiendo la masa entre la longitud, de manera que, si designamos por λ a la densidad:

$\lambda = m/L$ y también para una masa infinitesimal: $\lambda = dm/dL = dm/dx$, con lo que: $dm = \lambda \cdot dx$

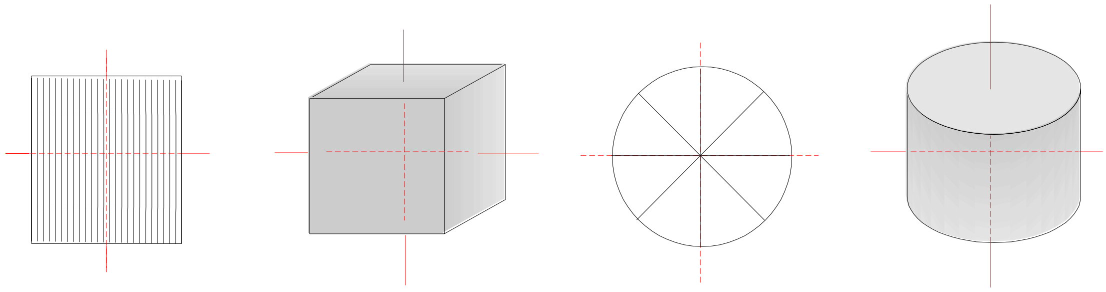
Sustituyendo ahora dm en la expresión de x_C obtenemos que:

$$x_C = \frac{\int dm \cdot x}{\int_0^m dm} = \frac{\int_{-L/2}^{L/2} \lambda \cdot x \cdot dx}{M} = \frac{\lambda \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-L/2}^{L/2}}{M} = \frac{M \cdot \left(\frac{L^2}{8} - \frac{L^2}{8}\right)}{L \cdot M} = 0$$

Es decir, el cdm de la varilla estaría situado en el centro de la misma, coincidiendo con su eje de simetría. Este resultado no es, por supuesto, fruto de la casualidad sino que obedece a que, debido a la simetría de la figura, siempre que consideremos un elemento de masa dm situado fuera del eje de simetría a una cierta distancia x_i del mismo, le podemos hacer corresponder otro igual situado en la posición $-x_i$, de forma que la posición del cdm de ambos coincidirá con la del centro de simetría y esto lo podemos hacer para todas las parejas de elementos infinitesimales que componen la varilla:

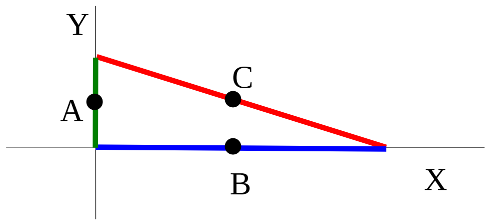


Este resultado se puede generalizar para cualquier otro objeto que tenga centro de simetría y sea homogéneo, ya que podría considerarse como compuesto de una serie de varillas de masa infinitesimal dispuestas de forma que sus centros coincidan con el centro de simetría, de manera que, siempre que se cumplan las condiciones anteriores (homogeneidad y existencia de centro de simetría) el cdm de un objeto estará localizado en el mismo centro de simetría.



6. Un triángulo rectángulo está constituido por tres varillas homogéneas de longitud 13 cm, 12 cm y 5 cm, cuyas masas son, respectivamente: 100 g, 80 g y 20 g. Obtened la situación del c.d.m. correspondiente a dicho triángulo.

De acuerdo con lo tratado en el ejercicio anterior, para localizar el cdm de este sistema cada una de las varillas puede considerarse como una masa puntual situada en su centro de simetría y de valor igual a la masa total de la varilla, de manera que el problema se reduce así a determinar la posición del cdm de un sistema formado por tres masas puntuales, dispuestas de cierta forma. Para ello, hemos de escoger en primer lugar un sistema de referencia que nos resulte cómodo, como, por ejemplo el que se indica en la figura siguiente:



Los datos correspondientes a cada una de las masas serán pues:

m_A = 20 g; $\vec{r}_{CA}$ = (0, 2'5) cm
m_B = 80 g; $\vec{r}_{CB}$ = (6, 0) cm
m_C = 100g; $\vec{r}_{CC}$ = (6, 2'5) cm

y el vector de posición del cdm del sistema vendrá dado por:

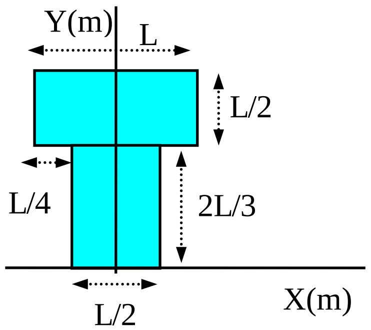
$$\vec{r}_C = \frac{m_A\vec{r}_{CA} + m_B\vec{r}_{CB} + m_C\vec{r}_{CC}}{m_A + m_B + m_C} = \frac{20\,(0,\ 2'5) + 80\,(6,\ 0) + 100\,(6,\ 2'5)}{200} = (5'4,\ 1'5)\ \text{cm}$$

El cdm de las tres varillas se encuentra pues, en el interior del triángulo formado por las mismas y situado, como es lógico, un poco a la izquierda de la recta que une los centros de las varillas C y B. Por otra, parte podemos comprobar que el cdm puede, como ocurre en este caso, estar situado en un punto donde en realidad no exista masa alguna.

7. Hallad las coordenadas del c.d.m. del sistema formado por un cilindro homogéneo de 2 kg cuyo centro de masas se encuentra en el punto A (0, 1, 0) m y una varilla homogénea de 4 kg cuyo centro se encuentra en el punto B (2, 0, 0) m.

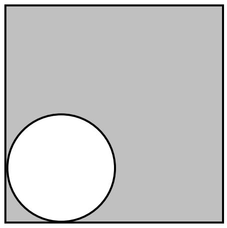
sol: (4/3, 1/3, 0) m

8. Determinad la posición del c.d.m. de la figura adjunta. (Se considera que la figura es homogénea y que solo tiene las dos dimensiones indicadas en el dibujo).



sol: $\vec{r}_c$ = (0, 0'68L) m

9. Determinad el c.d.m. de un cuadrado homogéneo de lado L, en el que se ha practicado un orificio, según se aprecia en la figura adjunta.

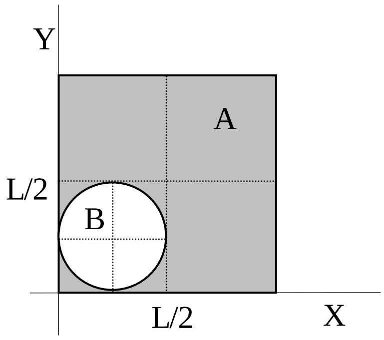


En este caso, debido al agujero, la figura no presenta centro de simetría. Se trata pues de obtener la posición del cdm correspondiente a la parte sombreada del cuadrado, que es la única que tiene masa. *¿Cómo podríamos hacerlo?*

Lo más sencillo es suponer que la figura estuviese completa y que la podamos descomponer en dos: una, que llamaremos A, que es la parte sombreada (cuyo $\vec{r}_{CA}$ es la incógnita del problema) y otra, que llamaremos B, que será el círculo. El cdm del cuadrado completo se podrá determinar sustituyendo cada una de las figuras A y B por un punto, (su propio cdm), en el que esté concentrada toda su masa:

$$\vec{r}_C = \frac{m_A \vec{r}_{CA} + m_B \vec{r}_{CB}}{m_A + m_B}$$

En la figura adjunta hemos situado el cuadrado en un sistema de referencia de tal forma que la posición de su cdm será $\vec{r}_C$ = (L/2, L/2) y corresponderá al cdm de dos masas puntuales m_A, cuya posición $\vec{r}_{CA}$ queremos hallar, y m_B situada según el vector de posición $\vec{r}_{CB}$ = (L/4, L/4). Aplicando la expresión de $\vec{r}_C$ obtenemos que:



$$\vec{r}_C = \frac{m_A \vec{r}_{CA} + m_B \vec{r}_{CB}}{m_A + m_B} \text{ de donde } \vec{r}_{CA} = \frac{(m_A + m_B)\vec{r}_C - m_B \vec{r}_{CB}}{m_A} = \frac{m \cdot \vec{r}_C - m_B \vec{r}_{CB}}{m - m_B}$$

Dado que no conocemos las masas de A ni de B, hemos de *buscar algún modo de poner dichas masas en función de los datos que se nos dan (longitud del lado del cuadrado).*

Ello puede conseguirse mediante la utilización del concepto de densidad (en este caso densidad superficial σ, puesto que se trata de un objeto bidimensional).

Para el cuadrado completo: $m = \sigma \cdot L^2$
Para el círculo: $m_B = \sigma \, \pi \, L^2/16$

Para la figura A: $m_A = \sigma \cdot L^2 - \sigma\, \pi\, L^2/16 = \sigma \cdot L^2\, (1 - \pi/16)$

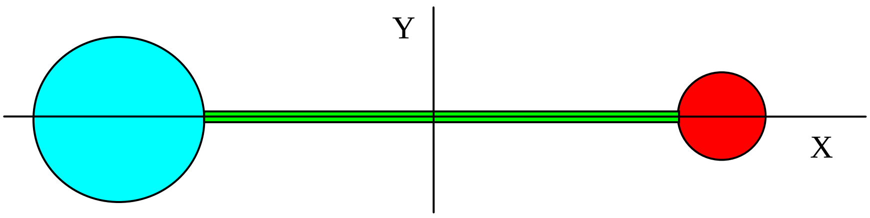
Sustituyendo las expresiones anteriores nos queda que:

$$\vec{r}_{CA} = \frac{m \cdot \vec{r}_C - m_B \vec{r}_{CB}}{m - m_B} = \frac{\sigma L^2 (L/2, L/2) - \sigma \pi L^2/16\,(L/4, L/4)}{\sigma L^2 (1 - \pi/16)} = \frac{(L/2, L/2) - \pi(L/64, L/64)}{(1 - \pi/16)}$$

y finalmente: $\vec{r}_{CA} = (0'56L, 0'56L)$

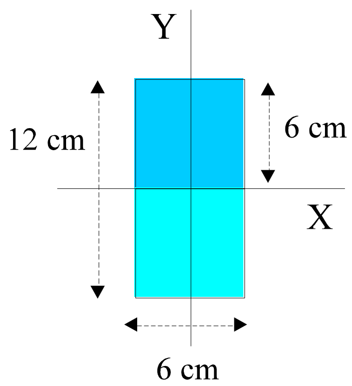
Otra forma de resolver este tipo de problemas, consiste en suponer el objeto real como un cuadrado completo al que se le ha superpuesto en la posición indicada un círculo imaginario de igual densidad pero negativa. Se trata de un procedimiento matemático ya que obviamente no existen objetos con masa negativa, pero que puede hacer que los cálculos resulten bastante más cómodos. *Aplicadlo en este caso y comprobad que se obtiene el mismo resultado.*

10. Determinad el c.d.m. del cuerpo formado al unir dos esferas; una de 10 kg masa y 2 m de radio y la otra de 3 kg de masa y 1 m radio, mediante una varilla de 2 kg y 10 m de longitud, según se aprecia en la figura.



sol: $\vec{r}_c = (-3'46,\ 0)$ m

11. La superficie rectangular de la figura adjunta tiene doble densidad en la zona más oscura que en la más clara. Determinad el radio del orificio circular, con centro en el punto P (0, 3) cm, que deberemos practicar para que el c.d.m. de la figura resultante quede situado en el punto (0, -1) cm.



Si la figura tuviese toda ella la misma densidad, la posición del cdm coincidiría con la del centro de simetría (situado en el origen de coordenadas). Sin embargo, como la densidad de la parte superior es mayor que la de la parte inferior, el cdm estará sobre el eje Y pero situado en la parte positiva. Si realizamos un orificio circular con centro en el punto de coordenadas (0, 3) cm, el cdm de la figura resultante se habrá desplazado hacia abajo (pues desaparece masa de la parte superior). Como es lógico, dicho desplazamiento será tanto mayor cuanto mayor sea el radio del orificio. Esto quiere decir que ha de existir una relación entre la posición del cdm y el radio del agujero que hagamos, de forma que si fijamos un valor para la posición del cdm, ello determinará el radio que deba de tener dicho agujero.

¿Cómo podríamos hallar el radio orificio?

Podemos considerar el rectángulo como el conjunto de dos objetos:

Cuadrado superior A, de lado L, masa m_A, con un agujero circular de radio R en su centro y con su cdm situado en la posición $x_{CA} = 0$, $y_{CA} = 3$ cm, es decir, coincidiendo con el centro del agujero. Densidad = 2σ.

Cuadrado inferior B, de lado L, masa m_B, y cdm en $x_{CB} = 0$, $y_{CB} = -3$ cm. Densidad = σ.

La masa del cuadrado agujereado A, se puede considerar como la masa del cuadrado completo al que le hemos quitado un trozo de forma circular, es decir: $m_A = 2\sigma L^2 - 2\sigma\pi R^2$. El radio del orificio se podría calcular entonces a partir de la expresión del cdm del conjunto formado por dos masas puntuales m_A y m_B situadas respectivamente en el cdm correspondiente a cada uno de los cuadrados, ya que el cuadrado B no cambia y al superior se le ha practicado el agujero en el centro del mismo. Por otra parte, debido a la simetría de la figura y al sistema de referencia escogido, queda claro que $x_C = 0$, por lo que solo calcularemos y_C.

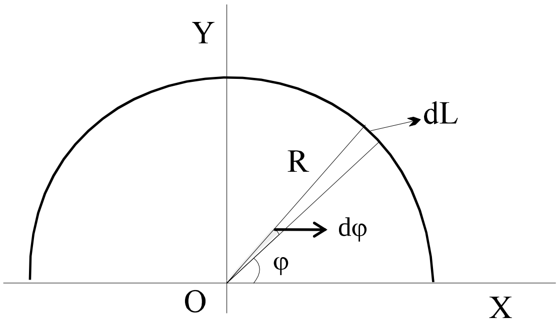
$$y_C = \frac{m_A y_{CA} + m_B y_{CB}}{m_A + m_B} = \frac{(2\sigma L^2 - 2\sigma\pi R^2)L/2 + \sigma L^2(-L/2)}{(2\sigma L^2 - 2\sigma\pi R^2) + \sigma L^2} = \frac{\frac{L^3}{2} - L\pi R^2}{3L^2 - 2\pi R^2}$$

Sustituyendo y_C por -1 cm y despejando el radio R, queda $R = \sqrt{\frac{L^3 + 6L^2}{2\pi(2 + L)}}$ =2’93 cm.

12. Determinad la posición del centro de masas de un semianillo de radio R.

En este caso no existe un centro de simetría y si queremos determinar la posición del cdm tendremos que proceder descomponiendo el anillo en elementos de longitud infinitesimal dl (a cada uno de los cuales corresponderá una masa dm) distribuidos de forma continua a lo largo del mismo. Tomaremos el sistema de referencia de la figura ya que al ser el eje OY de simetría, el cdm estará situado en uno de sus puntos y, en consecuencia, x_C valdrá 0, quedando reducido el problema a determinar y_C.. Supondremos que el diámetro del alambre del que está hecho el semianillo, es despreciable frente a su longitud (cuerpo longitudinal).

La expresión correspondiente a y_C se podrá obtener como: $y_C = \dfrac{\int_0^m y\,dm}{m}$



La integral anterior ha de abarcar a todo lo que es el semianillo. Podemos resolverla buscando una relación entre la variable "y" y la variable m, o bien, una relación de ambas con una tercera. *Para ello podemos utilizar la densidad λ del anillo.*

En efecto, sabemos que: $m = \lambda \cdot L = \lambda \cdot \pi R$. Como es homogéneo, también se cumplirá que $dm = \lambda \cdot dL$, de manera que:

$$y_C = \frac{\int_0^m y\,dm}{m} = \frac{\int_0^L y \cdot \lambda dL}{m}$$

En este caso dL no se puede identificar con dx (como sucedía en la varilla recta) ni con dy, aunque sí que podemos relacionarlo con el ángulo ya que dL representa, precisamente, la longitud del arco infinitesimal que abarca en ángulo dφ y, por tanto, $dL = R \cdot d\varphi$, con lo que sustituyendo en la expresión anterior tenemos:

$$y_C = \frac{\int y\,dm}{m} = \frac{\int_0^L y \cdot \lambda dL}{m} = \frac{\int_0^\pi y \lambda R d\varphi}{m} = \frac{\lambda R \int_0^\pi y\,d\varphi}{m}$$

Sin embargo, todavía no podemos resolver la integral, puesto que tenemos dos variables: φ e y. Tendremos, pues, que *buscar una relación funcional entre ambas* que nos permita eliminar una de ellas.

Si nos fijamos en la figura, podemos darnos cuenta de que la ordenada "y" del elemento dL es $y = R \operatorname{sen} \varphi$, luego:

$$y_C = \frac{\lambda R \int_0^\pi R \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{m} = \frac{\lambda R^2 \int_0^\pi \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{m} = \frac{\lambda R^2 \left[-\cos\varphi\right]_0^\pi}{m} = \frac{2\lambda R^2}{m}$$

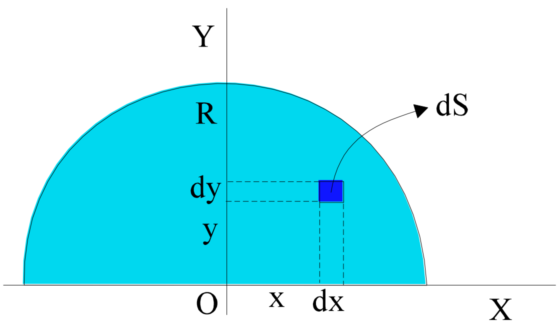
y si consideramos que $m = \lambda \cdot \pi R$, nos queda finalmente que: $y_C = \dfrac{2R}{\pi} = 0'64 \cdot R$

13. Determinad la posición del centro de masas de un semicírculo de radio R.

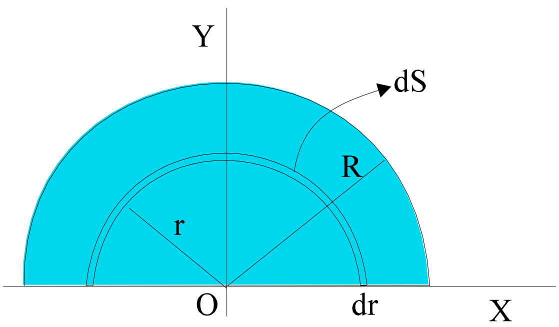
Se trata, en este caso, de una figura superficial que no presenta centro de simetría, aunque sí un eje de simetría en el cual debe encontrarse su cdm. Tomaremos el sistema de referencia, según se aprecia en el dibujo, de forma que únicamente necesitaremos calcular y_C.

Considerando el objeto como un conjunto de masas infinitesimales: $y_C = \dfrac{\int y dm}{m}$

Cada elemento dm se puede calcular como dm = σ · dS = σ · dx · dy, siendo σ la densidad superficial del objeto. Esto nos llevaría a tener que resolver una integral doble que, no siendo excesivamente complejo, queda fuera del nivel en que nos encontramos.



Podemos superar este inconveniente si en lugar de descomponer el semicírculo en cuadrados infinitesimales lo hacemos en semianillos de superficie dS. Para ello, con centro en O dibujamos semicircunferencias cuyos radios "r" vayan aumentando sucesivamente en dr, de esta forma tendremos infinitas semicircunferencias que descomponen el semicírculo en infinitos semianillos de espesor dr. A cada semianillo le corresponde una masa dm cuyo valor estará relacionado con su superficie mediante la expresión dm = σ · dS



¿Cuál sería la expresión de dS en función del radio r?

Dicha superficie infinitesimal puede evaluarse fácilmente si tenemos en cuenta que cada uno de esos semianillos si lo "desdobläsemos" equivaldría a un rectángulo infinitesimal de longitud πr y altura dr (por lo que dS = π r · dr) o también, teniendo en cuenta que dS es la superficie comprendida entre el semicírculo de radio r y el de radio r+dr, de forma que restando obtendríamos:

$$dS = \frac{\pi(r+dr)^2 - \pi r^2}{2} = \frac{\pi r^2 + 2\pi r dr + \pi(dr)^2 - \pi r^2}{2}$$

y como $(dr)^2$ se puede considerar despreciable frente al resto, nos queda que dS = π r· dr. Otro procedimiento (más riguroso) consiste en diferenciar la función $S = \pi r^2/2$ con lo que resulta: dS = π r· dr.

Proceded ahora a determinar la posición del cdm del semicírculo.

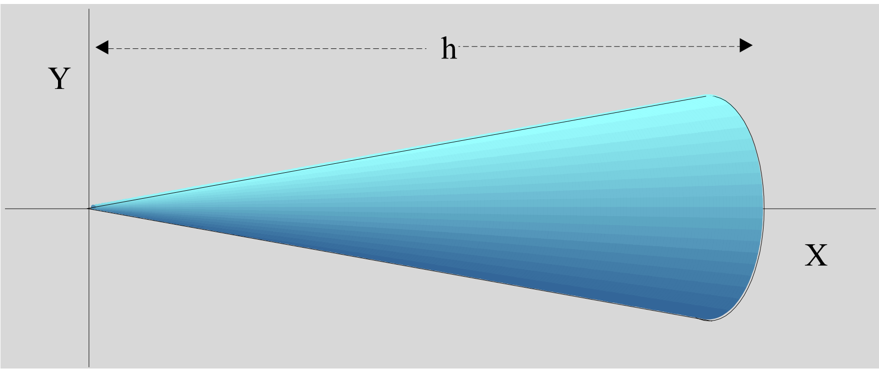
El cdm de cada uno de esos semianillos estaría situado según y = 2r/π (ved resultado del ejercicio anterior). Por tanto la posición del cdm correspondiente a todo el semicírculo se podrá calcular considerando a cada uno de esos semianillos como una masa puntual de valor dm colocada sobre el eje OY en la ordenada y = 2r/π, con lo que:

$$y_C = \frac{\int ydm}{m} = \frac{\int \frac{2}{\pi} r \cdot \sigma \cdot dS}{m} = \frac{2/\pi \int_0^R r \cdot \sigma \cdot \pi r \cdot dr}{m} = \frac{2\sigma R^3}{3m}$$

y teniendo en cuenta que $m = \sigma \cdot \pi R^2/2$, nos queda finalmente que: $y_C = 4R/3\pi = 0'42 \cdot R$

14. Determinad la posición del centro de masas correspondiente a un cono macizo, de densidad constante, radio de la base R y altura h.

El cdm del cono deberá de estar ubicado en el eje de simetría que presenta el cuerpo. Si tomamos el sistema referencial del dibujo, solo será necesario calcular la coordenada x del centro de masas.

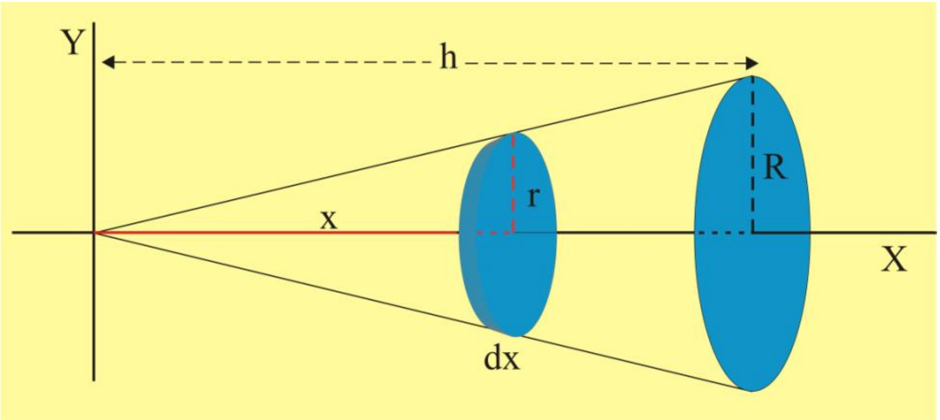


Se trata ahora, de un objeto tridimensional y cuya masa está distribuida de forma continua y homogénea. La coordenada x del cdm correspondiente viene dada por:

$$x_C = \frac{\int xdm}{m}$$

¿En qué tipo de elementos de masa dm nos convendría descomponer el cono para poder resolver la integral anterior de forma sencilla?

Una posibilidad es trazar planos paralelos a la base y distanciados dx unos de otros, de esta forma el cono quedaría descompuesto en infinitos discos de volumen dV, correspondiendo a cada uno de ellos una masa dm. El radio r de cada uno de esos discos iría cambiando desde 0 (vértice del cono) hasta R (base del cono) y su volumen dV se podría evaluar considerando que corresponde a un cilindro infinitesimal de radio r y altura dx, con lo que nos queda $dV = \pi r^2 \cdot dx$. Cada disco tiene su cdm en su centro de simetría (sobre el eje OX) y su masa se puede expresar en función de la densidad ρ como $dm = \rho \cdot dV$.



La posición del cdm de todo el cono se podrá determinar sustituyendo cada uno de los discos por una masa puntual de valor dm situada sobre el eje OX en la coordenada x que corresponda a dicho disco.

$$x_C = \frac{\int x dm}{m} = \frac{\int x\rho \cdot dV}{m} = \frac{\int x\rho \cdot \pi r^2 \cdot dx}{m}$$

Para resolver la integral anterior será necesario que quede una única variable.

Si nos fijamos en el dibujo, nos podemos dar cuenta de la relación existente entre "r" y "x", ya que ambos son los catetos de una triángulo rectángulo que es semejante a otro mayor cuyos catetos son R y h, por lo que por semejanza de triángulos podemos escribir r/x = R/h y despejar r, con lo que r = Rx/h. Podemos ahora sustituir r por esta expresión en la integral anterior y resolverla:

$$x_c = \frac{\int x\rho \cdot \pi r^2 \cdot dx}{m} = \frac{\int_0^h x\rho\pi (R/h)^2 x^2 \cdot dx}{m} = \frac{\rho\pi (R/h)^2 \int_0^h x^3 \cdot dx}{m} = \frac{\rho\pi (R/h)^2 \cdot (h^4/4)}{m}$$

y considerando ahora que $m = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi R^2 h/3$ nos queda finalmente: $x_C = 3h/4$

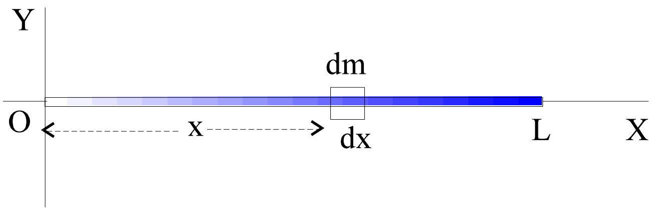
Por tanto, el cdm de un cono macizo y homogéneo de altura h, está situado a una distancia de 3h/4 de su vértice (o lo que es lo mismo, a h/4 del centro de su base). El hecho de que esté más cerca de la base que del vértice es lógico, si tenemos en cuenta cómo se distribuye la masa en la figura (más masa cuanto más cerca de la base).

15. Determinad la posición del centro de masas de un triángulo equilátero de lado L.

sol: Está situado a 2h/3 del vértice superior, siendo h la altura del triángulo.

16. Determinad la posición del centro de masas de una varilla de longitud L cuya densidad aumenta linealmente con la distancia a uno de sus extremos.

En este caso, aunque la densidad no sea constante podemos conocer su valor en cada punto (se halla determinada por una cierta función) lo que nos permite que también podamos considerar la varilla como un conjunto de masas infinitesimales y, después de escoger un sistema de referencia apropiado, proceder a integrar la expresión correspondiente para determinar la posición del cdm.



En la figura anterior hemos representado una varilla lineal, de forma que las coordenadas y_C y z_C serán 0, con lo que el problema se reduce a determinar x_C correspondiente a una varilla cuya densidad aumenta de un extremo al otro de forma lineal, es decir: $\lambda = Kx$ donde K es una constante y x la distancia al extremo hacia el cual la densidad se va haciendo más pequeña, extremo que, en la figura, hemos situado en el origen de coordenadas.

¿Hacia dónde estará situado el centro de masas de la varilla?

Es evidente que en este caso no estará en la mitad (como ocurría con la varilla homogénea) sino que se hallará desplazado hacia la derecha del punto medio, ya que la densidad λ de la varilla va aumentando hacia ese lado y por tanto los elementos de masa dm en que hemos considerado descompuesta la varilla, tendrán cada vez más “influencia” en cuanto a su contribución a la situación del centro de masas ($dm = \lambda \cdot dx$).

Determinad la coordenada x_C correspondiente al centro de masas de la varilla

Para ello podemos utilizar la expresión correspondiente a x_C para una distribución continua de masa, teniendo en cuenta que la densidad no es constante y que no conocemos el valor de la masa total de la varilla.

$$x_C = \frac{\int dm \cdot x}{\int dm} = \frac{\int \lambda \cdot x \cdot dx}{\int \lambda \cdot dx} = \frac{\int_0^L \mathrm{Kx^2 \cdot dx}}{\int_0^L \mathrm{Kx \cdot dx}} = \frac{\mathrm{K}\left[\mathrm{x^3/3}\right]_0^L}{\mathrm{K}\left[\mathrm{x^2/2}\right]_0^L} = \frac{2\mathrm{L}}{3} = 0\text{'}67\ \mathrm{L}$$

Como podemos comprobar, el centro de masas se halla desplazado del centro de la varilla hacia la zona en donde la densidad va aumentando tal y como habíamos supuesto anteriormente.

17. Una granada cae verticalmente y cuando se encuentra a 200 m del suelo y con rapidez de 80 m/s, estalla rompiéndose en dos fragmentos de igual masa. Sabiendo que uno de los fragmentos sale verticalmente y hacia abajo a 100 m/s, determinad:

a) La rapidez con la que sale el otro fragmento.
b) La posición de cada fragmento 2 s después de la explosión y, a partir de las mismas, la del c.d.m. en ese mismo instante.
c) La posición de la granada a los 2 segundos en caso de que no hubiese estallado.

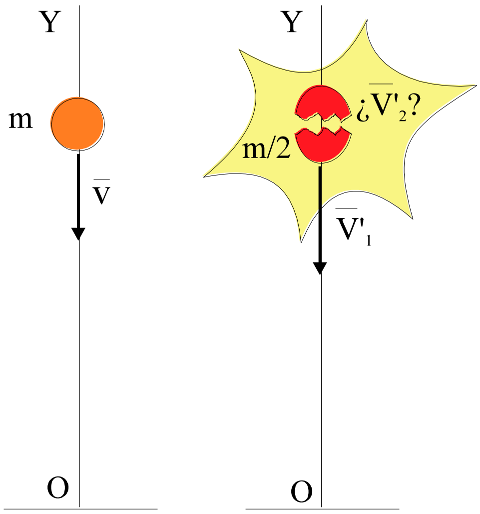
La granada está cayendo hacia el suelo y en un instante determinado estalla rompiéndose en dos fragmentos. Considerando la granada como un sistema de dos partículas, podemos decir que durante el breve intervalo de tiempo que dura la explosión, actúan unas fuerzas internas de gran intensidad debido a los gases en expansión, que hacen cambiar sensiblemente la velocidad con que se mueve cada uno de los fragmentos en relación a la velocidad que llevaban (la de la granada) al comenzar la explosión. Como en el problema nos piden precisamente la velocidad con que sale despedido uno de esos fragmentos, *una cuestión importante que nos hemos de plantear en primer lugar es si la cantidad de movimiento del sistema se conserva o no durante el tiempo que dura la explosión.*

El principio de conservación de la cantidad de movimiento de un sistema, exige que sobre dicho sistema no actúe ninguna fuerza exterior (o que la suma de todas las que actúen sea 0). En dichas condiciones sabemos que, debido a las fuerzas interiores, puede cambiar la cantidad de movimiento de algunas de las partes del sistema, pero que ello se hará de forma que la cantidad total de movimiento del sistema se mantenga siempre constante. En este caso, sí que actúa una fuerza exterior al sistema: la fuerza gravitatoria (peso) con que, tanto la granada, como cada uno de los trozos en que se parte, son atraídos por la Tierra. Esta fuerza es la responsable de que la cantidad de movimiento de la granada no se conserve sino que vaya aumentando conforme va cayendo hacia el suelo.

No obstante, si consideramos únicamente el intervalo de tiempo que dura la explosión, podemos ignorar el efecto de la fuerza peso en el sistema ya que ésta es muchísimo menor que las fuerzas interiores y durante un tiempo tan sumamente corto apenas puede influir en la cantidad de movimiento de cada uno de los fragmentos. Por el contrario las fuerzas interiores, aunque actúen muy poco tiempo sí que cambian sensiblemente la velocidad de cada trozo, ya que son mucho más intensas que el peso, pero como se trata de fuerzas internas no influyen en la cantidad de movimiento del sistema. En definitiva pues, podemos considerar que durante el brevísimo tiempo que dura la explosión, la cantidad de movimiento del sistema se conserva y por tanto será prácticamente la misma al comenzar y al finalizar la explosión. Si llamamos $\vec{p}$ a la cantidad de movimiento del sistema al iniciarse la explosión, $\vec{p}'_1$ y $\vec{p}'_2$ a las cantidades de movimiento respectivas que los dos fragmentos 1 y 2 en que se rompe la granada tienen justo al finalizar la explosión, podemos escribir, pues, que :

$$\vec{p} = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \text{ o lo que es lo mismo: } m\vec{v} = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 .$$

Podemos representar la situación mediante el siguiente esquema:



En el dibujo de la izquierda se ha escogido un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el suelo y cuyo eje de ordenadas coincide con la línea vertical de caída de la granada. En dicho sistema de referencia $\vec{v}$ es la velocidad que lleva la granada al comenzar la explosión y vale $\vec{v}$ = (0, -80) m/s. Así mismo, $\vec{v}'_1$ es la velocidad del fragmento 1 justo al finalizar la explosión y vale $\vec{v}'_1$ = (0, -100) m/s y $\vec{v}'_2$ es lo que hemos de calcular.

¿Cómo podemos determinar la velocidad del segundo fragmento inmediatamente después de la explosión?

Dicha velocidad puede calcularse a partir de la ecuación anterior correspondiente al principio de conservación de la cantidad de movimiento, sin más que despejar de ella $\vec{v}'_2$

¿Hacia donde debería de moverse el fragmento 2 inmediatamente después de la explosión?

Si antes de explotar la cantidad de movimiento venía representada por un vector que solo tenía componente “y”, como el fragmento 1 sigue moviéndose en el eje Y, concluimos que el 2 también ha de hacerlo para que la cantidad de movimiento del sistema sea igual (módulo, dirección y sentido) inmediatamente antes y después de la explosión.

De la expresión anterior, resultante de aplicar el principio de conservación de la cantidad de movimiento, obtenemos la velocidad con que saldrá despedido el fragmento 2 como:

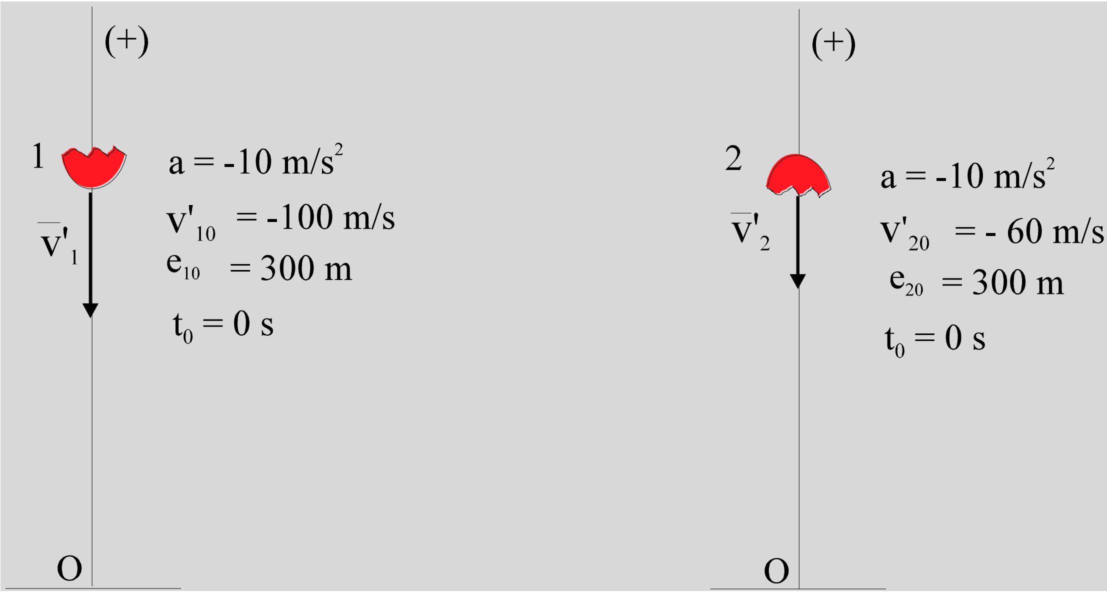
$$\vec{v}'_2 = \frac{m\vec{v} - m_1\vec{v}'_1}{m_2}$$

Dado que la granada se parte en dos trozos iguales, se cumplirá que $m_1 = m_2 = m/2$ con lo que sustituyendo en la expresión anterior nos queda finalmente que:

$$\vec{v}'_2 = \frac{m\vec{v} - m_1\vec{v}'_1}{m_2} = \frac{m\vec{v} - \frac{m\vec{v}'_1}{2}}{m/2} = 2\,(\vec{v} - \frac{\vec{v}'_1}{2}) = (0, -60) \text{ m/s.}$$

¿Cómo podríamos determinar ahora la posición de cada uno de los fragmentos 2 s después de la explosión?

Dado que las velocidades tras la explosión son vectores en la dirección vertical y que la fuerza peso también actúa en la misma dirección, el movimiento posterior a la explosión será de trayectoria conocida (rectilínea) y eso nos permite aplicar un tratamiento escalar:



Si consideramos como instante inicial el momento en que se produce la explosión y origen de espacios el suelo tal y como se representa en los esquemas anteriores, podemos obtener las ecuaciones de la rapidez v = v (t) y de la posición e = e (t) de cada uno de los fragmentos. Para ello podemos tener en cuenta que la aceleración con que se mueven ambos es constante (aceleración de la gravedad) y aplicar directamente las ecuaciones correspondientes al movimiento uniformemente acelerado:

$v = v_0 + a\ (t-t_0)$
$e = e_0 + v_0\ (t-t_0) + a\ (t-t_0)^2/2$

Para el fragmento 1, a = -10 m/s; v_{1_0} = -100 m/s, e_{1_0} = 300 m; t_{1_0} = 0 s, con lo que:

$v_1 = -100 - 10t$
$e_1 = 300 - 100t - 5t^2$

Para el fragmento 2, a = -10 m/s; v_{2_0} = -60 m/s; e_{2_0} = 300 m; t_{2_0} = 0 s, con lo que:

$v_2 = -60 - 10t$
$e_2 = 300 - 60t - 5t^2$

Las ecuaciones anteriores nos proporcionan la rapidez y posición de cada uno de los fragmentos desde la explosión hasta el instante en que llegan al suelo. Así si queremos saber el valor de dichas magnitudes en el instante 2 s, sustituimos t por 2 y nos queda:

v_1 = -100 -20 = -120 m/s; e_1 = 300 - 200 - 20 = 80 m
v_2 = -60 -20 = -80 m/s; e_2 = 300 -120 -20 = 160 m

¿Cómo podemos calcular la posición del centro de masas?

Como conocemos la posición de cada uno de los fragmentos en cualquier instante y la componente x es nula (el movimiento transcurre en el eje Y), bastará con determinar y_C mediante la expresión correspondiente al instante t = 2 s.

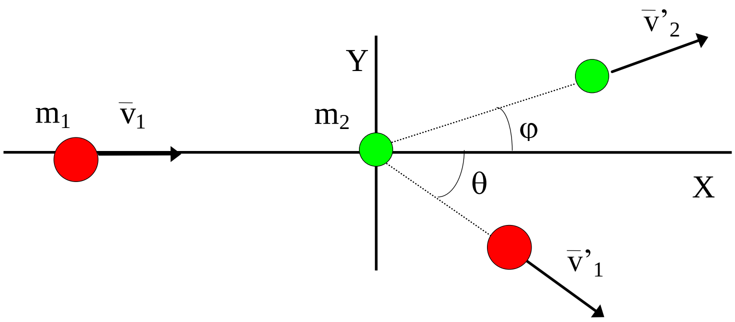
$$y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m} = \frac{\frac{m}{2}\cdot y_1 + \frac{m}{2}\cdot y_2}{m} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{80+160}{2} = 120\ \text{m}$$

¿Dónde se encontraría la granada si no hubiese estallado?

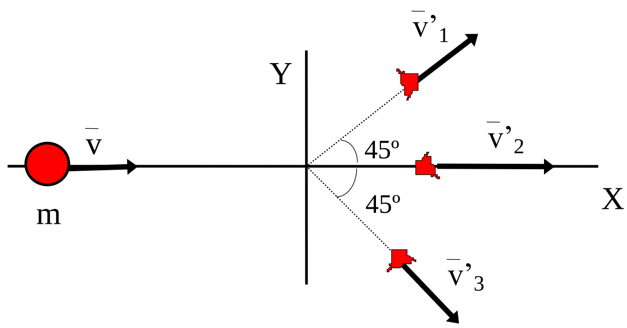
No es necesario realizar ningún cálculo para admitir que como la única fuerza exterior que actúa es el peso y las fuerzas internas (en este caso las de la explosión) no pueden modificar la velocidad del cdm, la posición de la granada en cualquier instante coincidirá con la de su cdm independientemente de que estalle o no. Para comprobarlo no tenemos mas que calcular la posición de la granada en el instante t = 2 s (suponiendo que no estalla) y ver que nos sale también 120 m. En efecto:

Si la granada no estalla, a = -10 m/s^2 ; t_0 = 0s; v_0 = -80 m/s; e_0 = 300 m, de modo que:
e = 300 -80t -5t^2 y sustituyendo t por 2 s nos queda que e = 120 m

18. Escribid la ecuación vectorial correspondiente al Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento en la colisión representada en la figura adjunta.



19. Una granada que se encuentra desplazándose horizontalmente a razón de 8 km/h, estalla rompiéndose en tres fragmentos de igual masa según se aprecia en la figura. Determinad las rapideces de los fragmentos 1 y 3, si el fragmento 2 tiene una rapidez de 16 km/h.

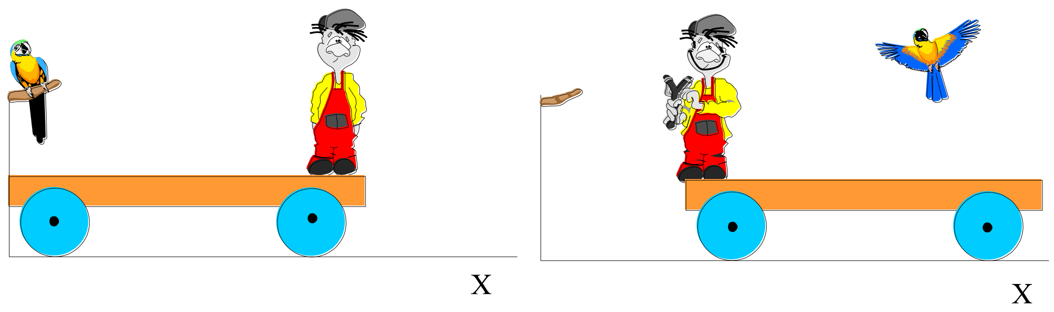


sol: $4\sqrt{2}$ km/h.

20. Un núcleo, inicialmente en reposo, decae radiactivamente emitiendo un electrón de cantidad de movimiento 9'22 · 10^{-21} kg·m/s y, formando un ángulo recto con el electrón, un neutrino de cantidad de movimiento 5'33 · 10^{-21} kg·m/s. ¿Cuál será la cantidad de movimiento del núcleo residual?

sol: $\vec{p}_r^{\,'} = (-5'33 \cdot 10^{-21}, -9'22 \cdot 10^{-21})$ kg·m/s

21. Una persona de 80 kg se encuentra sobre una lámina de 20 kg y 4 m de longitud. Sabiendo que la lámina va provista de unas ruedas de masa despreciable (lo que nos permite ignorar las fuerzas de fricción), determinad el desplazamiento de la misma cuando la persona se haya desplazado de un extremo al otro.



Para desplazarse, la persona (A) ejerce una fuerza $\vec{F}_{BA}$ sobre la lámina (B) hacia la derecha de la figura y, de acuerdo con el principio de acción y reacción, la lámina ejerce sobre ella otra fuerza $\vec{F}_{AB}$ del mismo valor y sentido contrario, de manera que, de acuerdo con las condiciones expuestas en el enunciado, persona y lámina se moverán en sentidos contrarios.

Si consideramos como sistema el conjunto de los cuerpos A y B, la pareja de fuerzas anteriormente señalada, corresponde a la interacción entre la persona y la lámina. La fuerza normal $\vec{R}_{AB}$ que la lámina hace sobre la persona y la fuerza normal $\vec{N}_{BA}$ que la persona hace sobre la lámina, también responden a esa misma interacción interna. Además actúan también las fuerzas exteriores $\vec{P}_A$ y $\vec{P}_B$ debidas a la interacción gravitatoria con la Tierra.

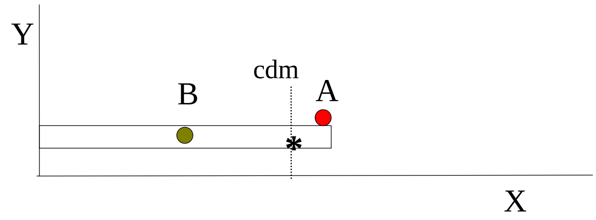
Al ser un movimiento rectilíneo, la componente normal de la aceleración es nula y, por tanto, las únicas fuerzas a considerar serán $\vec{F}_{AB}$ y $\vec{F}_{BA}$. Dichas fuerzas por ser interiores no modifican movimiento del cdm del sistema. Esto mismo viene expresado en la ecuación:

$$\vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_C$$

según la cual la fuerza exterior resultante sobre el sistema (de masa m) es la que produce un cambio en la velocidad del centro de masas. Como en nuestro caso dicha fuerza exterior es nula, ello implica que la velocidad del cdm no cambiará y, por tanto, como antes de que comenzase a andar la persona sobre la lámina, el cdm se encontraba en reposo, deberá de continuar en reposo aunque persona y lámina se desplacen por la acción de fuerzas interiores.

¿Qué podríamos hacer para conocer el desplazamiento experimentado por la lámina cuando la persona se haya movido de un extremo al otro de la misma?

Como el cdm tiene que permanecer durante todo el proceso en su posición inicial ($\vec{r}_{C0}$), bastará con fijar dicha posición y exigir que sea la misma cuando la persona haya llegado al otro extremo de la lámina.

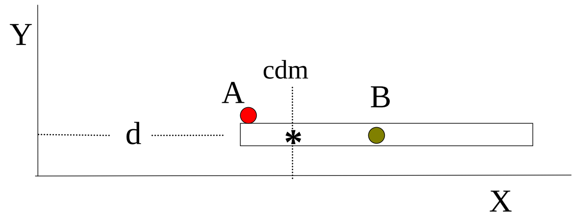


Para ello podemos tomar el sistema de referencia mostrado en la figura y sustituir cada cuerpo por una masa puntual ubicada en su cdm. Además, como la componente Y no sufre modificación alguna, solo consideraremos la componente x del cdm con lo que:

$$x_{CO} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} = \frac{m_A L + m_B \frac{L}{2}}{m} = \frac{80 \cdot 4 + 20 \cdot 2}{100} = 3'6 \text{ m}$$

En la expresión literal anterior podemos ver que conforme disminuye el valor de la masa de la persona la posición del cdm se va acercando a L/2. Análogamente, si es la masa de la tabla la que va disminuyendo, la posición del cdm se acerca a L.

Cuando la persona llegue al otro extremo de la lámina la situación será la representada en la figura siguiente:



La posición del cdm será la misma que antes, aunque las posiciones de m_A y m_B habrán cambiado. Podemos escribir pues que:

$$x_C = \frac{m_A x'_A + m_B x'_B}{m_A + m_B} = \frac{m_A\, d + m_B (L/2 + d)}{m} = x_{C0}$$

En la expresión anterior L es la longitud de la lámina y d la distancia a la que se encuentra su extremo izquierdo del eje de ordenadas en el instante en que la persona llega al mismo. Despejando d obtenemos:

$$d = \frac{m \cdot x_{CO} - \frac{L}{2} \cdot m_B}{m} = 3'2 \text{ m}$$

22. Dos cuerpos de masas m_1 = 20 g y m_2 = 100 g se encuentran en reposo y separados 9 cm sobre una superficie horizontal y sin rozamiento. Se cargan eléctricamente con el mismo signo de forma que se repelen. Determinad el desplazamiento sufrido por el de masa m_2 cuando el cuerpo de masa m_1 se haya desplazado 10 cm.

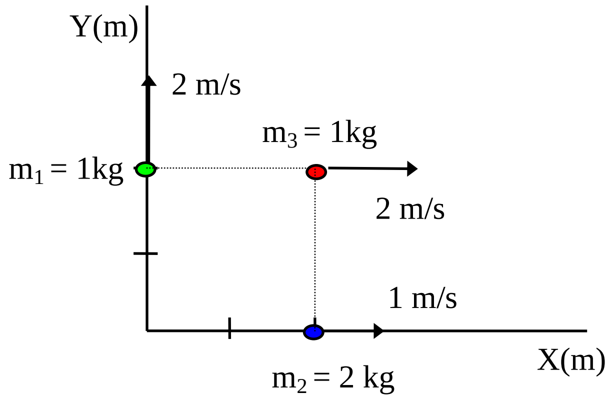
sol: 2 cm

23. Dado el sistema de partículas de la figura adjunta, determinad:

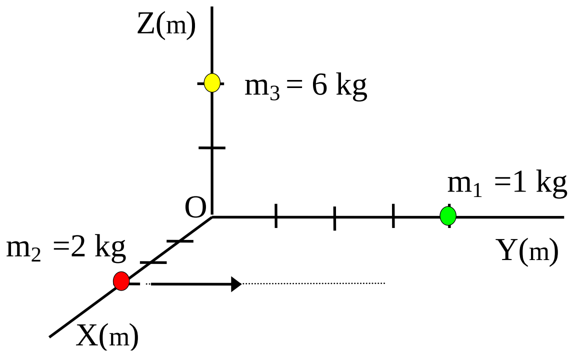
a) Posición y velocidad del c.d.m. en el instante representado en la figura.

b) Comprobad que la cantidad de movimiento del sistema respecto del c.d.m. es 0.

sol: $\vec{r}_C$ = (1'5 , 1) m ; $\vec{v}_C$ = (1, 0'5) m/s.



24. Sea un sistema de tres masas cuyas posiciones en el momento de poner el cronómetro en marcha son las de la figura. En dicho instante, las masas m_1 y m_3 se encuentran en reposo, sobre m_3 actúa una fuerza exterior de 2'4 N según el OX^+ y m_2 tiene una velocidad de 4 m/s en la dirección representada. Se pide:



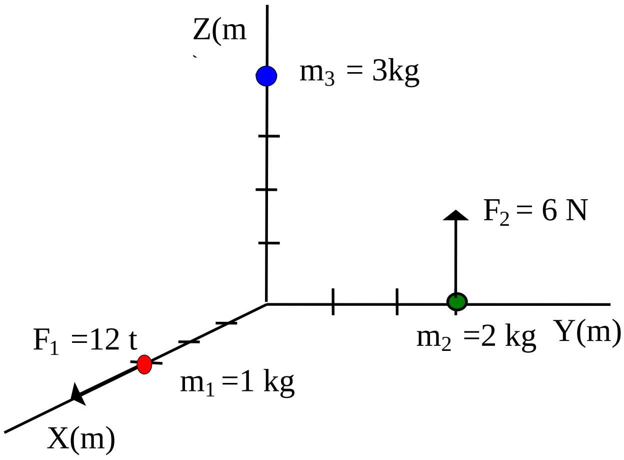
a) Posición del c.d.m. en cualquier instante.
b) Cantidad de movimiento del sistema a los 3 s.
c) Momento cinético del sistema respecto del origen de coordenadas, a los 3 s.

sol: $\vec{r}_C = \left(\frac{1'2t^2 + 6}{9}, \frac{8t+4}{9}, \frac{4}{3} \right)$; $\vec{p}_C$ = (7'2, 8, 0) kg.m/s; $\vec{L}$ = (0, 14'4 , 24) kg.m^2/s

25. Las masas de la figura se encuentran en reposo en el instante que comienzan a actuar las fuerzas exteriores representadas. Determinad:

a) Vector de posición del centro de masas, cantidad de movimiento y energía cinética del sistema formado por las tres masas.

b) Momento cinético del sistema respecto del origen de coordenadas, y comprobad que su derivada temporal coincide con el momento de las fuerzas exteriores.



El vector de posición del centro de masas correspondiente a un sistema de partículas como el que se describe en el enunciado de este problema, se puede calcular mediante la expresión:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_1^n m_i \cdot \vec{r}_i}{M}$$

en la que M es la masa total del sistema, m_i la de una de sus n partículas y $\vec{r}_i$ el vector de posición correspondiente a esa partícula. Para determinar pues la posición del cdm en cualquier instante mediante la expresión anterior, *necesitamos conocer el vector de posición de cada una de las partículas de que consta el sistema*.

Como conocemos las fuerzas que actúan sobre cada una de las partículas, podemos hallar su aceleración y después integrar convenientemente (teniendo en cuenta las condiciones iniciales) para calcular el vector de posición correspondiente:

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m_1} = \frac{(12t,\ 0,\ 0)}{1} = (12t,\ 0,\ 0)\,; \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m_2} = \frac{(0,\ 0,\ 6)}{2} = (0,\ 0,\ 3)\,\text{m/s}^2\,; \quad \vec{a}_3 = 0$$

Integrando ahora sucesivamente podemos determinar la velocidad y la posición de cada partícula en cualquier instante t.

Sabiendo que para la partícula 1, $t_0 = 0$, $\vec{v}_{10} = 0$ y $\vec{r}_{10} = (3, 0, 0)$ m:

$$\vec{a}_1 = \frac{d\vec{v}_1}{dt} \rightarrow d\vec{v}_1 = \vec{a}_1 dt \rightarrow \int_0^{\vec{v}_1} d\vec{v}_1 = \int_0^t \vec{a}_1 dt \rightarrow \vec{v}_1 = \int_0^t (12t,\ 0,\ 0)\,dt = (6t^2,\ 0,\ 0)$$

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \rightarrow d\vec{r}_1 = \vec{v}_1 dt \rightarrow \int_{\vec{r}_{10}}^{\vec{r}_1} d\vec{r}_1 = \int_0^t \vec{v}_1 dt \rightarrow \vec{r}_1 - \vec{r}_{10} = \int_0^t (6t^2,\ 0,\ 0)\,dt = (2t^3,\ 0\ ,\ 0)$$

$$\vec{r}_1 = (3,\ 0,\ 0) + (2t^3,\ 0,\ 0) = (3 + 2t^3,\ 0,\ 0)$$

Para la partícula 2 se procede igual, sabiendo que $\vec{v}_{20} = 0$ y $\vec{r}_{20} = (0, 3, 0)$ m:

$$\vec{a}_2 = \frac{d\vec{v}_2}{dt} \rightarrow d\vec{v}_2 = \vec{a}_2 dt \rightarrow \int_0^{\vec{v}_2} d\vec{v}_2 = \int_0^t \vec{a}_2 dt \rightarrow \vec{v}_2 = \int_0^t (0,\ 0,\ 3)\,dt = (0,\ 0,\ 3t)$$

$$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} \rightarrow d\vec{r}_2 = \vec{v}_2 dt \rightarrow \int_{\vec{r}_{20}}^{\vec{r}_2} d\vec{r}_2 = \int_0^t \vec{v}_2 dt \rightarrow \vec{r}_2 - \vec{r}_{20} = \int_0^t (0,\ 0,\ 3t)\,dt = (0,\ 0\ ,\ \frac{3t^2}{2})$$

$$\vec{r}_2 = (0,\ 3,\ 0) + (0,\ 0,\ \frac{3t^2}{2}) = (0,\ 3,\ \frac{3t^2}{2})$$

Como la partícula 3 se encuentra en reposo y no está sometida a fuerza alguna, su vector de posición no cambiará y sabiendo que para $t_0 = 0$, $\vec{v}_{30} = 0$ y $\vec{r}_{30} = (0, 0, 4)$ m, tendremos que:

$\vec{r}_3 = (0, 0, 4)$ m en cualquier instante.

Sustituyendo los vectores de posición obtenidos para cada partícula en la expresión que nos da el cdm del sistema obtenemos finalmente:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_1^n m_i \cdot \vec{r}_i}{M} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1(3 + 2t^3, 0, 0) + 2(0, 3, \frac{3t^2}{2}) + 3(0, 0, 4)}{6}$$

$\vec{r}_C = (t^3/3 + 1/2,\ 1,\ t^2/2 + 2)$

¿De qué otra forma podríamos haber calculado el vector de posición del centro de masas en cualquier instante?

Otra estrategia para resolver el problema consiste en calcular en primer lugar la aceleración del cdm, junto con su posición inicial y después mediante integración obtener la velocidad del cdm en cualquier instante y su vector de posición:

$$\vec{a}_C = \frac{\sum \vec{F}_{ext\,i}}{M} = \frac{\vec{F}_A + \vec{F}_D}{m_A + m_B + m_D} = \frac{(12t, 0, 0) + (0\,0, 6)}{6} = (2t,\ 0,\ 1)$$

Para poder integrar será necesario conocer la velocidad y posición del cdm en el instante 0 s:

$$\vec{r}_{C0} = \frac{m_A\,\vec{r}_{A0} + m_B\vec{r}_{B0} + \vec{r}_{D0}}{m_A + m_B + m_D} = \frac{1(3,\ 0,\ 0) + 2\,(0, 3, 0) + 3(0, 0, 4)}{6} = (0\text{'}5,\ 1,\ 2)\ \text{m}$$

$\vec{v}_{CO} = 0$

Integrando ahora en $\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt}$ obtenemos la velocidad del cdm en cualquier instante:

$\vec{v}_C = (t^2, 0, t)$

Volviendo a integrar en: $\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt}$, obtenemos el vector de posición:

$\vec{r}_C = (t^3/3 + 1/2,\ 1,\ t^2/2 + 2)$

¿Cómo podríamos calcular ahora la cantidad de movimiento del sistema?

Una posibilidad es *sumar las cantidades de movimiento de cada una de las partículas que lo forman*. En este caso al haber solo tres partículas este procedimiento no llevaría mucho tiempo, pero si el sistema tuviera muchas partículas los cálculos serían muy largos. Otro procedimiento alternativo, que se puede utilizar cuando conocemos la velocidad del cdm, consiste en tener en cuenta que la cantidad de movimiento $\vec{p}$ de un sistema se puede calcular siempre como la cantidad de movimiento de su cdm o más propiamente, como la cantidad de movimiento de una partícula de la misma masa que el sistema y que se moviese con la velocidad del cdm, es decir:

$\vec{p} = M \cdot \vec{v}_C$ en donde M es la masa total y $\vec{v}_C$ la velocidad del centro de masas.

Sustituyendo pues los datos nos queda: $\vec{p} = M \cdot \vec{v}_C = 6\ (t^2, 0, t) = (6t^2, o, 6t)$

¿Cómo podríamos calcular la energía cinética del sistema? Dado que conocemos la velocidad correspondiente a cada partícula respecto al sistema de referencia indicado en la figura, se puede calcular la energía cinética del sistema como la suma de las energías cinéticas de las partículas:

$$Ec = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2}{2} = \frac{36t^4 + 18t^2}{2} = 18t^4 + 9t^2$$

Si calculamos la energía cinética correspondiente al cdm, obtenemos un resultado diferente:

$$Ec_C = \frac{1}{2} M v_C^2 = 3\ (t^4 + t^2) = 3t^4 + 3t^2$$

¿Por qué no coincide la energía cinética del cdm con la energía cinética del sistema? En general la energía cinética con que se traslada un sistema de partículas (en un determinado sistema de referencia), no coincide con la energía cinética correspondiente a su cdm. tal y como viene reflejado en la expresión:

$$Ec = \frac{1}{2} M v_C^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}'^2_i$$

En esta expresión el segundo sumando permite calcular la energía cinética del sistema respecto al cdm siendo $\vec{v}'_i$ la velocidad con que cada partícula se mueve respecto de dicho punto, de manera que si quisiéramos utilizarla para calcular la Ec, primero tendríamos que calcular cada uno de los dos sumandos de que consta. Solo cuando las partículas del sistema no se desplazan respecto del cdm, ocurre que la energía cinética del sistema coincide con la que le correspondería al cdm de dicho sistema.

Obtened la energía cinética del sistema respecto al cdm mediante: $\sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}'^2_i$ *y comprobad que si la sumamos a la energía cinética del cdm, nos resulta la energía cinética del sistema Ec anteriormente calculada.*

Respecto al cálculo del momento cinético $\vec{L}$ del sistema, podemos proceder de forma similar a como hicimos con la energía cinética y obtener:

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2 + \vec{r}_3 \times m_3\vec{v}_3 = (18t,\ 0,\ 0)$$

Calculad el momento cinético del centro de masas y comprobad que no coincide con el que acabamos de hallar. ¿A qué se debe? ¿En qué caso particular coincidirían?

En cuanto al momento de las fuerzas exteriores, éste se puede calcular como:

$\vec{M}_{ext} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext\,i} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$. Sustituyendo se obtiene:

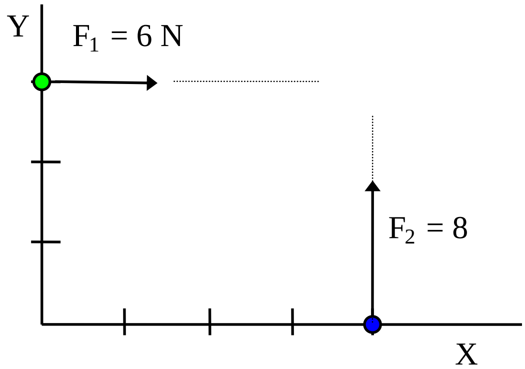
$\vec{M}_{ext}$ = (3+2t^3, 0, 0) x (12t, 0, 0) + (0, 3, 3t^2/2) x (0, 0, 6) = (18, 0, 0) N· m

Si derivamos la expresión del momento cinético nos queda $\dfrac{d\vec{L}}{dt}$ = (18, 0, 0) N· m

que, como vemos coincide con el valor del $\vec{M}_{ext}$

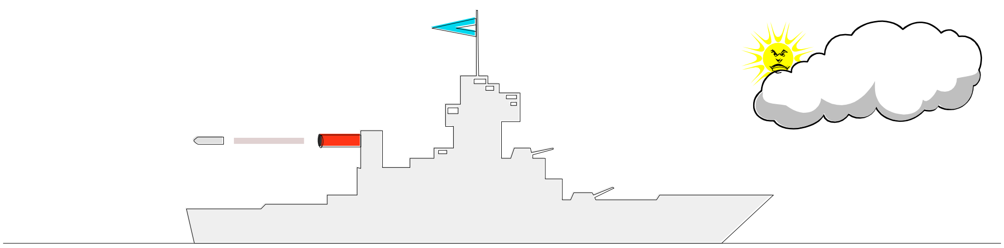
26. Sobre dos masas m_1 =10 kg y m_2 = 6 kg que se encuentran en reposo en la situación de la figura, comienzan a actuar las fuerzas exteriores representadas. Se pide:

a) Posición del c.d.m. en el instante inicial.
b) Posición del c.d.m. en función del tiempo.
c) Momento cinético del sistema.
d) Comprobad que se verifica que $\vec{M}_{ext} = d\vec{L}/dt$



sol: b) $\vec{r}_C$ = (0’187 t^2 +1’5 , 0’25 t^2 +1’87); c) $\vec{L}$= (0, 0, 14t)

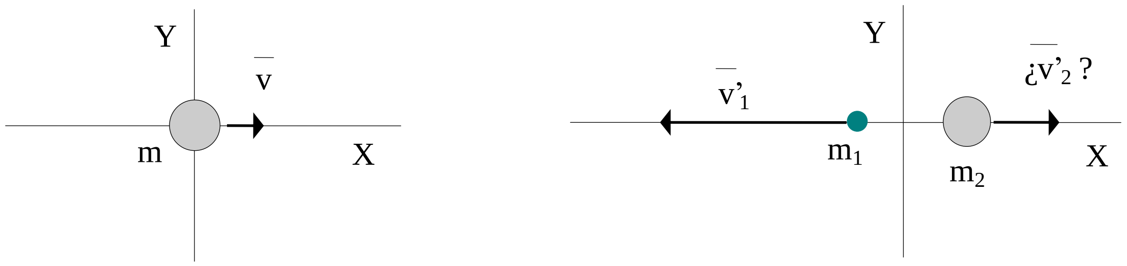
27. Una lancha de 1000 kg de masa, se desplaza por el agua con rapidez de 18 km/h cuando dispara un proyectil de 2 kg en sentido contrario a su movimiento y con rapidez de 300 m/s, respecto del agua. Calculad el cambio que se produce en la rapidez de la lancha suponiendo despreciable el rozamiento. ¿Qué variación de energía cinética sufre el sistema al producirse el disparo?



Durante el disparo se produce una interacción entre el proyectil de masa m_1 y el resto de la lancha (de masa m_2). Si consideramos el conjunto como un sistema de dos partículas (una de las cuales es el proyectil), estas fuerzas serán interiores y, como consecuencia, la cantidad de movimiento del sistema no se verá afectada por su actuación y será la misma antes que inmediatamente después del disparo, es decir: $\vec{p} = \vec{p}\,'$ donde :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$
$$\vec{p} = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

Tomaremos como sistema de referencia el especificado en el esquema siguiente:



Podemos ahora expresar los vectores velocidad en función de sus componentes escalares de acuerdo con el sistema de referencia especificado.

Cantidad de movimiento del sistema en el momento que comienza el disparo:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m(v, 0)$$

Cantidad de movimiento del sistema justo después del disparo:

$$\vec{p} = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 = m_2(-v'_1, 0) + m_2\vec{v}_2'$$

Como puede verse, en las ecuaciones anteriores hemos tenido en cuenta que antes del disparo la velocidad de las dos "partículas" que hemos considerado que forman el sistema, es la misma ($\vec{v}$) y que se trata de un vector que, de acuerdo con el sistema de referencia escogido, solo tiene componente escalar según el eje x y esta es positiva.

Determinar la velocidad que llevará la lancha justo después del disparo.

Igualando las expresiones correspondientes a las cantidades de movimiento del sistema en el momento del disparo y justo después del mismo tenemos que:

$$m\,(v, 0) = m_1\,(-v'_1\,,\ 0) + m_2\,\vec{v}'_2$$

Despejando, queda: $\boxed{\vec{v}_2' = \dfrac{(mv + m_1 v'_1\,,\ 0)}{m_2}}$

Y operando: $\vec{v}'_2 = (5'61, 0)$ m/s, es decir, aumenta en 0'61 m/s.
Analizad la expresión literal obtenida.

En primer lugar, constatamos que es dimensionalmente homogénea (L/T en ambos lados de la igualdad). Además podemos comprobar también que contempla algunos casos particulares, como, por ejemplo, que si la masa del proyectil (o la velocidad con que sale) fuese nula, la velocidad del resto del sistema sería la misma que inicialmente, que cuanto mayor sea la velocidad con que sale el proyectil, más aumentará la velocidad del resto después del disparo y que cuanto mayor sea la masa de la lancha (sin el proyectil) menor será el aumento de velocidad que experimenta al disparar un proyectil (todo ello, como siempre, a igualdad de los restantes factores).

Por otra parte, hemos de señalar que al tener lugar todo el movimiento en una sola dirección, podríamos evitar el tratamiento vectorial si manejamos, ya de entrada, únicamente las componentes escalares de los vectores según el eje considerado.

Calculad la variación de energía cinética que experimenta el sistema.

La variación de energía cinética producida se puede calcular como: ΔEc = E'c − Ec.

Ec = $mv^2/2$ = 12.525 J; E'c = $\dfrac{m_1 v'^2_1}{2} + \dfrac{m_2 v'^2_2}{2}$ = 90.000 + 15.736 = 105.736 J

Restando los valores anteriores nos queda finalmente que ΔEc = E'c − Ec = 93.211 J

¿Cómo podemos explicar que la actuación de las fuerzas interiores no aumente la cantidad de movimiento de un sistema y sí en cambio su energía cinética?

Para contestar a la cuestión anterior, es necesario recordar que la energía cinética de un sistema de partículas se puede expresar como:

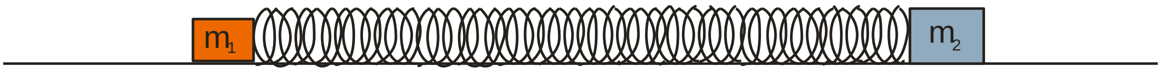
$$Ec = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m v_C^2}{2} + E_C^{'}$$

en la que el primer sumando representa la energía cinética con que se traslada el sistema (m es la masa total y v_C la rapidez del cdm) y el segundo la energía con que se mueven las partículas del sistema respecto del cdm (energía cinética interna). Las fuerzas interiores no pueden modificar la velocidad con que se mueve el cdm pero sí las de las partículas del sistema y por tanto, podrán alterar la energía cinética interna y, en consecuencia Ec.

28. Una patinadora de 60 kg de masa y un patinador de 70 kg que se deslizan en la misma dirección y sentidos contrarios con rapideces de 8 m/s y 10 m/s respectivamente, chocan frontalmente permaneciendo unidos tras la colisión. Suponiendo el rozamiento despreciable, determinad la rapidez con que se desplazarán y la variación de energía cinética que se habrá producido.

sol: v' = 1'69 m/s; ΔEc = −5234'4 J

29. Entre dos cuerpos de masas m_1 = 2 kg y m_2 = 8 kg, que se encuentran sobre un plano horizontal y sin rozamiento, se sitúa un resorte de constante elástica K=20 N/m, apoyando sus extremos en los cuerpos. A continuación, se empujan dichos cuerpos hasta conseguir comprimir el resorte 40 cm. Hallad la rapidez con que será expulsado cada uno de los cuerpos al dejar el sistema en libertad.



En este caso tenemos un sistema formado por tres partes (los dos cuerpos y el resorte). No obstante, como nos dicen que la masa del resorte se considera despreciable, podemos interpretar la situación como si el sistema estuviera formado solo por dos partículas 1 y 2 que entre ellas se ejercen fuerzas, con lo que el resorte se limitaría a hacer el papel de mero transmisor de la fuerza $\vec{F}_{21}$ que sobre 2 hace 1 y de la fuerza $\vec{F}_{12}$ que sobre 1 hace 2, siendo ambas fuerzas una pareja de acción y reacción. Junto con las fuerzas anteriores actuarían además el peso y la componente normal de la fuerza ejercida por la superficie sobre cada uno de los cuerpos, sin embargo, como la componente normal de la aceleración es nula, dichas fuerzas se anulan en cada uno de los cuerpos, quedando solo $\vec{F}_{21}$ y $\vec{F}_{12}$ (siempre iguales y de sentido contrario), cuyo valor vendrá dado en cada instante por la compresión del resorte, es decir $F_{12} = F_{21} = K\cdot\Delta L$ siendo K la constante elástica del resorte e ΔL su compresión (en valor absoluto) respecto a su longitud original L_0.

Inicialmente la energía del sistema se puede determinar como la energía potencial elástica correspondiente a la compresión del muelle en ese instante. Al dejar el sistema en libertad, el valor de dicha energía potencial disminuye y aumenta la energía cinética, dicha energía cinética irá aumentando hasta que el muelle alcance su longitud L_0. A partir de ese momento el muelle deja de empujar a los cuerpos (la fuerza elástica cambia de sentido) y éstos continúan moviéndose con la velocidad alcanzada.

El problema consiste, pues, en calcular la rapidez con que cada cuerpo llega a la situación en la que el muelle recupera su longitud normal, que es cuando el resorte deja de empujarles y estos se separan del mismo.

Para calcular la rapidez que se nos pide, podemos aplicar la expresión $W_{res} = \Delta Ec$, entre los estados A (cuando dejamos el sistema en libertad) y B (cuando los cuerpos se separan del resorte), con lo que:

$$W_{res\,A}^{\;\;B} = W_{ext\,A}^{\;\;B} + W_{int\,A}^{\;\;B}$$

Como el trabajo realizado por las fuerzas exteriores es 0 (tanto el peso como la que ejerce la superficie son perpendiculares al desplazamiento) el trabajo resultante coincidirá con el trabajo realizado por las fuerzas internas, que globalmente coincidirá con la disminución de la energía potencial elástica que se produce cuando el sistema pasa de la situación A a la situación B. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} W_{res\,A}^{\;\;B} = W_{int\,A}^{\;\;B} = \Delta Ec = Ec_B \\ W_{int\,A}^{\;\;B} = -\Delta Ep = Ep_A \end{array}\right\} \rightarrow Ep_A = Ec_B \rightarrow \frac{1}{2}K\Delta L^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1B}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2B}^2$$

La expresión obtenida refleja el hecho de que, al no haber fuerzas no conservativas, la energía potencial elástica inicial (estado A) se transforma íntegramente en energía cinética en el estado B. No obstante, al tratarse de una ecuación con dos incógnitas hemos de *buscar una nueva relación para poder calcular v_1 y v_2 en el momento en que ambos cuerpos dejan de tener contacto con el muelle.*

Como la fuerza exterior resultante que actúa sobre el sistema es 0, se deberá conservar la cantidad de movimiento del sistema entre los estados A y B, es decir: $\vec{p}_A = \vec{p}_B$ y, dado que el movimiento tiene lugar en una sola dirección, podemos hacer un planteamiento escalar utilizando directamente las componentes escalares de los vectores cantidad de movimiento en esa dirección.

$p_A = p_B \rightarrow 0 = m_1 v_{1B} + m_2 v_{2B}$ de manera que si juntamos esta ecuación con la anterior, nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}K\Delta L^2 &= \frac{1}{2}m_1 v_{1B}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2B}^2 \\ 0 &= m_1 v_{1B} + m_2 v_{2B} \end{aligned}\right\} \text{ Sustituyendo los valores numéricos nos queda:}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}20\cdot 0'4^2 &= \frac{1}{2}2v_{1B}^2 + \frac{1}{2}8v_{2B}^2 \\ 0 &= 2v_{1B} + 8v_{2B} \end{aligned}\right\} \text{ Resolviendo obtenemos: } v_{1B} = -1'13 \text{ m/s y } v_{2B} = 0'28 \text{ m/s}$$

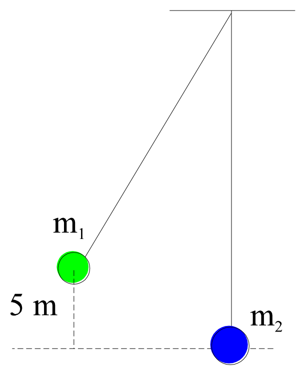
¿Qué sucedería si solo existiera el cuerpo "2" y el resorte fuese de masa despreciable?

Al no existir el cuerpo "1" la interacción se daría entre el cuerpo "2" y el resorte, pero si la masa del resorte fuese nula, el cdm del sistema coincidiría con la posición de 2. Dado que sobre el sistema no actúa ninguna fuerza exterior resultante, la velocidad del cdm ha mantenerse constante, por tanto, como el cuerpo de masa m_2 estaba inicialmente en reposo debe continuar en el mismo sitio, es decir, si quitamos uno de los cuerpos, el resorte no puede ejercer ninguna acción sobre el otro. Se trata, naturalmente, de un resultado válido únicamente en el caso ideal expuesto (resorte de masa despreciable). Esto no es lo que ocurre en la realidad en la que, por supuesto, cualquier resorte tendrá una cierta masa, pero realizar simplificaciones de este tipo para hacer los problemas más fácilmente abordables es una de las características del trabajo científico.

30. Un bloque de masa m_1 = 2 kg, que se desliza con rapidez v_1 =10 m/s a lo largo de una superficie lisa choca frontalmente con otro bloque de masa m_2 = 8 kg, que se encuentra en reposo sobre la misma superficie. Sabiendo que el choque es perfectamente elástico, determinad la rapidez de cada uno de los bloques después del choque.

sol: a) $v'_1 = -6$ m/s; $v'_2 = 4$ m/s (sentido positivo el del movimiento de m_1 antes del choque).

31. Disponemos de dos péndulos, cuyas masas son m_1 = 2 kg y m_2 = 3 kg, dispuestos como se indica en la figura adjunta. Al dejar en libertad el péndulo de masa m_1, se producirá un choque elástico con la masa m_2 que cuelga verticalmente y se encuentra en reposo. Determinad la rapidez de cada una de las masas justo después del choque. ¿Qué sucedería si las masas fueran iguales?



Al dejar en libertad la esfera de masa m_1, describirá una trayectoria circular de radio igual a la longitud del péndulo a lo largo de la cual su velocidad irá aumentando. Cuando alcance la vertical chocará frontalmente con la otra esfera de forma elástica. Si nos limitamos al intervalo de tiempo que dura el choque, podemos afirmar que las velocidades justo al comienzo y al final del mismo solo tienen una componente en la dirección horizontal.

¿Cómo podemos saber la rapidez de cada bola después del choque?

Si consideramos el sistema formado por ambas esferas en el breve intervalo de tiempo que dura el choque entre ellas, se cumplirá que la cantidad de movimiento será la misma en el momento del impacto que inmediatamente después del mismo, de manera que aplicando un tratamiento escalar (tomando como sentido positivo hacia la derecha) podemos escribir que:

$$p = p' \rightarrow m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

Por otra parte, al tratarse de un choque elástico, la energía cinética también debe ser igual:

$$Ec = E'c \rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

En ambas ecuaciones, hemos tenido en cuenta el hecho de que la esfera de masa m_2 se encuentra inicialmente en reposo ($v_2 = 0$).

Obtened las expresiones de v'_1 y v'_2 y analizad los resultados.

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse como:

$m_1 (v_1 - v'_1) = m_2 v'_2$ (1)

$m_1 (v_1^2 - v'^2_1) = m_2 v'^2_2$ (2)

Dividiendo (2) entre (1) obtenemos una tercera ecuación: $v_1 + v'_1 = v'_2$ (3)

Sustituyendo v'_2 en la expresión (1) nos queda: $v'_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)\, v_1}{m_1 + m_2}$

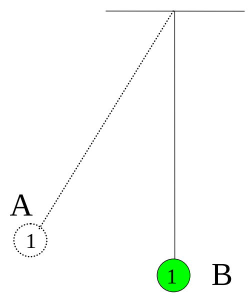
Si ahora hacemos igual con v'_1 despejándola de (3) y sustituyendo en (1): $v'_2 = \dfrac{2m_1\, v_1}{m_1 + m_2}$

Los resultados anteriores, son dimensionalmente homogéneos (L/T en ambos lados de la igualdad). Por otra parte si nos fijamos en el primero de ellos, podemos ver que si la masa m2 fuese nula, la rapidez de la esfera que choca, como es lógico, no cambiaría. También nos muestran que si m2 fuese mucho mayor que m1 , ésta retrocedería con la misma rapidez con que chocó, es decir $v'1 \cong -v1$ y la otra quedaría prácticamente en reposo ($v'2 \cong 0$).

¿Qué ocurriría en el caso de que las dos masas fuesen iguales?

En ese caso, analizando los resultados anteriores podemos comprobar que la esfera 1 quedaría parada y la 2 saldría con la misma rapidez con que le impacto la 1. Este fenómeno es muy conocido entre los aficionados al juego del billar en donde a veces se produce un choque frontal de una bola contra otra igual que se encuentra en reposo.

Para poder calcular la rapidez de cada una de las esferas justo después del choque *necesitamos conocer la rapidez v_1 que lleva la 1 en el momento del impacto.* Ello puede conseguirse si aplicamos la expresión Wres = ΔEc a la esfera 1, desde el momento en que la soltamos (situación A) hasta el instante en que impacta contra la otra esfera (situación B).



$$W_{res}{}_A^B = \Delta Ec_A^B \rightarrow W_P{}_A^B = \Delta Ec_A^B \rightarrow -\Delta Ep_A^B = \Delta Ec_A^B$$

De acuerdo con la ecuación anterior, la única fuerza que realiza trabajo entre A y B es el peso de la bola de masa m_1 (la tensión del hilo es perpendicular a la trayectoria descrita) y la disminución experimentada por la energía potencial del sistema conlleva un aumento igual de energía cinética, de modo que basta sustituir por las correspondientes expresiones de la energía para obtener v_1 :

$$mgh = \frac{1}{2} m v_1^2 \;\rightarrow\; v_1 = \sqrt{2gh} = \pm 10 \text{ m/s}$$

Como hemos especificado hacia la derecha positivo, escogeremos v_1 = 10 m/s (positivo). Sustituyendo este valor en las expresiones anteriores podemos obtener finalmente las rapideces de las esferas justo después del choque:

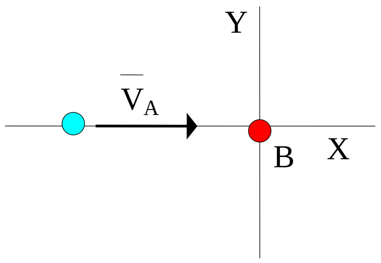
$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)\, v_1}{m_1 + m_2} = -2 \text{ m/s} . \qquad\qquad v'_2 = \frac{2m_1\, v_1}{m_1 + m_2} = 8 \text{ m/s}$$

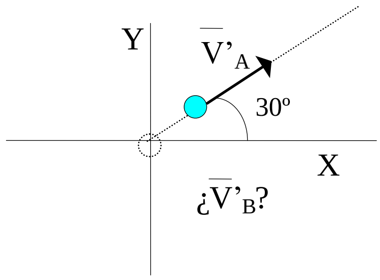
El signo menos de v'_1 nos informa, de acuerdo con el sistema de referencia especificado anteriormente, de que la esfera 1 retrocede a consecuencia de su choque con la 2, que sale despedida hacia la derecha con una rapidez de 8 m/s.

32. Una molécula de gas que lleva una rapidez v_A = 300 m/s choca elásticamente con otra molécula de la misma masa inicialmente en reposo (v_B = 0). Tras el choque, la primera se mueve formando un ángulo de 30° con su dirección inicial. Calculad la rapidez con que se moverá cada molécula tras la colisión.

Consideraremos el sistema formado por las dos moléculas y lo que le ocurre en el corto intervalo de tiempo que corresponde al choque entre ambas. De acuerdo con las condiciones que se especifican en el enunciado, se trata de un choque elástico entre dos moléculas de un gas, por tanto la energía cinética del sistema no variará. Lo mismo podremos decir respecto a la cantidad de movimiento del sistema que será la misma al comienzo que al final del choque.

En el problema se nos pide la rapidez de cada molécula después de la colisión. Podemos tratar de calcularlas haciendo uso de la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía cinética, es decir, desarrollando las ecuaciones $\vec{p} = \vec{p}\,'$ y Ec = E'c, donde $\vec{p}$ y Ec representan la cantidad de movimiento y la energía cinética del sistema en el momento en que se inicia el choque, y $\vec{p}\,'$ y E'c lo mismo pero justo después del choque.





Desarrollando $\vec{p} = \vec{p}\,'$ tenemos que :

$m_A \vec{v}_A = m_A \vec{v}\,'_A + m_B \vec{v}\,'_B$. Expresando ahora los vectores velocidad analíticamente:

$m_A (v_A, 0) = m_A (v'_{Ax}, v'_{Ay}) + m_B (v'_{Bx}, v'_{By})$.

Podemos ahora descomponer esta ecuación en otras dos escalares, con lo que nos queda:

En el eje X: $m_A v_A = m_A v'_{Ax} + m_B v'_{Bx}$

En el eje Y: $0 = m_A v'_{Ay} + m_B v'_{By}$

Desarrollando Ec = E'c tenemos que: $\frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_A v'^2_A + \frac{1}{2} m_B v'^2_B$

Como en este caso las masas son iguales, las ecuaciones anteriores se simplifican:

$v_A = v'_{Ax} + v'_{Bx}$
$0 = v'_{Ay} + v'_{By}$
$v_A^2 = v'^2_A + v'^2_B$

¿Cómo podemos reducir el número de incógnitas presentes en las ecuaciones anteriores?

Podemos tener en cuenta que $v'_{Ax} = v'_A \cos 30^o$ y que, análogamente $v'_{Ay} = v'_A \cos 60^o$. Por otra parte sabemos que v'^2_B se puede expresar en función de sus componentes como: $v'^2_B = v'^2_{Bx} + v'^2_{By}$. Incorporando estas expresiones a las ecuaciones anteriores nos queda finalmente un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que ya podemos resolver:

$$\left.\begin{array}{l} 300 = v'_A \cos 30^o + v'_{Bx} \\ 0 = v'_A \cos 60^o + v'_{By} \\ 300^2 = v'^2_A + v'^2_{Bx} + v'^2_{By} \end{array}\right\}$$

De la primera de las ecuaciones obtenemos $v'_{Bx} = 300 - v'_A \cdot \cos 30^o$
De la segunda de las ecuaciones obtenemos $v'_{By} = - v'_A \cdot \cos 60^o$

Sustituyendo en la tercera ecuación y operando, hallamos que: v'_A = 260 m/s y sustituyendo este dato en la primera y segunda expresiones anteriores obtenemos que v'_{Bx} = 74'8 m/s y que v'_{By} = -130 m/s respectivamente, lo que nos indica que la molécula blanco a consecuencia del impacto sale por el 4º cuadrante (XOY^-), con una rapidez V'_B = 149 m/s.

Hallad la dirección en que se mueve la molécula blanco.

Para ello podemos calcular los ángulos directores del vector $\vec{v}'_B$

$\cos\alpha = v'_{Bx}/v'_B$ = 74'8/149 = 0'5, con lo que forma un ángulo de $\alpha = 60^o$ con OX^+
$\cos\beta = v'_{By}/v'_B$ = -130/149 = -0'87, con lo que forma un ángulo $\beta = 150^o$ con OY^+

33. Sobre un cuerpo de masa m_1 = 8 kg inicialmente en reposo, interacciona "directamente" un segundo cuerpo de masa m_2 = 2 kg que se desplaza con una rapidez v_2 = 10 m/s. Sabiendo que tras la interacción el primer cuerpo se mueve con una rapidez v'_1 = 3 m/s, determinad la rapidez v'_2 del segundo justo después del choque y la variación de energía cinética experimentada por el sistema (formado por ambos cuerpos) en la interacción.

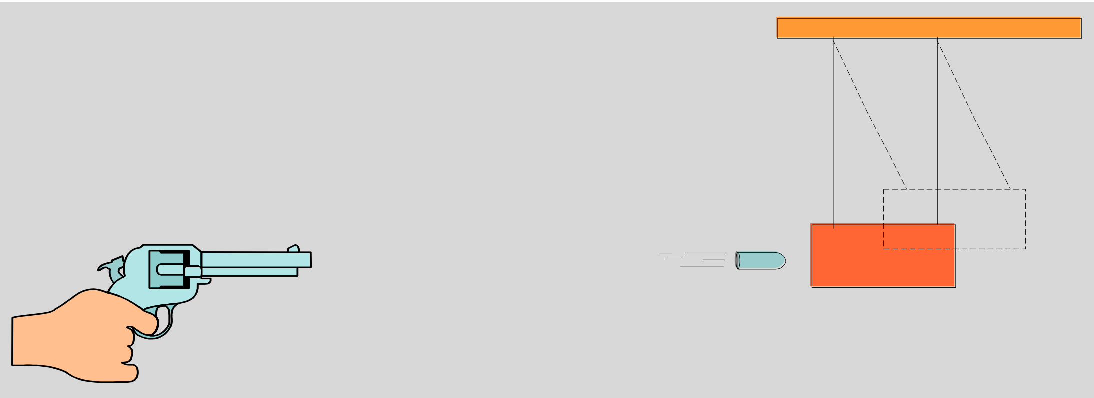
sol: v'_2 = -2m/s; ΔE_C = - 60 J.

34. Una partícula de 0'2 kg de masa, que se desplaza a 0'4 m/s, choca con otra de 0'3 kg que se encuentra en reposo. Después de la colisión, la primera se mueve a 0'2 m/s en una dirección y sentido que forma un ángulo de 40° con la inicial. Obtened la velocidad de la segunda partícula y la variación de energía cinética producida en la colisión.

sol: $\vec{v}'_B = (0'17,\ -0'07)$ m/s; ΔEc = - 0'0071 J

35. Se dispara horizontalmente una bala de masa m_1 =15 g, sobre un bloque de madera de masa m_2 = 3 kg que está suspendido de unos hilos. La bala queda incrustada y el conjunto oscila hasta alcanzar una altura de 10 cm por encima de su posición inicial. Determinad la rapidez v_1 con que incide la bala en el bloque.

Este problema hace referencia a un “péndulo balístico” que consiste en un procedimiento para medir la velocidad de las balas. Un péndulo de este tipo suele consistir en un gran bloque de madera suspendido de dos cuerdas, como se indica en la figura:



La bala realiza un choque directo contra el bloque con una velocidad $\vec{v}_1$ quedando empotrada en él. A consecuencia del choque, el conjunto formado por la bala y el bloque oscila ascendiendo hasta una cierta altura h respecto al nivel inicial.

¿Cómo podríamos calcular la rapidez con que incide la bala sobre el bloque?

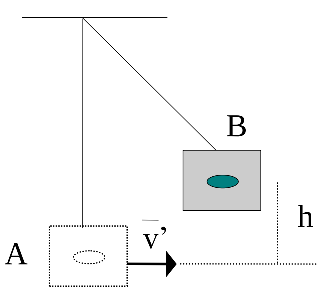
Si consideramos el sistema formado por la bala y el bloque, podemos admitir que la cantidad de movimiento según la horizontal es la misma al comienzo del choque que justo al finalizar el mismo, con lo que (tomando como sentido positivo el del movimiento de la bala) podemos escribir:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\, v'$$

siendo v’ la rapidez con que sale el conjunto bloque-bala después del choque. Dicha rapidez es, en principio desconocida, por lo que no podremos hallar v_1 mientras no la determinemos.

¿Cómo podemos hallar la rapidez v’ del conjunto bala-bloque justo después del choque?

Considerando el conjunto formado por el bloque y la bala, podemos hallar el trabajo resultante sobre el mismo desde justo después del impacto (situación A) hasta que alcanza la altura máxima h (situación B). A lo largo de ese trayecto, actúan la fuerza peso y la tensión del hilo. No obstante, como la tensión es en todo momento perpendicular a la trayectoria, no realiza ningún trabajo y podemos expresar el trabajo resultante como:



$W_{res\,A}^{\;B} = W_{P\,A}^{\;B} = \Delta Ec_A^B$. Como la fuerza peso es conservativa W_P = -ΔEp, de modo que:

$\Delta Ec_A^B = -\Delta Ep_A^B$ o lo que es lo mismo: $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 = (m_1 + m_2)\,g\,h$

es decir, toda la energía cinética con que sale el conjunto bloque-bala, se halla en forma de energía potencial gravitatoria en el instante en que alcanza la máxima altura h (en el cual la rapidez es momentáneamente nula). De la ecuación anterior podemos obtener v’ como:

$$v' = \sqrt{2gh}$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en la ecuación que expresa la conservación de la cantidad de movimiento y despejando v_1 nos queda que:

$$\boxed{v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2gh}} \rightarrow v_1 = 284'2 \text{ m/s}$$

Analizando el resultado literal obtenido, vemos que además de ser dimensionalmente homogéneo, contempla algunos casos evidentes como, por ejemplo, que cuanto mayor haya resultado ser la altura máxima alcanzada, mayor será la rapidez con que incidió la bala y que para una rapidez v_1 dada, cuanto mayor sea la masa m_2 del bloque, menor altura máxima alcanzará el conjunto, etc.

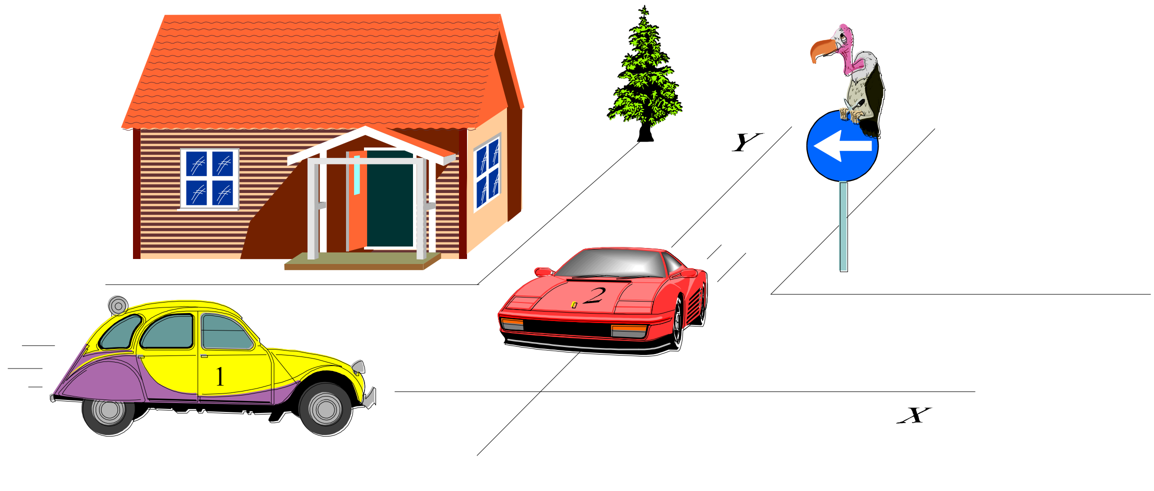
¿Cuánta energía cinética se pierde a causa del choque?

Para calcular la variación de energía cinética que sufre el sistema formado por el bloque y la bala a consecuencia del choque, basta con restar la energía cinética inicial de la bala a la energía cinética del sistema inmediatamente después del choque, con lo que:

$$\Delta Ec = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = 3'015 - 606'2 = -603'19 \text{ J}$$

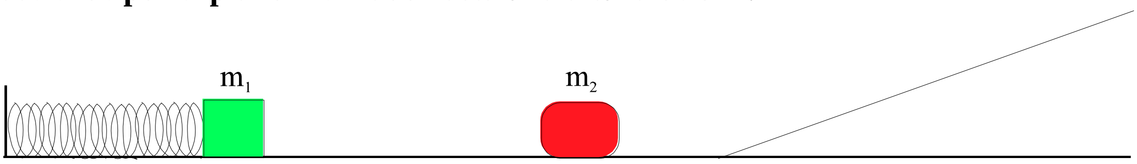
Naturalmente dicha energía no ha desaparecido sino que se halla ahora como energía interna asociada a las partículas submicroscópicas que forman la bala y el bloque. Conviene resaltar el gran porcentaje de la energía cinética inicial del sistema que sufre esta transformación (del orden del 99’5 %) o lo que es lo mismo: solo el 0’5 % de la energía cinética con que la bala incide en el bloque, se convierte en energía potencial gravitatoria del conjunto formado por el bloque y la bala cuando este alcanza la máxima altura h. Este resultado permite comprender lo incorrecto que sería resolver este problema igualando la energía cinética de la bala a la potencial gravitatoria del conjunto.

36. Dos vehículos 1 (de 600 kg de masa) y 2 (de 800 kg de masa) chocan cuando se desplazaban a 20 m/s y 10 m/s respectivamente tal y como se indica en la figura. Sabiendo que tras el choque permanecen unidos, obtened su velocidad tras la colisión, así como la variación de energía cinética experimentada.



sol: $\vec{v}'= (8'5 \, , 5'7)$ m/s; $\Delta E_C = -\ 86682$ J.

37. El cuerpo de masa m_1 = 4 kg es lanzado al dejar en libertad el resorte que se encontraba comprimido 60 cm. Si no existe ningún tipo de rozamiento y choca de forma elástica y directa con un segundo cuerpo de masa m_2 = 2 kg, que se encuentra en reposo. Determinad la constante elástica del resorte sabiendo que dicho segundo cuerpo asciende por el plano inclinado hasta una altura de 5 m.



En la situación inicial (A), el resorte se encuentra comprimido al máximo y la energía potencial elástica del sistema viene dada por: $Ep_A = \dfrac{Kx_A^2}{2}$ en donde K es la constante elástica del muelle y x_A lo que se ha comprimido respecto a su longitud original (60 cm), de manera que si pudiésemos evaluar dicha energía potencial, podríamos determinar el valor de K. *¿Cómo podríamos hallar la energía potencial elástica en la situación A?*

Dado que no hay rozamiento, dicha energía, cuando se deje el sistema en libertad, irá disminuyendo conforme el muelle se vaya alargando, hasta que en el momento en que éste recupere su longitud original valdrá 0 (x = 0) y se habrá transformado toda ella en energía cinética, dada por :

$$Ec = \frac{m_1 v_1^2}{2}$$

A partir de que el muelle recupera su longitud original la fuerza elástica deja de actuar sobre m_1, que sigue moviéndose con velocidad constante v_1 hasta que choca con m_2.

En efecto, si aplicamos la expresión que nos relaciona el trabajo resultante con la variación de la energía cinética desde la situación inicial A hasta la situación B, correspondiente al instante en que se produce el choque tendremos, que como la única fuerza que realiza trabajo mientras que actúa sobre m_1 es la fuerza elástica, podemos escribir:

$$Wres_A^B = \Delta Ec_A^B \rightarrow W_{Fe} = \Delta Ec_A^B \rightarrow -\Delta Ep = \Delta Ec_A^B \rightarrow Ep_A = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

Como vemos no podemos calcular la energía potencial elástica correspondiente a la situación inicial si no conocemos la rapidez v_1 con que m_1 impacta contra m_2 . *¿Cómo podríamos determinar dicha rapidez?*

Como entre m_1 y m_2 se produce un choque elástico y directo, la cantidad de movimiento y la energía cinética se conservan y podremos emplear un tratamiento escalar (arbitrariamente, tomaremos como sentido positivo el del movimiento inicial de m_1).

Como el segundo cuerpo se halla inicialmente en reposo ($v_2 = 0$) se cumplirá que:

$$p = p' \rightarrow m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$Ec = E'c \rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

Tal y como ya hemos visto en un ejercicio anterior (ved problema 31) de las ecuaciones anteriores se deduce que:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2} \quad y \quad v'_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Sin embargo con las expresiones anteriores no podemos averiguar v_1 ya que solo tenemos dos ecuaciones y 3 incógnitas (v_1 , v'_1 y v'_2). Para conocer v_1 tendríamos que saber v'_1 o bien v'_2 , de esa forma podríamos despejar v_1 de alguna de las dos ecuaciones. *¿Cómo podríamos conocer la rapidez v'_2 con que la masa m_2 sale al finalizar el choque?*

Podemos aplicar la expresión que relaciona el trabajo resultante con la variación de energía cinética, entre los estados C (cuando el cuerpo de masa m_2 llega a la base del plano inclinado) y D (cuando alcanza la máxima altura). Como en dicho trayecto la única fuerza que realiza trabajo es el peso y ésta es conservativa, tendremos:

$$Wres_C^D = \Delta Ec_C^D \rightarrow W_{PA}^{B} = \Delta Ec_C^D \rightarrow -\Delta Ep_C^D = \Delta Ec_C^D \rightarrow -(Ep_D - Ep_C) = (Ec_D - Ec_C)$$

donde Ep se refiere a la energía potencial gravitatoria. Si tomamos la superficie horizontal como nivel 0 para dicha energía potencial, llamamos h a la altura máxima alcanzada por m2 (situación D) podemos desarrollar la ecuación anterior como: EcC = EpD que nos dice que toda la energía cinética con que m2 llega a la base del plano inclinado, se ha transformado en energía potencial gravitatoria en el instante en que alcanza la máxima altura sobre el mismo.

Así pues: $\frac{1}{2} m_2 v'_2 = m_2 gh$

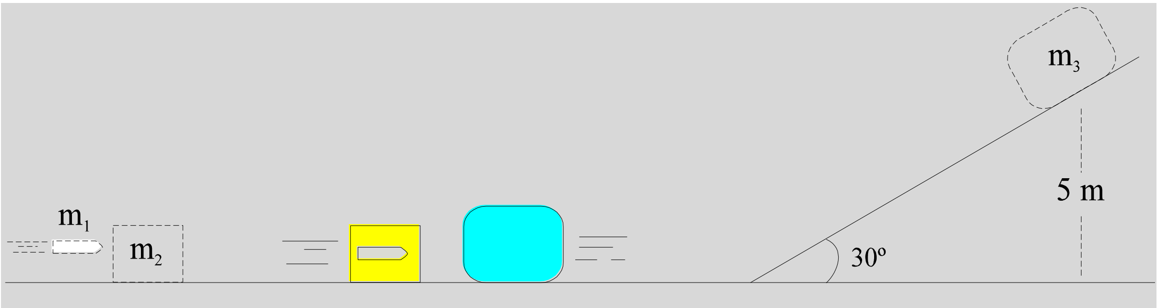
Proceded a obtener ahora la expresión que nos da el valor de la Energía potencial elástica en la situación inicial A.

Despejando v'_2 de la ecuación anterior obtenemos $v'_2 = \sqrt{2gh}$ = ±10 m/s. Dado que sale en el sentido escogido como positivo, será v'_2 = 10 m/s. Sustituyendo en $v'_2 = \dfrac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$ podremos hallar la rapidez v_1 que llevaba m_1 al comienzo del mismo:

$v_1 = \dfrac{(m_1 + m_2)\, v'_2}{2m_1} = \dfrac{(m_1 + m_2)}{2m_1}\sqrt{2gh}$ = 7’5 m/s. Introduciendo esta expresión en la ecuación inicial $Ep_A = \dfrac{1}{2} m_1 v_1^2$ nos queda: $\dfrac{1}{2} Kx^2 = \dfrac{1}{2} m_1 v_1^2 \to K = \dfrac{m_1 v_1^2}{x^2}$ = 625 N/m

38. Un proyectil de masa m_1 = 40 g se lanza contra un cuerpo de masa m_2 = 360 g que se encuentra en reposo y en el que se incrusta. A continuación el conjunto se desplaza sobre una superficie horizontal en la que choca de forma elástica y directa con un tercer cuerpo de masa m_3 = 600 g que se había soltado sobre un plano inclinado de 30^0 y desde 5 m de altura y que se halla también moviéndose sobre la misma superficie. Suponiendo rozamiento nulo, determinad:

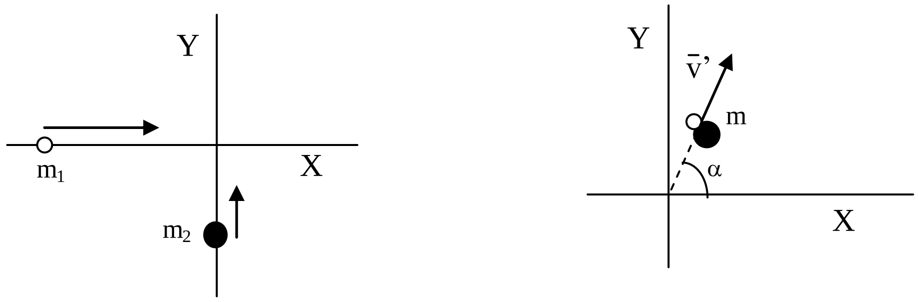
a) Rapidez con la que impactó el proyectil sabiendo que tras la colisión el cuerpo que se soltó en el plano inclinado retrocede con rapidez de 2 m/s.
b) ¿Qué variación sufre la energía cinética del sistema en cada una de las colisiones?



sol: a) 50 m/s; b) - 45 J y 0

39. Un átomo de hidrógeno moviéndose a 384 m/s choca contra un átomo de yodo que se mueve a 12’8 m/s perpendicularmente respecto al primero. A causa del choque ambos quedan unidos formando una molécula que se mueve en una dirección que forma un ángulo de 76’7º con la dirección inicial del átomo de hidrógeno. Calculad cuántas veces es mayor la masa del átomo de yodo que la del de hidrógeno.

Se trata de una colisión entre dos partículas que podemos considerar como masas puntuales. De acuerdo con lo que sabemos, la cantidad de movimiento del sistema formado por ambas en el momento del choque será la misma que justo después del mismo. Para resolver el problema escogeremos un sistema de coordenadas adecuado en el que representaremos el choque, aplicaremos el principio de conservación y, a partir de la ecuación resultante, trataremos de obtener la relación entre las masas que se nos pide.



En la figura anterior hemos representado el sistema antes del choque y justo después del mismo, designando por m_1 la masa del hidrógeno, m_2 la masa del átomo de yodo y m la masa de la molécula resultante. Aplicando el principio de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\vec{p} = \vec{p}\,' \rightarrow m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m \cdot \vec{v}\,' \rightarrow \mathrm{m}_1\,(\mathrm{v}_1\,,\,0) + \mathrm{m}_2\,(0\,,\,\mathrm{v}_2) = \mathrm{m}\,(\mathrm{v'}\cos\alpha\,,\ \mathrm{v'}\,\mathrm{sen}\alpha)$$

En la ecuación anterior, v_1, v_2 y v' representan módulos de velocidades. Podemos descomponerla en dos ecuaciones escalares (equivalente a aplicar la conservación de la cantidad de movimiento según cada uno de los ejes):

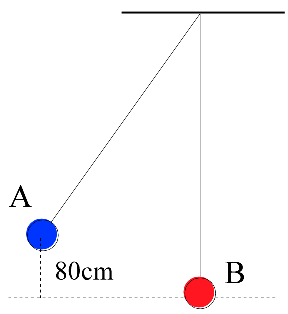
En el eje X: $m_1\, v_1 = m \cdot v'\cos\alpha$
En el eje Y: $m_2\, v_2 = m \cdot v'\,\mathrm{sen}\alpha$

Dividiendo ahora la segunda ecuación por la primera obtenemos: $\dfrac{m_2 \cdot v_2}{m_1 \cdot v_1} = \mathrm{tg}\alpha$

Despejando, nos queda: $m_2 = \dfrac{v_1}{v_2} \cdot \mathrm{tg}\alpha \cdot m_1$ y sustituyendo resulta: $m_2 = 126'9 \cdot m_1$

Así pues, la masa del átomo de yodo es 126'9 veces la del de hidrógeno.

40. Los cuerpos de la figura tienen 500 g de masa cada uno y los hilos son de la misma longitud y masa despreciable. Si soltamos el cuerpo 1 desde la posición indicada en la figura, determinad la altura que alcanzarán sabiendo que permanecen unidos. ¿Cuál será el trabajo interior realizado durante la colisión?



sol: 20 cm; -2 J

6. SÓLIDO RÍGIDO

1. Analizad la siguiente proposición argumentando si se está o no de acuerdo con lo que en ella se afirma:

"Cualquier fuerza exterior aplicada a un sólido rígido ligado a un eje fijo, se convierte siempre en un *par de fuerzas* ya que, por el hecho de estar el eje fijo, sobre los puntos del cuerpo en contacto con él aparece una fuerza igual y de sentido contrario ejercida por el eje"

Si la proposición anterior fuese válida para todos los casos, tendría que ocurrir que **siempre** que se ejerciese una fuerza en las condiciones que se indican en dicha proposición, el centro de masas (cdm) del sólido no cambiase de velocidad, ya que el sólido rígido puede considerarse como un sistema de partículas con lo que la aceleración del centro de masas viene dada por:

$$\vec{a}_C = \frac{\sum \vec{F}_{ext\,i}}{m} = \frac{\vec{F}_{ext}}{m}$$

y si la proposición fuese cierta la fuerza exterior total sobre el sistema debería de ser nula $\vec{F}_{ext} = \vec{F} + (-\vec{F}) = 0$, de modo que la aceleración del centro de masas $\vec{a}_C$ también tendría que ser nula y, por tanto, si dicho centro de masas estaba en reposo, debería de continuar estándolo.

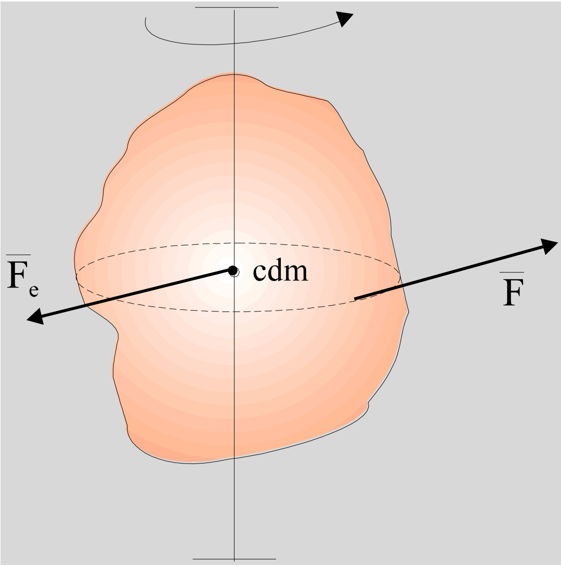
¿Es eso lo que sucede siempre?

Al actuar una fuerza exterior, aplicada sobre un cuerpo sólido rígido ligado a un eje de rotación, "intentará" desplazar al cuerpo, pero como éste se encuentra atravesado por un eje que se mantiene fijo, dicho eje hará sobre el cuerpo la fuerza necesaria para seguir manteniéndose fijo. Así pues, sobre el cuerpo siempre actuarán dos fuerzas: $\vec{F}$ o fuerza exterior que se le aplica directamente y $\vec{F}_e$ o fuerza ejercida por el eje sobre el cuerpo.

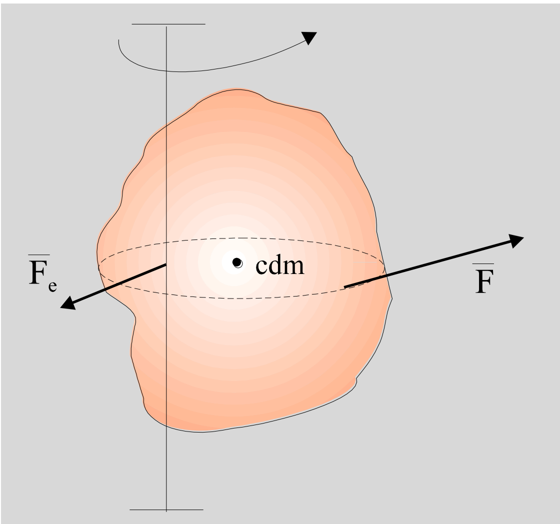
Sometido a la acción de $\vec{F}$ y de $\vec{F}_e$ el único movimiento posible del cuerpo (mientras el eje sea fijo) será girar alrededor del eje y podrán darse dos casos: que el eje pase por el centro de masas o que no pase.

¿Qué le ocurriría a la velocidad del centro de masas en cada uno de esos dos casos?

a) En el caso de que el eje fijo pase por el centro de masas, dicho punto deberá permanecer en reposo (puesto que se encuentra sobre el propio eje) y la aceleración del centro de masas, al no cambiar su velocidad, será 0. Ello obliga a que la fuerza exterior resultante que actúe sobre el sólido sea nula y por tanto a que $\vec{F}_e = -\vec{F}$. Cuando esto sucede, se dice que las dos fuerzas forman un "**par de fuerzas**".



b) En caso de que el eje fijo no pase por el cdm del cuerpo, dicho punto girará alrededor del eje, con lo que su velocidad cambiará y estará sometido a una aceleración, lo que obliga a que la resultante de las fuerzas exteriores no sea nula y, por tanto, a que $\vec{F}_e \neq -\vec{F}$, de modo que dichas fuerzas ya no se pueden considerar como un "par".



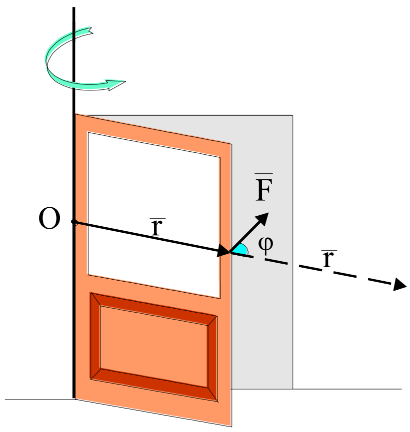
Así pues, hemos de concluir que la proposición solamente es cierta en el caso de que el eje que atraviesa al cuerpo pase por el centro de masas. Ello no invalida, por supuesto, el principio de acción y reacción, ya que la fuerza que hace el eje sobre el cuerpo sí que será igual y de sentido contrario a la que hace el cuerpo sobre el eje, pero ésta última no debe confundirse con la fuerza que un agente exterior aplica sobre el cuerpo.

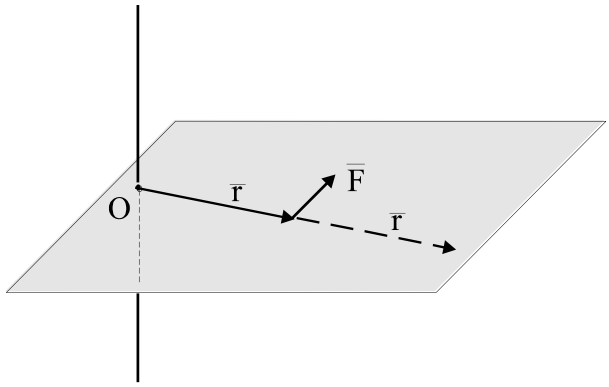
2. ¿De qué depende el “efecto de giro” (aceleración angular) que una fuerza puede provocar a un cuerpo capaz de girar libremente alrededor de un eje fijo?

Para concretar más la cuestión consideremos el ejemplo de abrir o cerrar una puerta. En ese caso, es conocido que el “efecto de giro” o aceleración angular que experimenta la puerta, no solo depende del valor de la fuerza exterior que se aplique sobre ella, sino también de otros factores.

¿Cuáles son esos otros factores?

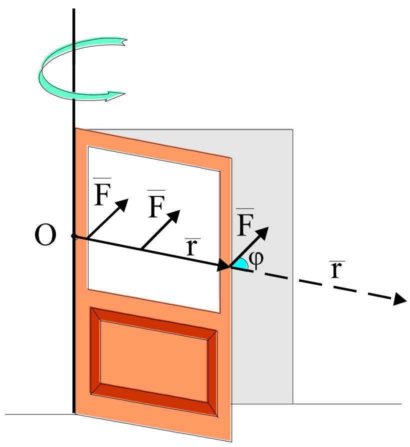
Cabe pensar que, además del valor de la fuerza ejercida, influya también la distancia desde el punto de aplicación de la misma al eje de giro y la dirección en la que actúe, es decir: $\alpha = \alpha$ (F, r, φ) siendo F el módulo de la fuerza ejercida, r la distancia de su punto de aplicación al eje y φ el ángulo que forma el vector fuerza con el vector $\vec{r}$ (ved figura).

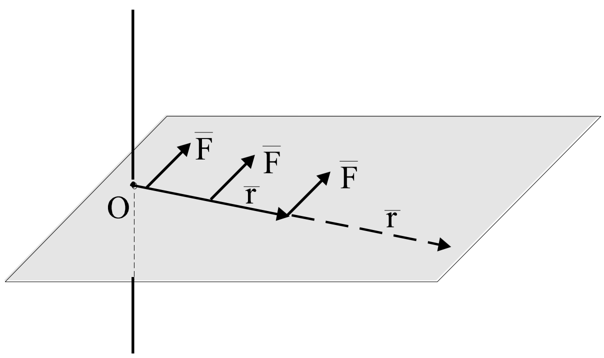




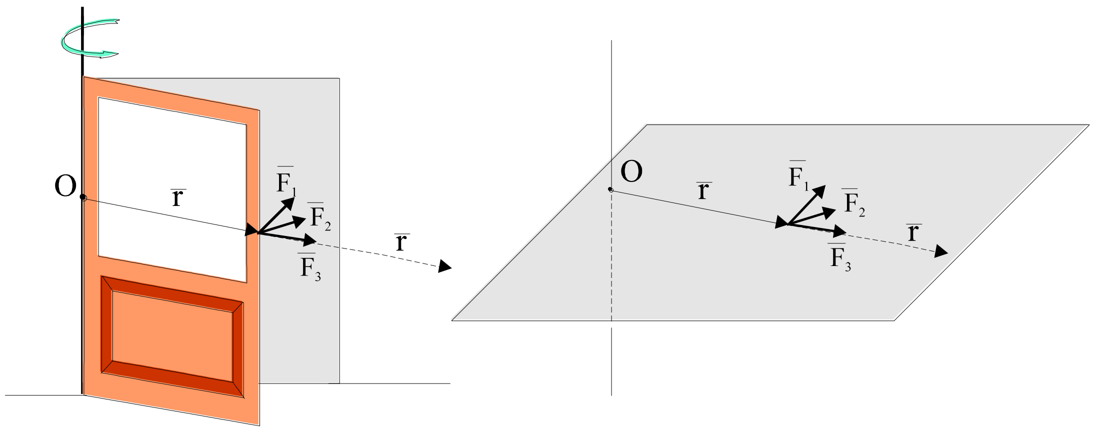
¿Cómo influirá cada uno de los factores anteriores?

Consideremos el caso de una puerta a la que apliquemos la misma fuerza pero a diferentes distancias del eje de giro. Podemos esperar que la puerta cierre o abra tanto más fácilmente (la aceleración angular sea mayor) cuanto mayor sea la distancia r existente entre el punto de aplicación y el eje de giro y también cuanto mayor sea el valor F de la fuerza aplicada.





No obstante, es necesario matizar la apreciación anterior ya que el efecto de giro que se puede conseguir con fuerzas de igual valor y aplicadas en el mismo punto pero que se ejercen en direcciones distintas, puede ser muy diferente.



En el esquema anterior cabe suponer que, a igualdad de los restantes factores, la aceleración angular que se conseguirá con $\vec{F}_1$ ($\varphi = 90º$) será máxima, mientras que con $\vec{F}_2$ será menor y con $\vec{F}_3$ ($\varphi = 0º$) será nula (también lo sería si φ valiese 180º). Esta dependencia lleva a pensar que la aceleración angular dependerá del ángulo mediante la función senφ, ya que el valor de dicha función va aumentando desde 0 (para $\varphi = 0$) hasta su valor máximo 1 (para $\varphi = 90º$), para luego ir disminuyendo hasta valer 0 de nuevo cuando $\varphi = 180º$.

La validez de las hipótesis anteriores se puede comprobar experimentalmente (basta manipular una puerta de forma adecuada) y se pueden generalizar para cualquier sólido rígido que gire en torno a un eje de rotación.

Convendrá definir una nueva magnitud física como función de F, r, y sen φ y que será de quien dependa el efecto de giro de la fuerza aplicada a un sólido rígido capaz de girar libremente alrededor de un eje fijo. Esa magnitud es el momento $\vec{M}$ de dicha fuerza respecto al punto O, definido como:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

y, como vamos a ver, contempla todas las consideraciones anteriores. En efecto, si analizamos dicha expresión vemos que $\vec{M}$ se trata de un vector siempre perpendicular al plano de giro (que contiene a $\vec{r}$ y a $\vec{F}$) y que solo puede tener dos sentidos (uno para cada sentido de giro). Por otra parte, su módulo viene dado por:

$$M = r \cdot F \cdot \text{sen}\,\varphi$$

Comprobad que la expresión anterior se hallan implícitas todas las hipótesis que hicimos anteriormente.

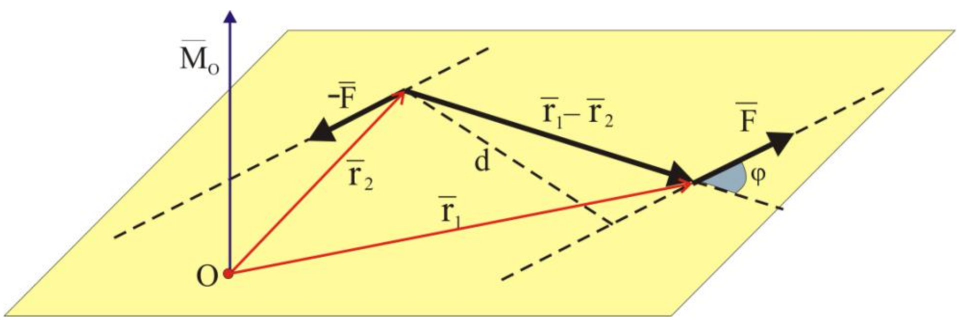
Analizando la expresión podemos ver, por ejemplo, que si r o F son nulas, M = 0; si r o F aumentan, M aumenta; si φ vale 90º, M toma su valor máximo; si φ vale 0º o 180º, M es nulo, etc. En definitiva, pues, podemos considerar que si en el caso de la traslación la aceleración producida a un cuerpo dado depende de la fuerza resultante que actúe sobre él, en el caso de la rotación alrededor de un eje, la aceleración angular dependerá del momento resultante que actúe sobre dicho cuerpo, de forma que cuanto mayor sea M, mayor será el valor de dicha aceleración.

Ello viene expresado en la ecuación $\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$ (ecuación fundamental de la dinámica de la rotación) en la que I es una constante de proporcionalidad característica del cuerpo respecto de un eje de giro dado. Se denomina momento de inercia y tiene un significado análogo a la masa inerte m que ya conocemos (en este caso mide la inercia del cuerpo a la rotación en torno a un eje dado, de forma que cuanto mayor sea I se precisará un momento M mayor para conseguir una determinada aceleración angular).

En adelante, pues, cuando una fuerza resultante actúe sobre un sólido rígido, será el momento de dicha fuerza respecto del eje de giro la magnitud que nos interesará considerar para evaluar la aceleración angular con que gira.

3. Obtened una expresión válida para calcular el momento resultante de un par de fuerzas, respecto de un punto cualquiera, en función del valor de las fuerzas y de la distancia existente entre sus líneas de acción.

Al tratarse de dos fuerzas iguales y de sentidos contrarios, la suma de ambas será 0, lo que implica que el centro de masas del cuerpo no sufrirá aceleración (permanecerá en reposo o con movimiento rectilíneo y uniforme, respecto a un cierto sistema de referencia). Por tanto, el único efecto que puede provocar un "par" es una aceleración angular que, como sabemos, dependerá del momento resultante.



$$\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}$$

$\vec{M}_O$, será un vector, perpendicular al plano del par de fuerzas y de módulo:

$$\left|\vec{M}_O\right| = \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot \mathrm{sen}\varphi = \left|\vec{F}\right| \cdot d$$

Como podemos ver, el momento resultante no depende de la situación del par respecto del eje de giro sino que únicamente dependerá del módulo de una de las fuerzas (las dos tienen el mismo) y de la distancia existente entre sus rectas de aplicación (o líneas de acción), también llamada "brazo del par".

4. ¿Cuál es la condición para que un cuerpo extenso e indeformable se encuentre en reposo o moviéndose con movimiento de traslación rectilíneo y uniforme?

En dinámica del punto se vio que para que un cuerpo, que pueda considerarse como una masa puntual, se encuentre en reposo o con movimiento rectilíneo y uniforme de traslación (es decir, para que su vector velocidad no cambie), se requería que la resultante de todas las fuerzas que pudieran estar actuando sobre dicho cuerpo fuese nula:

$$\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a} \rightarrow \text{si } \vec{F}_{res} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{constante}$$

Cuando se trate de un objeto que tengamos que considerar como extenso, podemos establecer de forma análoga que para que dicho objeto se encuentre en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme (siempre respecto a un cierto sistema de referencia), ha de ocurrir que todos sus puntos tengan velocidad constante (considerando $\vec{v} = 0$ como un caso particular de velocidad constante) y, por tanto, que el vector aceleración de cualquiera de sus puntos, sea 0.

Trataremos de relacionar ahora este hecho, con las magnitudes angulares. Si el vector aceleración de cualquiera de los puntos de que consta el cuerpo ha de ser cero, cuando nos fijemos en un punto dado del sólido:

¿Cómo deberá ser la rapidez angular del cuerpo respecto a dicho punto?

Es evidente que la rapidez angular del cuerpo (tengamos en cuenta que en un sólido rígido que gira todos los puntos lo hacen con la misma rapidez angular) deberá de permanecer nula, lo que implica que la aceleración angular también lo será (sin cambio de velocidad no hay aceleración), es decir: $\vec{w} = 0$ y $\vec{\alpha} = 0$. Si no fuera así, los puntos del sólido que girasen respecto al punto considerado estarían cambiando su vector velocidad (al menos en dirección) y, por tanto su aceleración no podría ser nula, tal y como se ha exigido.

En principio, cualquier punto del sólido se puede tomar como referencia para estudiar su movimiento. No obstante, nos interesa escoger al centro de masas, ya que su movimiento de traslación está regido por $\vec{F}_{ext}$ y puede ser conocido de antemano.

Tratad de plasmar las conclusiones anteriores tomando como punto de referencia el centro de masas de un sólido rígido.

Si nos fijamos en el centro de masas deberá cumplirse que, para que el vector aceleración correspondiente a dicho punto sea nulo, la fuerza exterior resultante sea también nula ya que, como sabemos, solo una fuerza exterior resultante puede modificar la velocidad del centro de masas ($\vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_C$). Además, el momento exterior resultante respecto de dicho punto (centro de masas) también tendrá que ser 0, ya que si la aceleración angular es 0, no puede haber momento resultante, puesto que como sabemos $\vec{M}_{res} = \vec{M}_{ext} = I \cdot \vec{\alpha}$ (la suma de los momentos de las fuerzas interiores en un sistema de partículas es nula).

¿Cómo podemos expresar las conclusiones anteriores en el caso de que el sólido rígido considerado se encuentre atravesado por un eje fijo?

Es claro que si el cuerpo está atravesado por un eje fijo (pase o no por su centro de masas), no podrá tener un movimiento de traslación rectilíneo y uniforme, sino tan solo de rotación o encontrarse en reposo. En este caso, la condición para que se encuentre en reposo será, obviamente, que su rapidez angular inicial sea nula y que el momento exterior resultante respecto de dicho eje, sea también nulo:

$$\vec{w}_0 = 0 \text{ y } \vec{M}_{ext} = 0$$

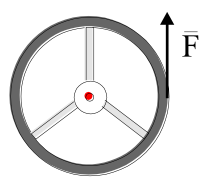
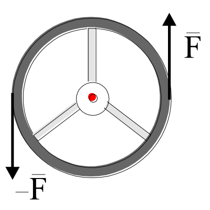
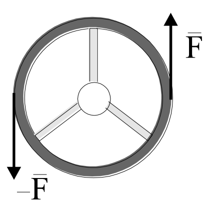
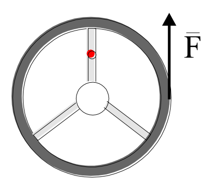
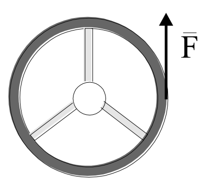
En estas condiciones se halla implícito que la fuerza exterior resultante sea nula ya que si no lo fuese, el centro de masas tendría que cambiar de velocidad (en este caso girar, lo que obligaría a que existiera $\vec{\alpha}$) con lo que el momento exterior no sería 0. El que la rapidez angular inicial sea nula es necesario especificarlo ya que, de lo contrario podría darse el caso de que $\vec{M}_{ext} = 0$ pero que el cuerpo estuviese ya girando con rapidez angular constante.

Si, por el contrario, el cuerpo no se encuentra atravesado por ningún eje fijo, tendremos que considerar que, para que se encuentre en reposo o con movimiento de traslación rectilíneo y uniforme, es necesario que se cumpla:

$$\vec{F}_{ext} = 0; \; \vec{M}_{ext} = 0 \text{ y } \vec{w}_0 = 0$$

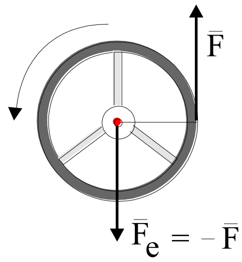
Mediante este ejercicio hemos podido comprobar cómo la misma ecuación que nos sirvió para estudiar los cambios de movimiento en el caso de una masa puntual, se puede utilizar para derivar a partir de ella las ecuaciones necesarias para estudiar los posibles cambio de movimiento de un sólido rígido, mostrando así la coherencia y globalidad de las leyes de la mecánica.

5. En las figuras siguientes se ha representado un volante en diversas situaciones. Explicad con el mayor detalle posible el movimiento de ese volante en cada caso, utilizando para ello las ecuaciones fundamentales de la dinámica de la traslación y de la rotación para un sólido rígido ($\vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_C$ y $\vec{M}_{ext} = I \cdot \vec{\alpha}$).

a) Eje fijo que pasa por cdm. $\vec{F}$ es la fuerza aplicada.	b) Eje fijo que pasa por el cdm. Par de fuerzas.	c) Ningún eje y sometido a un par de fuerzas.	d) Eje fijo que no pasa por el cdm. F es la fuerza aplicada	e) No hay ningún eje y F es la fuerza aplicada.
				

Para resolver este ejercicio hemos de analizar qué fuerza exterior resultante actúa sobre el centro de masas y cuál es el momento resultante respecto del eje de giro en cada caso.

a) Sobre el volante actúan dos fuerzas: la fuerza $\vec{F}$ aplicada a su periferia y la que hace el eje fijo $\vec{F}_e$. Como el cdm (situado en el centro del volante) está en el eje, no se moverá y su aceleración será $\vec{a}_C = 0$. Por tanto, la fuerza exterior resultante $\vec{F}_{ext} = \vec{F} + \vec{F}_e = m \cdot \vec{a}_C = 0$, es decir: sobre el volante actuará, en este caso, un par de fuerzas.



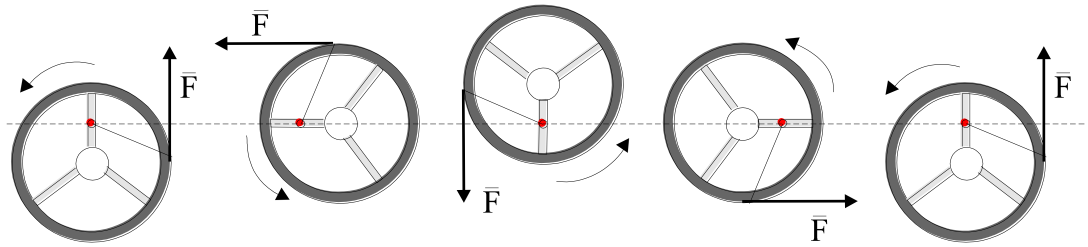
El movimiento de rotación que sufrirá el volante, se explica, precisamente, por el momento resultante debido al par de fuerzas respecto al eje de giro: $M = r \cdot F$, siendo r el radio del volante. Dicho momento es responsable de la aceleración angular con que girará el volante respecto al eje.

b) Sobre el volante, atravesado por el mismo eje fijo que en el caso anterior, actúa un par de fuerzas, de modo que la fuerza exterior resultante será nula: $\vec{F}_{ext} = \vec{F} + (-\vec{F}) = 0$ y el cdm seguirá estando en reposo. El volante girará alrededor del eje debido al momento del par de fuerzas, cuyo valor vendrá dado por $M = 2r \cdot F$ (doble que en el caso anterior). Nótese que el eje no ejerce ninguna acción y si no estuviese todo sucedería igual.

c) En este caso podemos hacer las mismas consideraciones que en el anterior, ya que, tanto la fuerza exterior resultante sobre el sistema, como el momento del par de fuerzas respecto del cdm, serán los mismos, pero ahora el eje de giro no es fijo y el volante además de girar podría estar trasladándose con movimiento rectilíneo y uniforme.

d) El volante no puede trasladarse pero sí girará alrededor del eje que en este caso no pasa por el centro de masas. Como el cdm también gira alrededor del eje, su aceleración $\vec{a}_C$ no es nula, por lo tanto la fuerza exterior resultante (suma de la fuerza $\vec{F}$ aplicada y la $\vec{F}_e$ que hace el eje sobre el volante) tampoco lo será.

El valor del momento resultante respecto del eje de giro vendrá dado por $M = M_F$ ya que $M_{Fe} = 0$ puesto que $\vec{F}_e$ está aplicada al eje de giro. Dicho momento es responsable de la aceleración angular con que girará el volante alrededor del eje indicado, tal y como se muestra en la figura adjunta (en ella no hemos incluido $\vec{F}_e$).



e) En este caso el volante no está sujeto por ningún eje fijo y la fuerza exterior sobre el volante coincide con la fuerza aplicada $\vec{F}$ por lo que el cdm se traslada con una cierta aceleración dada por $\vec{a}_C = \vec{F}/m$ (siendo m la masa del volante).

Además el momento exterior respecto del cdm vale M = r·F, lo que implica que el volante también girará respecto al cdm con una cierta aceleración angular, de modo que en este caso se producirá un movimiento combinado de traslación y de giro.

6. Determinad el momento de inercia de una varilla de masa m y longitud L:

a) Respecto de un eje perpendicular por su centro.
b) Respecto de un eje perpendicular por su extremo.

Sabemos que el momento de inercia I de una masa que pueda considerarse como puntual, respecto de un eje del que se encuentra a una distancia "r", viene dado por la expresión $I = mr^2$. Sin embargo en este ejercicio la varilla no puede considerarse como una masa puntual.

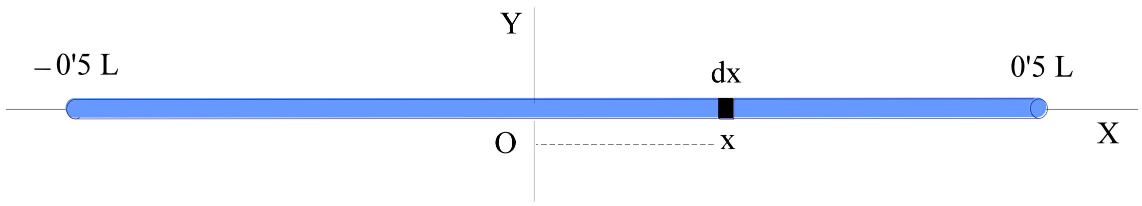
¿Cómo podríamos calcular entonces su momento de inercia?

Podemos considerar a cualquier cuerpo extenso de masa m como un número infinito de masas puntuales dm y su momento de inercia I, respecto de un eje dado, como la suma de los momentos de inercia dI que, respecto de ese mismo eje, tienen cada uno de los elementos de masa dm en que hemos considerado descompuesto dicho cuerpo. Al tratarse de una distribución continua de masa dicha suma se ha de hacer integrando:

$$I = \int dI = \int_0^m dm \cdot r^2$$

En nuestro caso, descompondremos pues la varilla de masa m y longitud L, en infinitos elementos de longitud dL a cada uno de los cuales le corresponderá una masa dm y un momento de inercia dI respecto del eje que se considere.

En la figura adjunta hemos dispuesto la varilla sobre el eje OX y vamos a calcular su momento de inercia respecto de un eje perpendicular que la atraviesa por su centro. Para simplificar, supondremos que las dos dimensiones alto y ancho de la varilla son despreciables frente a su longitud y en consecuencia se puede considerar lineal.



El momento de inercia de la masa dm representada (en color negro), será $dI = dm \cdot x^2$ y el momento de inercia total vendrá dado por $I = \int_0^m x^2 dm$.

Para poder integrar necesitamos relacionar las variables de la masa y de la distancia x al eje de giro.

Para ello tendremos en cuenta (tal y como hacíamos en la determinación de la posición del centro de masas) que la densidad lineal λ de la varilla está relacionada con su masa m y su longitud L mediante la expresión λ = m/L. Por otra parte, para un elemento infinitesimal λ = dm/dL = dm/dx de donde dm = λ·dx. Si la varilla es homogénea, el valor de la densidad correspondiente a cualquier trozo de la misma será constante.

Proceded a calcular el momento de inercia I

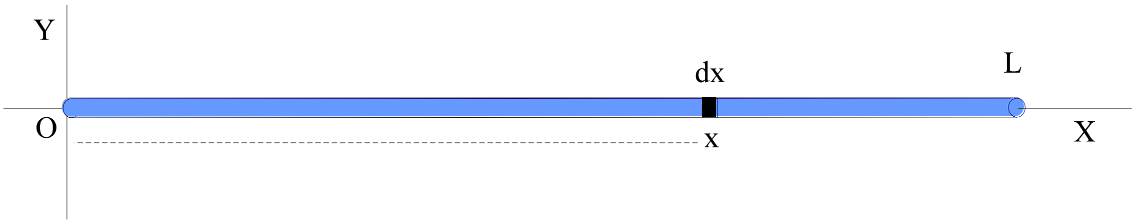
Basta con resolver la integral correspondiente desde que x = -L/2 hasta que x = L/2 :

$$I = \int dI = \int_0^m x^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \lambda\, dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{\lambda}{3} \left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right) = \frac{\lambda L^3}{12}$$

Teniendo ahora en cuenta que λ = m/L nos queda finalmente que el momento de inercia de una varilla respecto de un eje perpendicular que pasa por su centro vale:

$$I = mL^2/12$$

¿Cómo sería el momento de inercia si el eje fuese paralelo al anterior pero pasando por un extremo de la varilla?



Analizando la figura superior, es fácil darse cuenta de que el momento de inercia para los puntos de la primera mitad de la varilla será el mismo que en el caso anterior del otro eje, pero que los demás puntos se encuentran ahora a mayor distancia del eje, por lo que su momento de inercia debe ser mayor, lo que nos lleva a pensar que el momento de inercia total de la varilla también tendrá que ser más grande que el de antes. Para comprobarlo, no tenemos mas que integrar cambiando los límites (que ahora serán entre 0 y L).

$$I = \int dI = \int_0^m x^2 dm = \int_0^L x^2 \lambda\, dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{\lambda}{3} L^3 = \frac{mL^2}{3}$$

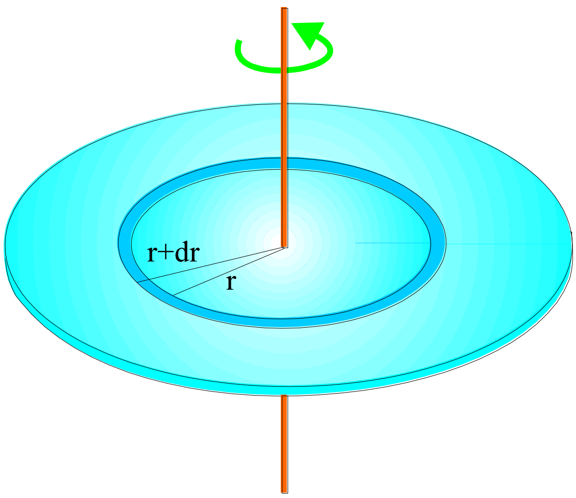
Como vemos, el momento de inercia nos sale ahora cuatro veces mayor. *¿Qué influencia tiene este hecho en la rotación de la varilla?*

De acuerdo con el significado físico de la magnitud momento de inercia, los resultados obtenidos nos muestran que para conseguir un cambio determinado en la rapidez angular con que gira una varilla (siempre en un tiempo dado), precisaremos un momento resultante $\vec{M}$ cuatro veces mayor en el caso de que gire respecto de un eje perpendicular que pasa por uno de sus extremos que si lo hace respecto de otro paralelo al anterior y que pase por su centro. Así por ejemplo, si lo que queremos es parar (en un tiempo dado) una varilla que se encuentra girando, precisaremos un momento $\vec{M}$ mayor en un caso que en otro. Este tipo de consideraciones tienen una gran importancia en el diseño de máquinas que tengan piezas que giren respecto de algún eje.

7. Determinad el momento de inercia de un disco de masa m y radio R, respecto de un eje perpendicular que lo atraviesa por su centro.

Para resolver este ejercicio (y otros similares) conviene plantearse en primer lugar *en qué tipo de elementos de masa dm nos interesa descomponer el objeto para facilitar la resolución de la integral* $I = \int dI = \int_0^m dm \cdot r^2$

En este caso, podemos considerar el disco como una serie de infinitos anillos concéntricos de superficie dS y masa dm, situados uno a continuación del otro desde que r = 0, hasta que r = R. Para ello basta con trazar circunferencias concéntricas cuyo radio r vaya aumentando un dr al pasar de una a otra.



A cada uno de esos anillos le corresponderá un momento de inercia $dI = dm \cdot r^2$ siendo r el radio del anillo y dm su masa que podremos evaluar como $dm = \sigma \cdot dS$ (σ es la densidad superficial del disco, $\sigma = \dfrac{m}{4\pi R^2}$, que suponemos constante), de modo que:

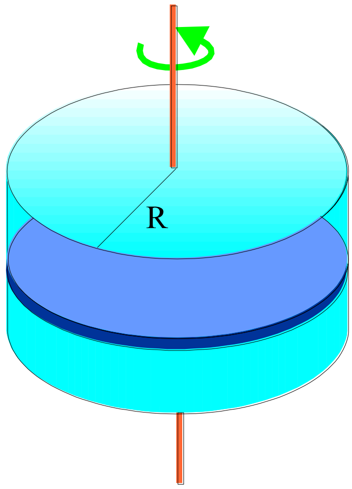
$dI = dm \cdot r^2 = \sigma \cdot dS \cdot r^2$ y como $dS = 2\pi \cdot r \cdot dr$, nos queda finalmente: $dI = \sigma \cdot 2\pi \cdot r^3 \cdot dr$

Proceded a integrar la expresión anterior para obtener el momento de inercia correspondiente a todo el disco respecto del eje considerado.

El momento de inercia del disco será la suma de todos los momentos de inercia dI correspondientes a cada uno de los anillos infinitesimales en que se puede considerar descompuesto, es decir, desde que r = 0 hasta que r = R, con lo que:

$$I = \int dI = \int_0^R \sigma 2\pi r^3\, dr = \frac{mR^2}{2}$$

¿Qué sucedería si en lugar de un disco tuviésemos un cilindro macizo y quisiéramos calcular el momento de inercia del mismo respecto de su eje de simetría de revolución?

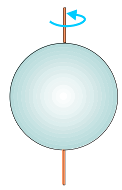


Podríamos descomponerlo en infinitos discos dibujando para ello infinitos planos perpendiculares a la generatriz desde la base hasta la cara superior del cilindro. Cada uno de estos discos tendría un radio R, una masa dm y un momento de inercia dado por $dI = dmR^2/2$, por lo que, para calcular el momento de inercia del cilindro bastaría con sumar los momentos de inercia de todos los discos que constituyen el cilindro:

$$I = \int dI = \int_0^m \frac{1}{2} dm\, R^2 = \frac{mR^2}{2}$$

Para resolver la integral anterior hemos tenido en cuenta que R es constante y la única variable es, por tanto, la masa.

8. Determinad el momento de inercia de una esfera maciza respecto de un eje que coincida con su diámetro.

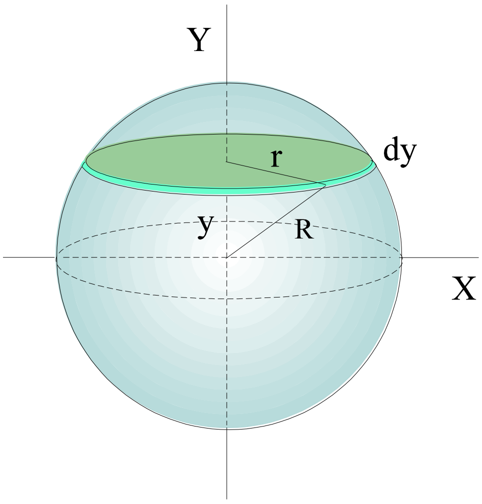


Como siempre ocurre en este tipo de problemas, la primera cuestión a plantearse es *en qué tipo de trozos infinitesimales nos puede interesar descomponer la esfera* para poder hallar el momento de inercia de dicha esfera respecto al eje que se nos indica.

Si dibujamos infinitos planos perpendiculares al eje, tendremos descompuesta la esfera en infinitos discos cuyo momento de inercia será, como ya sabemos, $dI = dm\, r^2/2$, con lo que el momento de inercia de la esfera será la suma de todos ellos:

$$I = \int dI = \int_0^m \frac{dm \cdot r^2}{2}$$

Sin embargo, en este caso, a diferencia de lo que ocurría con el cilindro, el radio de los discos va cambiando y vale 0 en la parte inferior de la esfera para ir aumentando hasta coincidir con el radio R de la esfera cuando nos encontramos en la mitad y luego ir disminuyendo hasta hacerse nuevamente 0 en la parte superior de la esfera. Por tanto hemos de *buscar un cambio de variable adecuado que nos permita resolver la integral anterior.*



Si tomamos el sistema de referencia de la figura y tenemos en cuenta que la densidad es $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

la masa del disco se podrá evaluar como dm = ρ·dV y su volumen como dV = πr^2dy y el momento de inercia será:

$$I = \int dI = \int_0^m \frac{dm \cdot r^2}{2} = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} r^2 \rho\pi r^2 dy = \frac{\rho\pi}{2}\int_{-R}^{R} r^4 dy$$

No obstante, todavía no podemos integrar porque seguimos teniendo más de una variable. Es necesario, pues, *buscar alguna relación entre el radio r y la "y" que nos permita resolver la integral.*

Si nos fijamos en la figura veremos que utilizando el teorema de Pitágoras para el triángulo que se forma (de hipotenusa R) podemos escribir que $r^2 = R^2 - y^2$, y como R es constante, ya podemos *integrar la expresión anterior.*

$$I = \frac{\rho\pi}{2}\int_{-R}^{R} r^4 dy = \frac{\rho\pi}{2}\int_{-R}^{R} (R^4 - 2R^2y^2 + y^4)\, dy = \frac{\rho\pi}{2} \cdot \frac{16R^5}{15} = \frac{2}{5} mR^2$$

¿Cómo cambiaría el momento de inercia si toda la masa estuviese repartida en la periferia (es decir si se tratase de una esfera hueca de igual masa y del mismo radio)?

Cabe pensar que en este caso el momento de inercia debería de ser mayor puesto que, exceptuando los puntos que ya se encontraban en la periferia, el resto de ellos ha aumentado su distancia respecto al eje de giro y, por tanto, su momento de inercia.

Operativamente, la diferencia estaría en que en lugar de descomponer el cuerpo en discos, lo haríamos en anillos, de momento de inercia dI = dm r^2 y que al tratarse de un objeto superficial su densidad será σ = m/s = m/4πR^2 y la masa de uno de los anillos vendrá dada por dm = σ·dS = σ 2π r dy. Teniendo en cuenta estas consideraciones, ya se puede *proceder a resolver la integral correspondiente*.

$$I = \int_{-R}^{R} dmr^2 = \int_{-R}^{R} \sigma 2\pi\, r^3 dy = \frac{2}{3} mR^2$$

Como podemos ver el momento de inercia de una esfera hueca respecto a un eje que la atraviese según la dirección de uno de sus diámetros es 5/3 mayor que si la esfera fuese maciza (de igual masa y radio).

Utilizad el momento de inercia de una esfera hueca como dato de partida para deducir a partir del mismo el momento de inercia correspondiente a una esfera maciza.

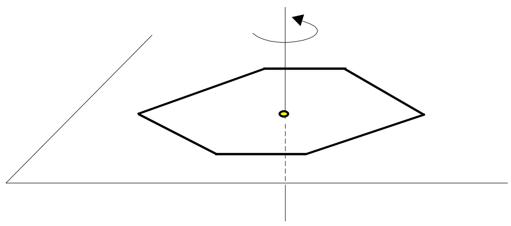
9. Determinad, por aplicación del teorema de Steiner, el momento de inercia de una esfera maciza respecto de un eje tangente a la misma.

sol:$7mR^2/5$

10. Dado un hexágono regular constituido por seis varillas homogéneas de longitud L y masa m, calculad su momento de inercia respecto de un eje perpendicular al plano que lo contiene y que pasa por su centro.

En este problema hemos de calcular el momento de inercia I de un hexágono, cuyos lados son varillas, respecto de un eje de giro perpendicular a su plano y que lo atraviesa por su centro.

¿De qué puede depender dicho momento de inercia?

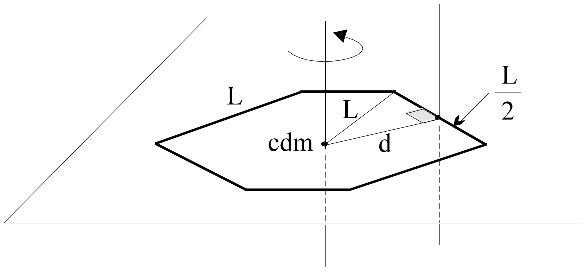


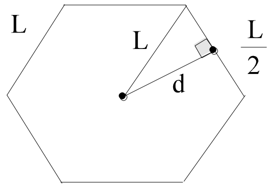
Dada la simetría de la figura, cabe esperar que el momento de inercia dependa de la masa de las varillas y de su distancia al centro del hexágono, la cual depende de la longitud del lado.

¿Cómo podríamos calcular el momento de inercia que nos piden?

Podemos calcular el momento de inercia I_v de una de las varillas respecto del eje a que se refiere el problema y, dada la simetría de la figura, se cumplirá que $I = 6I_v$, siendo I el momento de inercia que buscamos.

Sabemos que el momento de inercia de una varilla respecto de un eje perpendicular que la atraviesa por su centro viene dado por $I_C = mL^2/12$. No obstante el eje respecto del cual queremos calcular el momento de inercia no es este, sino otro eje paralelo. Ello nos permite, pues, determinar dicho momento de inercia aplicando el teorema de Steiner, según el cual $I = I_C + m \cdot d^2$ en donde I_C es el momento de inercia respecto de un eje que pasa por el centro de masas del objeto, I el momento de inercia respecto de otro eje paralelo al anterior y d la distancia entre ambos ejes. En las figuras que siguen hemos representado el hexágono en perspectiva (izquierda) y visto desde arriba (derecha), con el fin de facilitar la visualización de ejes y distancias.





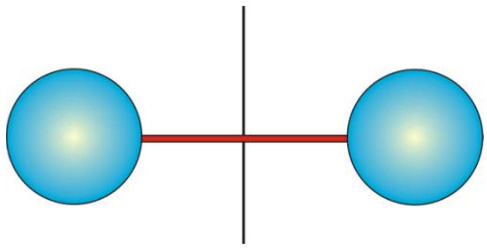
En nuestro caso, el teorema de Steiner nos lleva a escribir $I_v = mL^2/12 + m \cdot d^2$ de donde podemos obtener I_v si *previamente calculamos la distancia d entre los ejes.*

Como se trata de un hexágono regular (ver figura anterior derecha) se cumple que $d^2 = L^2 - L^2/4 = 3L^2/4$. Sustituyendo ahora en la expresión anterior nos queda:

$$I_v = mL^2/12 + m \cdot d^2 = mL^2/12 + m \cdot 3L^2/4 = 5mL^2/6$$

De acuerdo con ello el momento de inercia total será: $I = 6\, I_v = 5mL^2$

11. Dos esferas macizas de radio R y masa m, se encuentran unidas mediante una varilla de longitud 3R y masa m. Determinad el radio de giro del cuerpo, respecto de un eje perpendicular a la varilla por su centro.



El radio de giro k de un objeto respecto de cierto eje, se define como la distancia a que debería encontrarse del eje una masa puntual igual a la masa del objeto, para que tuviese el mismo momento de inercia que el objeto. Como es lógico, a un mismo objeto le corresponden tantos radios de giro como ejes se considere (tantos como momentos de inercia). *¿Qué podemos hacer, pues, para calcular el radio de giro?*

Para obtener el radio de giro de un cuerpo respecto de un eje indicado bastará con determinar su momento de inercia respecto de dicho eje y luego evaluar a qué distancia del mismo debería encontrarse una masa puntual igual a la del cuerpo para que su momento de inercia fuese el mismo. Si designamos por k el radio de giro y tenemos en cuenta que el momento de inercia de una masa puntual se define como el producto de dicha masa y el cuadrado de su distancia al eje de giro, podemos escribir:

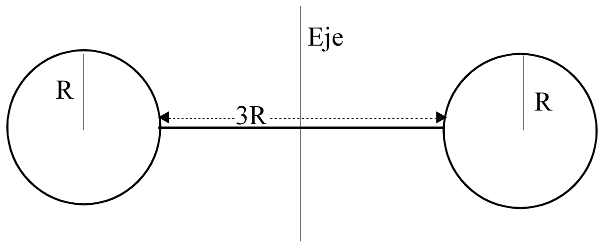
$$I = m \cdot k^2 \rightarrow k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

Vemos pues, que el radio de giro depende del momento de inercia del objeto en cuestión y de su masa. Lo primero que tendremos que hacer pues, es

obtener el momento de inercia del sistema que se nos indica en el enunciado.

Para calcular el momento de inercia I en este caso, podemos considerar que se trata de un objeto compuesto por dos esferas iguales y una varilla, calcular el momento de inercia correspondiente a cada uno de esos cuerpos y luego sumar.

Sabemos que el momento de inercia de una esfera maciza, de masa m y radio R, respecto de un eje que la atraviesa por su centro viene dado por $2mR^2/5$. *¿Cómo podemos calcular el momento de inercia respecto del eje que nos piden?*



Podemos hacer uso del teorema de Steiner: $I = I_C + m \cdot d^2$ que, como ya sabemos, nos relaciona el momento de inercia I_C de un objeto de masa m, respecto de un eje de giro que pase por su centro de masas, con el que dicho objeto presenta respecto de otro eje paralelo a este y situado a una distancia "d" del mismo. En este caso, la aplicación de dicho teorema a cualquiera de las dos esferas, de masa m_e, nos conduce a expresar su momento de inercia respecto del eje que se indica en el enunciado como

$$I_e = 2m_e R^2/5 + m_e \cdot (2'5 \cdot R)^2 = 6'65\ m_e R^2$$

El cálculo del momento de inercia de la varilla I_v, no ofrece ninguna dificultad ya que para ello basta con aplicar la expresión correspondiente (ya obtenida en un problema anterior), con lo que:

$$I_v = m_v L^2/12 = m_v (3R)^2/12 = 0'75\ m_v R^2$$

Sumando los momentos de inercia anteriores, teniendo en cuenta que la masa de cada esfera m_e y la de la varilla m_v son iguales ($m_e = m_v = m$), podemos obtener el momento de inercia completo como:

$$I = 2 \cdot I_e + I_v = 2 \cdot 6'65\ m R^2 + 0'75\ m R^2 = 14'05\ m R^2$$

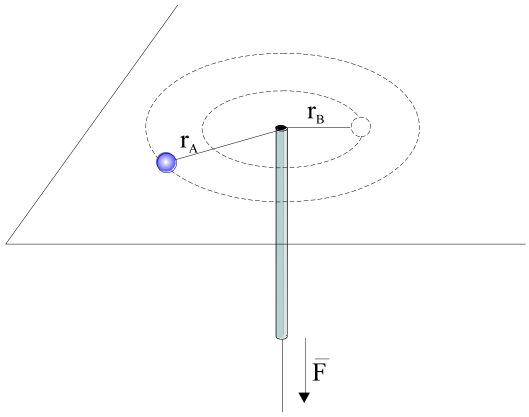
Ahora ya podemos determinar el valor del radio de giro k, exigiendo que:

$I = m_T \cdot k^2$ siendo $m_T = 3m$. De esta forma nos queda finalmente: $k = \sqrt{\dfrac{I}{3m}} = 2'16 \cdot R$

12. Calculad el radio de giro de los cuerpos a los que se refieren los enunciados de los ejercicios 6, 7, 8, 9 y 10 respecto de los ejes que se indican en dichos enunciados.

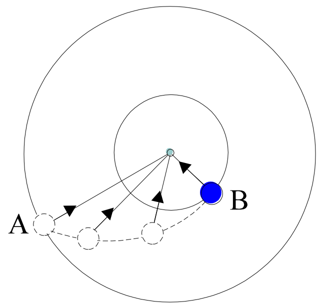
sol: Varilla: L/ $\sqrt{12}$, L/ $\sqrt{3}$. Disco: R/ $\sqrt{2}$. Esfera: $(\sqrt{2/5})\cdot$R; $(\sqrt{7/5})\cdot$R; Hexágono: $\sqrt{5}$ L

13. El cuerpo de la figura está girando a 2 r.p.s sobre un plano horizontal con el que no presenta rozamiento. Si tiramos del hilo y reducimos el radio de 20 cm a 10 cm ¿Qué variación sufrirá la rapidez angular del cuerpo?



Sobre el cuerpo actúan tres fuerzas: el peso $\vec{P}$, la fuerza normal $\vec{R}$ que ejerce el plano y la tensión $\vec{T}$ del hilo. Dado que el movimiento es circular y uniforme, la resultante de las tres fuerzas anteriores ha de ser precisamente igual a $\vec{T}$, que será la fuerza necesaria para que el cuerpo se mantenga con ese movimiento, describiendo una trayectoria circular de 20 cm de radio. El valor de dicha fuerza resultante, se calcula como:

$F_{res\ n} = m \cdot a_n \rightarrow T = m \cdot a_n = m \cdot v^2/r = m \cdot w^2\ r$, de forma que si particularizamos la ecuación anterior a la situación inicial (que designaremos como "A") tendremos:



$$T_A = m \cdot w_A^2 \cdot r_A$$

Es evidente que la cuerda está tensa porque tiramos de ella, si ahora tiramos con más fuerza, la tensión aumentará (pasando de valer T_A a valer T_B) y que el radio de la curva disminuirá hasta alcanzar un nuevo valor r_B (como se muestra en la figura anterior) tal que en la nueva situación se cumpla:

$$T_B = m \cdot w_B^2 \cdot r_B$$

¿Qué le habrá ocurrido a la rapidez angular?

Dado que el radio disminuye y que el valor de la tensión ha aumentado, como consecuencia de tirar del hilo hacia abajo, concluimos que, de acuerdo con la ecuación anterior, como la masa no cambia, la nueva rapidez angular w_B deberá ser mayor que la inicial w_A.

¿Cómo podemos calcular el valor de la nueva rapidez angular?

En el trayecto entre la situación inicial A y la final B, no se cumple el principio de la conservación de la cantidad de movimiento al existir una fuerza resultante $\vec{T}$ que actúa sobre la bolita de masa m, en cambio sí que se cumple el principio de conservación del momento cinético $\vec{L}$ (también llamado cantidad de movimiento angular), porque el momento $\vec{M}$ de la fuerza resultante respecto del eje de giro es nulo ($\vec{T}$ tiene siempre la misma dirección que $\vec{r}$), de modo que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{res} = \vec{r} \times \vec{T} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{constante} \rightarrow \vec{L}_A = \vec{L}_B$$

El vector $\vec{L}$ debe ser constante en módulo, dirección y sentido. Como la trayectoria se mantiene siempre en el mismo plano y el cuerpo gira siempre en el mismo sentido, la dirección y sentido del momento cinético se mantiene constante y en cuanto a su módulo se cumplirá que: $L_A = L_B$ y por lo tanto que $I_A w_A = I_B w_B$. Sustituyendo los momentos de inercia por sus expresiones correspondientes obtenemos que: $m \cdot r_A^2 \cdot w_A = m \cdot r_B^2 \cdot w_B$

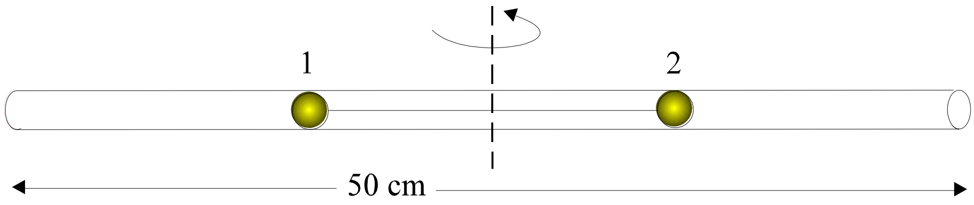
y despejando de ella obtener la rapidez angular w_B, como $w_B = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 w_A = 16\,\pi$ rad/s

Si analizamos el resultado literal obtenido, podemos darnos cuenta en primer lugar que es dimensionalmente homogéneo (T^{-1} en ambos lados de la igualdad) y que contempla algunos casos evidentes así como los razonamientos que hemos realizado anteriormente. Por ejemplo, vemos que si el radio permanece igual, tampoco cambiara la rapidez ($w_B = w_A$) y si el radio de giro disminuye la rapidez angular ha de aumentar. Sin embargo el resultado, nos permite precisar además, que dicho aumento, en la situación que analizamos, **no es directamente proporcional** a la disminución que experimente el radio, ya que, como podemos comprobar, cuando el radio se reduce a la mitad ($r_B = r_A/2$) la rapidez angular no se hace el doble, sino el cuádruple $w_B = 4w_A$).

14. Una plataforma circular de 80 kg de masa, gira a 12 r.p.m. Un muchacho de 40 kg de masa que se encontraba en el eje de giro, se traslada hasta la periferia. ¿Cuál será la nueva rapidez angular?

sol: $\pi/5$ rad/s

15. La barra horizontal de la figura tiene un momento de inercia respecto al eje de rotación de $5\cdot10^{-3}$ $kg\cdot m^2$, y cada una de las bolas que pueden deslizar sobre ella tiene una masa de 50 g y puede considerarse de dimensiones despreciables. El conjunto está girando libremente alrededor del eje representado con las bolas dispuestas simétricamente respecto al mismo y sujetas por un hilo de 20 cm de longitud. Si se rompe el hilo cuando el conjunto gira a 20 rad/s, determinad la nueva rapidez angular cuando las bolas lleguen a los topes del extremo de la barra.



sol: 10'66 rad/s.

16. Dos niños de 30 kg de masa cada uno, se encuentran sobre una barra horizontal, de masa despreciable, que gira a razón de 2 rad/s, alrededor de un eje perpendicular por su punto medio. Inicialmente, los niños se encuentran a 2m del eje de giro y avanzan hasta colocarse a 1m. Se pide:

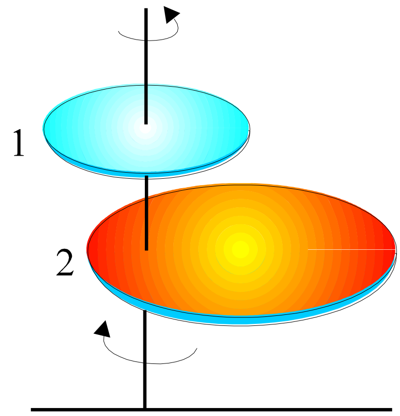
a) Rapidez angular final.
b) Trabajo realizado por los niños.

sol: a) 8 rad/s; b) 1440 J

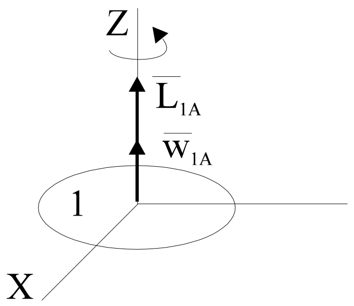
17. Disponemos de dos discos que se encuentran girando en torno a un mismo eje pero con sentidos contrarios en la situación que se aprecia en la figura. El disco 1 de 50 cm de radio y 6 kg de masa, gira a 0'5 r.p.s mientras que el 2, de 80 cm de radio y 5 kg de masa, gira a 0'3 r.p.s. Si en determinado instante se deja caer el disco 1 sobre el 2, determinad:

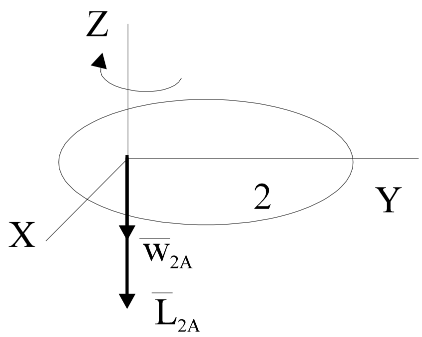
a) Rapidez angular de giro del conjunto.
b) Variación de energía cinética que se produce en el proceso.

(La distancia del eje al centro del disco 2 es de 9 cm)



Si consideramos el sistema formado por ambos discos, podemos distinguir entre dos estados. El estado A, corresponde a la situación en que comienza la interacción entre los dos discos. En dicha situación cada uno de ellos se encuentra girando con una rapidez angular distinta y con un determinado momento cinético (o cantidad de movimiento angular) respecto del eje de giro. Designaremos como $\vec{w}_{1A}$ a la velocidad angular del disco superior y como $\vec{L}_{1A}$ a su cantidad de movimiento angular, $\vec{L}_{1A} = I_1 \cdot \vec{w}_{1A}$. Análogamente para el disco inferior, $\vec{w}_{2A}$ representará su velocidad angular en la situación A y $\vec{L}_{2A}$ su cantidad de movimiento angular, de modo que $\vec{L}_{2A} = I_2 \cdot \vec{w}_{2A}$. En la figura siguiente se ha representado esquemáticamente esta situación:





Al caer el disco 1 sobre el 2, ocurre una interacción entre ambos y al final los dos giran con la misma velocidad angular. Este hecho ha de interpretarse admitiendo que sobre cada disco actúa un momento resultante que modifica su velocidad angular hasta que ambos giren con la misma. Ese "momento" responsable del cambio de velocidad angular no puede ser otro que el que se debe a la fuerza de rozamiento que actúa sobre cada uno de los discos mientras desliza el uno sobre el otro. Si designamos como estado B a la situación en que ambos giran ya con la misma velocidad angular $\vec{w}_B$, la cantidad de movimiento angular de cada uno valdrá ahora $\vec{L}_{1B} = I_1 \cdot \vec{w}_B$ para el de arriba, mientras que para el de abajo será $\vec{L}_{2B} = I_2 \cdot \vec{w}_B$, donde $\vec{w}_B$ (cuyo sentido y valor numérico desconocemos a priori) es la velocidad angular que queremos hallar.

Para calcular $\vec{w}_B$ hemos de relacionar los estados A y B ¿Cómo podríamos hacerlo?

Si consideramos a los dos discos como un único sistema, las fuerzas que se ejercen entre ellos serán todas interiores. Sabemos que los momentos de las fuerzas internas no pueden modificar la cantidad de movimiento angular total de un sistema (aunque sí la de las partículas que lo formen). Podemos hacer uso de este principio para tratar de resolver el problema. Para ello, consideraremos el sistema de referencia de la figura anterior, en el que:

$$\vec{L}_A = \vec{L}_B \rightarrow \vec{L}_{1A} + \vec{L}_{2A} = \vec{L}_{1B} + \vec{L}_{2B} \rightarrow (I_1 w_{1A} - I_2 w_{2A})\vec{k} = (I_1 + I_2) w_B \vec{k}$$

En la ecuación anterior w_B es la componente escalar del vector velocidad angular $\vec{w}_B$ la cual podemos despejar, de manera que obtenemos:

$$w_B = \frac{I_1 w_{1A} - I_2 w_{2A}}{I_1 + I_2}$$

En esta expresión el momento de inercia del disco 1 corresponde al que presenta respecto a un eje perpendicular al plano que lo contiene y que pasa por su centro. Este se puede calcular como $mr^2/2$. Sin embargo para determinar I_2, hemos de tener en cuenta que el eje respecto del cual está girando no pasa por su centro de masas sino que se trata de un eje paralelo situado a una distancia d = 9 cm del mismo. Para obtener I_2 podemos aplicar el teorema de Steiner. Teniendo todo esto en cuenta nos queda finalmente que:

$$w_B = \frac{I_1 w_{1A} - I_2 w_{2A}}{I_1 + I_2} = \frac{\frac{m_1 r_1^2}{2} \cdot w_{1A} - \left(\frac{m_2 r_2^2}{2} + m_2 d^2\right) w_{2A}}{\frac{m_1 r_1^2}{2} + \left(\frac{m_2 r_2^2}{2} + m_2 d^2\right)} = \frac{0'44 - 1'07}{0'01 + 0'17} = -3'5 \ \frac{rad}{s}$$

¿Como hay que interpretar que la rapidez final salga negativa?

De acuerdo con el sistema de referencia utilizado, la única componente escalar del vector velocidad angular del disco inferior 2, al comienzo de la interacción es negativa (y así lo hemos tenido en cuenta al proceder a la resolución literal del problema). El hecho de que la rapidez final, común a ambos discos, nos salga negativa, deberá interpretarse como que el conjunto gira en el mismo sentido que el disco inferior.

¿Cómo podemos calcular la variación de energía cinética que se ha producido?

En este caso se trata de energía cinética de rotación. Sabemos que dicha energía cinética se calcula mediante la expresión: $Ec = Iw^2/2$, luego para calcular la variación de energía cinética que se pueda haber producido, bastará con aplicar dicha expresión a las situaciones A y B ya descritas y efectuar la resta correspondiente. Una cuestión previa es *si esa variación resultará una cantidad positiva, nula o negativa.*

Dado que durante la interacción actúan fuerzas de fricción que modifican el movimiento de los discos frenándolos, cabe esperar que el trabajo realizado por éstas se traduzca en una disminución de la energía cinética de rotación del sistema, de forma que la energía cinética en el estado B sea inferior a la que había en el estado A. La diferencia (si el sistema está aislado) se encontrará en forma de energía interna asociada a las partículas que forman ambos discos (que se pone de manifiesto en el aumento que experimenta su temperatura).

La energía cinética de rotación en el estado A será: $Ec_A = Ec_{1A} + Ec_{2A}$, y sustituyendo:

$$Ec_A = \frac{1}{2} I_1 w_1^2 + \frac{1}{2} I_2 w_2^2 = 9'67 + 3'36 = 13'03 \text{ J}$$

La energía cinética de rotación en el estado B: $Ec_B = Ec_{1B} + Ec_{2B}$, y sustituyendo:

$$Ec_B = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) w_B^2 = 1'1 \text{ J}$$

La variación de energía cinética producida será pues: $\Delta Ec = Ec_B - Ec_A = -11'93$ J

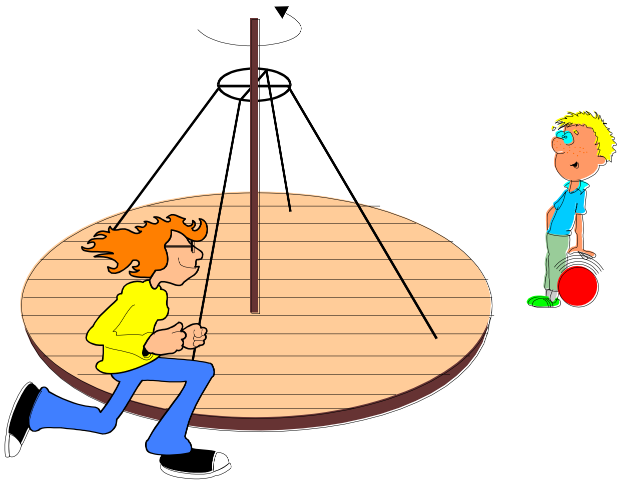
18. Una plataforma circular de 1’2 m de radio y 80 kg de masa, es capaz de girar libremente (sin rozamiento) alrededor de un eje perpendicular al plano que la contiene y que pasa por su centro. Dicha plataforma, inicialmente en reposo, es empujada mediante una fuerza F hasta conseguir que gire a 0’2 rps. Se pide:

a) Trabajo realizado sobre la plataforma por la fuerza que la empujó.
b) ¿Qué sucederá si, cuando está girando a 0’2 rps, se sienta en su periferia un niño de 40 kg que se encuentra en reposo?
c) ¿Y si el niño, antes de sentarse, comienza a correr junto a la plataforma y se sienta cuando su rapidez de giro sea igual que la de la plataforma?

Al encontrarse la plataforma ligada a un eje fijo no puede trasladarse y la fuerza que se realiza sobre ella, hace que aumente su rapidez angular.

¿Cómo podríamos calcular el trabajo realizado?

Si consideramos como sistema a la plataforma y como estado A el que se encuentra en el instante que la persona empieza a empujar (reposo), y como estado B el que tiene cuando ha alcanzado la rapidez angular de 0’2 rps, podemos calcular el trabajo realizado mediante la expresión que relaciona el trabajo resultante sobre un sistema con la variación de energía cinética de rotación producida:



$$W_{res\,A}^{\;B} = \Delta Ec_{rot\,A}^{\;B} = \frac{1}{2} I w_B^2 - \frac{1}{2} I w_A^2$$

La plataforma se puede considerar como un disco macizo que gira respecto a un eje perpendicular al plano que forma y que pasa por su centro, con lo que su momento de inercia será $I = mr^2/2$. Sustituyendo en la expresión anterior y teniendo en cuenta que $w_A = 0$ y que $w_B = 0'2 \cdot 2\pi$ rad/s obtenemos:

$$W_{F\,A}^{\;B} = \Delta Ec_{rot\,A}^{\;B} = \frac{1}{2} I w_B^2 = \frac{1}{2} 80 \cdot 1'2^2 \cdot (0'2 \cdot 2\pi)^2 = 45'48 \text{ J}$$

¿Qué ocurre cuando el niño, desde el reposo, se monta en la plataforma?

Teniendo en cuenta que el niño al contactar con la plataforma se encuentra en reposo, podría pensarse que la rapidez angular no iba a cambiar. Sin embargo, la experiencia nos dice que ésta disminuye a otro valor menor tanto más apreciablemente cuanto más hacia la periferia se sitúe el niño. *¿Cuál puede ser la explicación de este hecho?*

Consideraremos el conjunto niño-plataforma como un único sistema, situación inicial C la que corresponde al niño en reposo y plataforma girando, y situación final D cuando plataforma y niño se encuentran girando con la misma rapidez angular. Los momentos de las fuerzas que actúan entre ambas situaciones, al tratarse de fuerzas internas, no pueden cambiar la cantidad de movimiento angular (o momento cinético) del sistema y, por tanto, se debe cumplir que $\vec{L}_C = \vec{L}_D$. Sin embargo, los momentos de las fuerzas internas sí que cambian la cantidad de movimiento angular de las partes del sistema sobre las que actúan, por eso, en nuestro caso cambiará la cantidad de movimiento angular de la plataforma pero también la del niño de manera tal que su suma siga valiendo lo mismo.

¿Cómo podemos hallar la rapidez angular del conjunto cuando el niño ya ha subido?

Podemos obtener la expresión de la cantidad de movimiento angular del sistema formado por el niño y la plataforma en los estados C y D ya descritos e igualar (en este caso $\vec{M}_{ext} = 0$) con el fin de obtener la rapidez angular w_D con que girará el conjunto. Si designamos como 1 al niño, como 2 a la plataforma y como eje Z al propio eje de giro, tendremos:

$$\vec{L}_{1C} + \vec{L}_{2C} = \vec{L}_{1D} + \vec{L}_{2D} \rightarrow I_2 w_{2C} \cdot \vec{k} = (I_1 + I_2) w_D \cdot \vec{k}$$

En la obtención de la ecuación anterior hemos tenido en cuenta que la cantidad de movimiento angular del niño en la situación A es nula (por encontrarse en reposo). A partir de la misma podemos obtener la rapidez angular w_D como:

$$w_D = \frac{I_2 w_{2C}}{I_1 + I_2} = \frac{w_{2C}}{\frac{I_1}{I_2} + 1} = \frac{w_{2C}}{\frac{2m_1}{m_2} + 1} = 0\text{'}72 \text{ rad/s.}$$

(Inferior a la rapidez w_C = 1’26 rad/s)

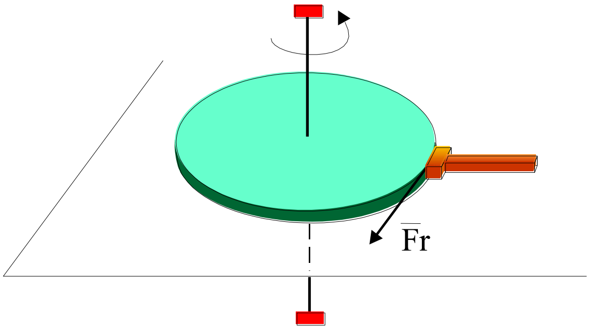
Analizad el resultado literal obtenido

El resultado literal anterior, además de ser dimensionalmente homogéneo (T^{-1} en ambos miembros) nos muestra que cuanto mayor sea la inercia I_2 a la rotación de la plataforma (a igualdad de los restantes factores) más se aproxima w_D a w_C , es decir, menos se modificará la rapidez angular inicial w_{2C} de la plataforma por el hecho de que alguien se siente en ella; cuanto más pequeña sea la masa m_1 del niño menos cambiara la rapidez angular de la plataforma, etc.

¿Que pasaría si el niño, en lugar de colocarse en la periferia, hubiese saltado desde el suelo hasta el eje de giro?

En este caso su momento de inercia I_1 respecto al eje sería nulo y $w_D = w_{2C}$, es decir, la rapidez angular de la plataforma no cambiaría.

19. Un disco de 40 cm de radio gira a 80 r.p.m. alrededor de un eje vertical, por su centro, y que se mantiene fijo. Su momento de inercia respecto de este eje es 20 kg·m^2. Se presiona con un taco en su periferia, el cual le ejerce una fuerza de rozamiento tangencial y constante $\vec{F}_r$, de forma que al cabo de 60 s el disco se detiene. Calculad:



a) Aceleración angular de frenado.
b) Valor de la fuerza aplicada.
c) Número de vueltas que dará hasta detenerse.

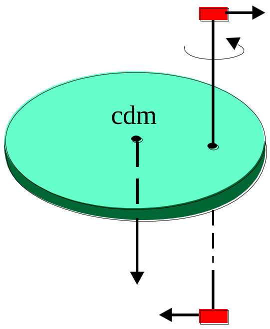
Como se trata de un movimiento de rotación pura alrededor de un eje fijo, únicamente nos interesará considerar aquellas fuerzas actuantes sobre el cuerpo que tengan "momento" respecto del eje de giro ya que es el momento resultante de dichas fuerzas el causante de la aceleración angular y, por tanto, de la modificación del estado de rotación del disco, que girará cada vez más despacio hasta pararse. Para determinar la aceleración angular del disco trataremos, pues, de obtener la expresión del momento resultante que actúa sobre el mismo.

Analizad qué fuerzas se ejercen sobre el disco y obtened la expresión de la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación aplicada al mismo.

Sobre el disco actúan la fuerza peso $\vec{P}$, la fuerza $\vec{F}_e$ ejercida por el eje y la fuerza de rozamiento $\vec{F}_r$ ejercida por el taco en la periferia. Como, tanto $\vec{P}$ como $\vec{F}_e$ están aplicadas en el eje de giro, su momento respecto del mismo será nulo y solo tendrá efecto el momento de $\vec{F}_r$ de manera que será la fuerza de rozamiento la que tendremos que tener en cuenta para calcular el momento resultante que actúa sobre el disco.

¿En qué cambiaría el razonamiento anterior si el disco hubiese estado atravesado por un eje que no pasara por su centro de masas?

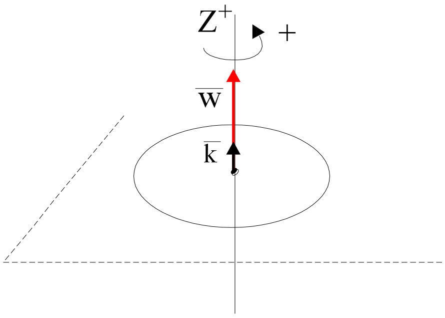
Aunque el disco no estuviese atravesado por su centro de masas, seguiríamos sin considerar el efecto de la fuerza peso ya que aunque el momento de $\vec{P}$ "intentaría" hacer girar el cuerpo, dicho giro se efectuaría en un plano no permitido por el eje de modo que en los puntos de sujeción del disco al eje se producirían unas fuerzas cuyo momento compensaría al ejercido por la fuerza peso.



Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación tenemos que:

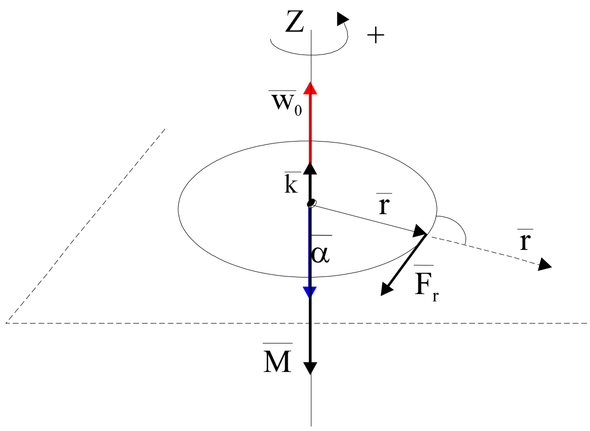
$\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$ y como el plano de giro permanece constante, tanto $\vec{M}$ como $\vec{\alpha}$ solo podrán tener una dirección (perpendicular al plano de rotación), aunque con dos sentidos posibles, dependiendo del sentido en que se produzca el giro. Este hecho nos permite trabajar solo con una componente escalar de los vectores $\vec{M}$, $\vec{\alpha}$ y $\vec{w}$, que podrá ser positiva o negativa según el sistema de referencia escogido.

<u>En lo que sigue llamaremos eje Z al eje en el que se realice el giro y adoptaremos el criterio de considerar como sentido positivo el de la rotación</u>, lo que implica que el vector axial $\vec{w}$ tendrá que dibujarse sobre el eje Z y en el mismo sentido que el vector unitario $\vec{k}$, tal y como se muestra en la figura de la derecha



De acuerdo con lo anterior $\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$ se podrá expresar como $M_z = I \cdot \alpha_z$. Podemos obviar expresar que se trata de la componente “z” porque los vectores como $\vec{M}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{w}$ se encontrarán todos ellos sobre el eje Z, de manera que, <u>en lo sucesivo, siempre que sea posible utilizaremos un tratamiento escalar</u>. Ello implica que en la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación $M = I \cdot \alpha$ el momento resultante M y la aceleración angular α no representarán, en general, los módulos de los vectores $\vec{M}$ y $\vec{\alpha}$, sino <u>sus componentes escalares</u> (positivas o negativas según el sentido que tengan los vectores correspondientes).

En nuestro caso, si nos fijamos en el producto vectorial $\vec{r} \times \vec{F}_r$ vemos que el vector $\vec{M}$ tiene el sentido considerado como negativo, tal y como se muestra en la figura siguiente, por tanto, su única componente escalar será negativa.



La ecuación fundamental de la dinámica de la rotación expresada escalarmente será pues: $- M = I \cdot \alpha$ o lo que es lo mismo $- (F_r \cdot r) = I \cdot \alpha$ siendo α la incógnita a determinar, por lo que no le pondremos signo, aunque sepamos que ha de resultar negativa al ser la aceleración angular un vector siempre en la misma dirección y sentido que $\vec{M}$.

¿Cómo podríamos calcular la aceleración angular de frenado?

De la ecuación anterior nos queda que $\alpha = - F_r \cdot r / I$ pero esto no nos sirve para determinar α porque no conocemos la fuerza de fricción. Otra posibilidad es utilizar las ecuaciones del movimiento circular uniformemente acelerado (válidas para cualquier punto del cuerpo):

$w = w_0 + \alpha\,(t-t_0)$
$\theta = \theta_0 + w_0\,(t-t_0) + \alpha\,(t-t_0)^2/2$

que en nuestro caso, tomando como instante inicial 0 s cuando se comienza a frenar la rueda, quedan como:

(1) $w = w_0 + \alpha \cdot t$
(2) $\theta = w_0 t + \alpha \cdot t^2$

De la ecuación (1) obtenemos que $\alpha = \dfrac{w - w_0}{t}$.

Como sabemos la rapidez en el instante inicial $t_0 = 0$ s ($w_0 = 80$ rpm $= 8\pi/3$ rad /s) y en el instante final t = 60 s (w = 0), basta sustituir en la expresión anterior para obtener $\alpha = -w_0/t = -0'14$ rad/s^2, comprobando como, en efecto, su valor nos sale negativo.

Podemos ahora calcular también el valor F_r de la fuerza de frenado.

A partir de la ecuación $-(F_r \cdot r) = I \cdot \alpha$ podemos despejar el módulo de la fuerza de fricción F_r con lo que:

$$F_r = -\frac{I\,\alpha}{r} = \frac{-20 \cdot (-0'14)}{0'4} = 7\ \text{N}$$

Cálculo del número de vueltas que dará hasta detenerse:

Podemos obtener dicho número N utilizando la ecuación (2) anterior para calcular el ángulo descrito (en radianes) en el intervalo de tiempo considerado (desde $t_0 = 0$ hasta t = 60 s). Después, teniendo en cuenta que cada vuelta equivale a 2π radianes, basta dividir por 2π para hallar N:

$N = \theta/2\pi = (w_0 t + \alpha\, t^2/2)/2\pi = 250'65/2\pi = 39'9$ vueltas

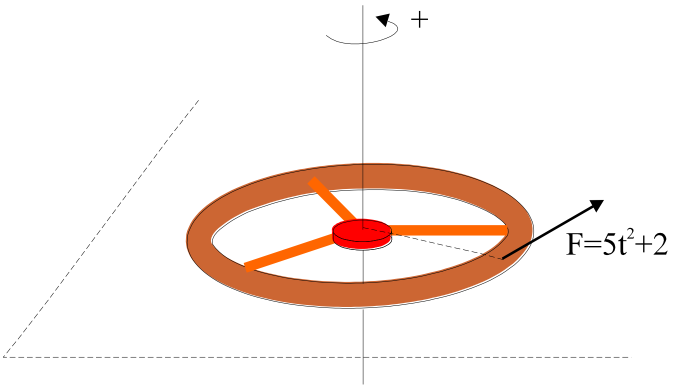
20. Un disco de 3 m de diámetro cuya masa es de 300 kg, gira a razón de 180 rev/min. Calculad:

a) La energía cinética del disco.
b) Cuántas vueltas dará desde que se le aplica "un par" de frenado de 800 N·m.
c) Tiempo que tardará en pararse, en el caso anterior.

sol: $E_c = 60\,000$ J; N = 12 vueltas; t = 8 s

21. Sobre una rueda de 20 cm de radio capaz de girar en torno a un eje fijo perpendicular que pasa por su centro y 5 Kg·m^2 de momento de inercia, actúa una fuerza tangencial dada por F=5t^2+2. ¿Cuánto valdrán la aceleración angular y la rapidez angular a los 2 segundos de comenzar a actuar dicha fuerza, si la rueda se encontraba inicialmente en reposo?

Sobre la rueda actúa la fuerza peso $\vec{P}$, la fuerza $\vec{F}_e$ ejercida por el eje y la fuerza tangencial $\vec{F}$ aplicada en la periferia, pero, al igual que en el ejercicio anterior, como el cuerpo solo puede girar alrededor de un eje fijo, nos interesará únicamente el efecto del momento de la fuerza $\vec{F}$ respecto al eje de giro, como causante de la aceleración angular.



Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación en forma escalar (tomando como sentido positivo el sentido en que se realiza la rotación) y teniendo en cuenta que, en este caso, M = r · F· sen 90º= r·F, nos queda que:

$M = I \cdot \alpha \rightarrow r \cdot F = I \cdot \alpha$ de donde podemos despejar la aceleración angular:

$\alpha = r \cdot F/I$ y sustituyendo F nos queda $\alpha = r\,(5t^2+2)/I = 0'2\,(5t^2+2)/5 = 0'2t^2 + 0'08$

Como vemos, se trata de una aceleración variable, es decir, cualquier punto del cuerpo realiza un movimiento circular y variado, de modo que a los 2 s la aceleración angular de cualquier punto de la rueda valdrá:

$\alpha = 0'2t^2 + 0'08 = 0'2 \cdot 4 + 0'08 = 0'88$ rad/s^2

¿Cómo podemos calcular la rapidez angular a los 2 s?

Dado que el movimiento es variado, no podemos aplicar las ecuaciones correspondientes a otro movimiento distinto, como sería el uniformemente acelerado, sino que hemos de proceder integrando a partir de la expresión: $\alpha = dw/dt$, considerando que en el instante $t_0 = 0$ la rapidez angular vale $w_0 = 0$.

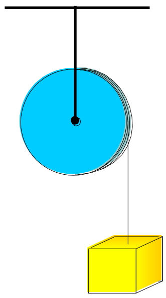
$$dw = \alpha \cdot dt \rightarrow \int_0^w dw = \int_0^t (0'2t^2 + 0'08)dt \rightarrow w = 0'2\frac{t^3}{3} + 0'08t$$

La expresión anterior nos da el valor de la rapidez angular w en cualquier instante t, de modo que sustituyendo t obtendremos el valor de w que se nos pide: w = 0’69 rad/s

22. Tenemos un volante de 80 cm de diámetro y 50 kg de masa, capaz de girar en torno a un eje perpendicular por su centro. Se desea saber:

a) Su aceleración angular si partiendo del reposo, tira de él una cuerda arrollada a su periferia, con una fuerza constante de 10 N.
b) La rapidez angular del volante y la de traslación de un punto de la cuerda al cabo de un tiempo de 10 s.
c) Longitud de cuerda desenrollada en ese tiempo.

sol: a) α = 0’49 rad/s^2 . b) w = 4’9 rad/s; v = 1’96 m/s. c) ΔL = 9’8 m.

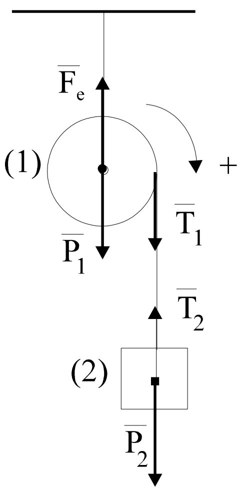


23. En la periferia de un disco de 5 kg de masa y 40 cm de radio, capaz de girar en torno a un eje que pasa por su centro, se enrolla una cuerda de la que pende un cuerpo de 1 kg.

Determinad la aceleración con que descenderá el cuerpo al dejarlo en libertad y el número de vueltas dado por el disco a los 10 s.

El dispositivo de la figura puede ser considerado como un sistema constituido por dos cuerpos: La polea (1) y el cuerpo suspendido (2). Al dejar dicho sistema en libertad, la polea comenzará a girar alrededor de un eje fijo y el cuerpo que pende de ella descenderá siguiendo una trayectoria rectilínea.

Analizad las fuerzas que actúan sobre cada uno de los dos cuerpos considerados y describid su movimiento.



a) Movimiento de la polea. Sobre la polea actúan tres fuerzas: la fuerza $\vec{F}_e$ que ejerce sobre el centro de la polea y hacia arriba el hilo que la sujeta al techo, el peso $\vec{P}_1$ de la polea y la tensión $\vec{T}_1$ o fuerza que hace la cuerda. Como el cdm de la polea no puede moverse (está sujeto por el eje) la resultante de estas tres fuerzas es nula, y por tanto: $\vec{F}_e = -(\vec{P}_1 + \vec{T}_1)$.

El único movimiento posible de la polea será el giro, y en consecuencia, de las fuerzas anteriores solo nos interesarán aquellas cuyo momento respecto del eje de giro de la polea no sea nulo. En este caso únicamente el momento de $\vec{T}_1$ no es 0 (las otras dos fuerzas están aplicadas directamente sobre el eje), de modo que si consideramos como sentido positivo el de la rotación de la polea, podemos aplicar la ecuación fundamental de la rotación para describir el cambio de movimiento de la misma, como: $M = I \cdot \alpha$ siendo I el momento de inercia de la polea respecto al eje considerado y α la aceleración angular de la polea.

Como $\vec{r}$ y $\vec{T}_1$ son perpendiculares, podemos expresar M como $T_1 \cdot r$ con lo que nos queda $T_1 \cdot r = I \cdot \alpha$, y dado que M es constante, la polea girará en torno a su eje con aceleración angular constante.

b) Movimiento del cuerpo suspendido. El cuerpo que pende de la polea describe un movimiento de trayectoria conocida (rectilínea) y para estudiar su movimiento podemos aplicar un tratamiento escalar. Las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo son: la tensión $\vec{T}_2$ que ejerce la cuerda hacia arriba y el peso $\vec{P}_2$ o fuerza con que la Tierra lo atrae. Si elegimos como sentido positivo el del movimiento, podemos expresar la ecuación fundamental de la dinámica como:

$F_{res\,t} = m_2 \cdot a_{2t}$. Como $a_n = 0$, escribiremos $a_{2t} = a_2$ y sustituyendo $F_{res\,t}$ por su valor (suma de las componentes escalares tangenciales de las fuerzas actuantes, con el signo que les corresponda), nos queda:

$P_2 - T_2 = m_2 \cdot a_2$

Como las fuerzas P_2 y T_2 son constantes, el cuerpo descenderá con un movimiento uniformemente acelerado, siendo la aceleración a_2 lo que hemos de determinar.

¿De qué factores cabe esperar que dependa la aceleración con que desciende el cuerpo que cuelga de la polea?

Parece claro que cuanto mayor fuese la masa m_2 del cuerpo que desciende y menor el momento de inercia de la polea (o su masa ya que $I = m_1 r^2/2$), mayor debería de resultar la aceleración a_2. Por otra parte, es evidente que si la masa de la polea fuese despreciable dicha aceleración coincidiría con la de la gravedad (el cuerpo caería libremente).

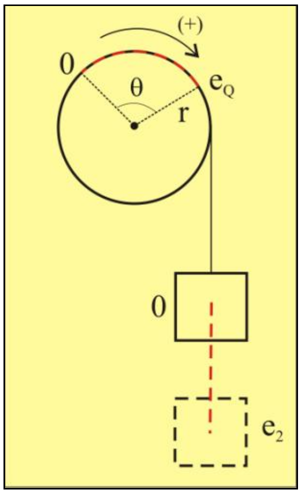
¿Cómo podríamos calcular la aceleración con que desciende?

Las ecuaciones que disponemos son, en principio, las siguientes:

Rotación de la polea: $T_1 \cdot r = I \cdot \alpha$
Traslación del cuerpo: $P_2 - T_2 = m_2 \cdot a_2$

En las ecuaciones anteriores tenemos 4 incógnitas. Sin embargo, si consideramos a la masa de la cuerda como despreciable, sabemos que $T_1 = T_2 = T$. Por otra parte, la aceleración angular de la polea y la aceleración con que desciende la masa m_2, no son independientes, ya que la cuerda toca punto a punto a la periferia de la polea y, en consecuencia, tanto como avance un punto Q cualquiera de dicha periferia lo hará el cuerpo, con la misma rapidez y aceleración tangencial.

En efecto, para el punto Q se ha de cumplir (ya que describe un movimiento circular) que $e_Q = \theta \cdot r$; $v_Q = w \cdot r$ y que $a_{tQ} = \alpha \cdot r$.



Por otra parte, si tomamos un origen de tiempos, al cabo de un tiempo t, el punto Q (tal y como se puede observar en la figura adjunta) se habrá desplazado un espacio e_Q (línea roja punteada), que deberá coincidir con el que se haya desplazado el cuerpo 2 en ese mismo tiempo. Es decir: $e_Q = e_2$, de modo que derivando en esta igualdad nos queda que: $v_Q = v_2$ y que: $a_{tQ} = a_{t2} = a_2$.

De acuerdo con lo anterior, la aceleración con que desciende el cuerpo también será: $a_2 = \alpha \cdot r$, disponiendo ahora de tres ecuaciones para resolver el problema:

$T \cdot r = I \cdot \alpha$
$P_2 - T = m_2 \cdot a_2$
$a_2 = \alpha \cdot r$

Teniendo en cuenta que el momento de inercia de la polea (considerada como un disco macizo) vale $I = m_1 r^2/2$, podemos *obtener finalmente la expresión correspondiente a la aceleración a_2 con que descenderá el cuerpo*.

Para ello sustituimos $I = m_1 r^2/2$ y $\alpha = a_2/r$ en la primera ecuación con lo que $T = m_1 a_2/2$
Introduciendo ahora la expresión de T obtenida, en la segunda de las ecuaciones y despejando la aceleración a_2, nos queda finalmente:

$$\boxed{a_2 = \frac{m_2}{m_2 + \frac{m_1}{2}} g} \rightarrow \quad a_2 = 2'86 \text{ m/s}^2$$

Analizad el resultado literal obtenido

Si analizamos el resultado anterior podemos darnos cuenta de que, además de ser dimensionalmente homogéneo (dimensiones de la aceleración en ambos lados de la igualdad), contempla las hipótesis de partida, como por ejemplo, que la aceleración será tanto mayor cuanto menor sea la masa m_1 de la polea y que cuando dicha masa sea despreciable frente a m_2, el cuerpo descenderá con aceleración g (la de la gravedad). Por otra parte, el resultado nos muestra también que la aceleración a_2 no depende del radio que tenga la polea.

Sugerid y llevar a cabo un procedimiento para determinar el número de vueltas dado por la polea en 10 s.

Ya hemos visto que la polea gira con aceleración angular constante $\alpha = a_2/r$. Ello nos permite aplicar las ecuaciones del movimiento circular uniformemente acelerado para calcular el ángulo $\Delta\theta$ girado por cualquier punto de su periferia en los 10 s. Como cada vuelta equivale a 2π radianes, bastará después dividir el desplazamiento angular obtenido entre 2π para obtener el número N de vueltas correspondiente.

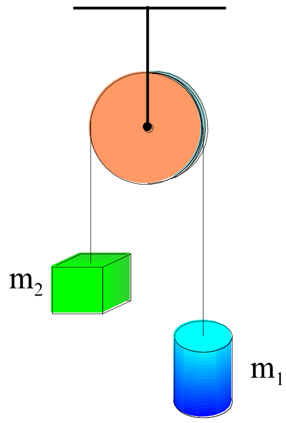
En efecto, considerando que en $t_0 = 0$, $w_0 = 0$, podemos escribir: $\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$

y teniendo en cuenta que $\alpha = \frac{a_2}{r}$, nos queda que: $\Delta\theta = a_2t^2/2r$

Sustituyendo ahora en $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$, nos queda finalmente que: $N = \frac{a_2 \cdot t^2}{4\pi r}$ = 56’9 vueltas

En el resultado anterior podemos ver que, cuanto mayor sea la aceleración con que cae el cuerpo, menor el radio de la polea y mayor el tiempo considerado, más vueltas dará la polea.

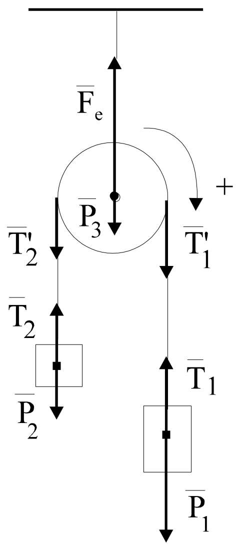
24. Dado el dispositivo de Atwood representado en la figura adjunta, en el que la polea puede ser considerada como un disco de 20 cm de radio y 1 kg de masa, determinad la aceleración de las masas 1 y 2 al dejarlo en libertad así como la tensión de la cuerda (m_1 = 7 kg y m_2 = 4 kg).



En este problema tenemos un sistema formado por tres cuerpos que al dejarlos en libertad se moverán. La polea al estar sujeta como se indica en la figura solo puede girar en torno a su eje. El peso del cuerpo 1 provocará un momento respecto del eje de giro de la polea que haría girar a ésta hacia nuestra derecha, mientras que el momento del peso del cuerpo 2 la haría girar hacia nuestra izquierda. Como el peso de 1 es mayor que el de 2 (y r es el mismo en ambos casos e igual al radio de la polea) el momento resultante hará girar la polea hacia nuestra derecha, de modo que la masa m_1 descenderá y la m_2 subirá.

Describid con el mayor detalle posible el movimiento de cada uno de los cuerpos.

Las fuerzas que actúan sobre cada uno de los cuerpos determinan su movimiento, aunque, al estar sujetos por medio de una cuerda inextensible, se cumplirá que la aceleración con que se desplazarán los cuerpos 1 y 2 será la misma para ambos y también coincidirá con la aceleración sobre la trayectoria de cualquier punto de la periferia de la polea, ya que se supone que dicha periferia y la cuerda se tocarán punto a punto (es decir, la cuerda no “resbala”). Si tomamos como sentido positivo el del movimiento (de traslación de los cuerpos y de giro de los puntos de la periferia de la polea) y analizamos lo que le ocurre a cada uno de los cuerpos por separado tendremos:



a) El cuerpo de masa m_1: Realizará un movimiento hacia abajo siguiendo una trayectoria recta sometido a la acción de $\vec{P}_1$ y $\vec{T}_1$. Dado que la aceleración normal es 0, podemos considerar únicamente las componentes escalares tangenciales de las fuerzas que actúan (con el signo que les corresponda), con lo que:

$F_{res\ t1} = m_1\ a_{t1} \rightarrow P_1 - T_1 = m_1\ a$ (1)

b) El cuerpo de masa m_2: Realiza un movimiento rectilíneo hacia arriba sometido a la acción de $\vec{T}_2$ y $\vec{P}_2$. La ecuación fundamental de la dinámica será:

$F_{res\ t2} = m_2\ a_{t2} \rightarrow T_2 - P_2 = m_2\ a$ (2)

En la ecuación anterior hemos tenido en cuenta que $\vec{T}_2$ va en el sentido de la trayectoria escogido como positivo mientras que $\vec{P}_2$ tiene sentido negativo, lo que hace que sus componentes escalares tangenciales sean, respectivamente, positiva y negativa.

c) La polea de masa m_3: Realiza un movimiento de rotación alrededor de su eje, sometida a la acción de las fuerzas $\vec{T}'_1$, $\vec{T}'_2$, $\vec{F}_e$ y $\vec{P}_3$. de las cuales $\vec{F}_e$ y $\vec{P}_3$ tienen momento nulo respecto del eje de rotación. La polea girará debido al momento resultante $M = I \cdot \alpha$. De acuerdo con el criterio de signos escogido, el momento de $\vec{T}'_1$ respecto del eje de rotación será positivo y el de $\vec{T}'_2$ negativo, de manera que el valor del momento resultante se podrá expresar como:

$T'_1 \cdot r - T'_2 \cdot r = I \cdot \alpha.$

Si consideramos la masa de la cuerda a cada lado de la polea despreciable, sabemos que $T'_1 = T_1$ y que $T'_2 = T_2$. Por otra parte, la aceleración de cualquier punto de la periferia de la polea (que, según hemos visto, es también a) se puede expresar como $a = \alpha \cdot r$ con lo que la ecuación anterior puede escribirse como:

$T_1 \cdot r - T_2 \cdot r = I \cdot a/r$

¿Por qué no podemos considerar iguales T'_1 *y* T'_2 *?*

Porque si lo fuesen, el momento resultante que actuaría sobre la polea sería nulo y ésta no podría variar su rapidez angular por lo que, si inicialmente estaba en reposo, debería de continuar estándolo.

Teniendo en cuenta ahora que el momento de inercia de un disco viene dado por $I = mr^2/2$, nos queda que:

$T_1 \cdot r - T_2 \cdot r = m_3 \cdot r \cdot a/2 \rightarrow T_1 - T_2 = m_3 \cdot a/2$ (3)

En este problema hemos de calcular la aceleración a con que desciende la masa m_1, que será, según hemos visto, la misma con que asciende m_2 o se mueven los puntos de la cuerda (y periferia de la polea).

¿De qué dependerá el valor de la aceleración a?

Podemos pensar que cuanto más grande sea m_1 y más pequeña sea m_2, mayor tendrá que ser la aceleración a. Por otra parte, la masa de la polea también tendrá que influir ya que cuanto mayor sea ésta mayor será la inercia que presentaría a la rotación (y menor sería la aceleración a). Además, es evidente que si las masas del cuerpo 2 y de la polea fuesen despreciables frente a la del cuerpo 1, éste descendería con una aceleración igual a la de la gravedad.

Obtened la expresión de la aceleración a *y comprobad si en ella se contemplan las hipótesis anteriores.*

Para determinar "a" podemos utilizar las ecuaciones que rigen el movimiento de cada uno de los cuerpos:

Traslación de m_1: $P_1 - T_1 = m_1\, a$ (1)
Traslación de m_2: $T_2 - P_2 = m_2\, a$ (2)
Rotación de la polea: $T_1 - T_2 = m_3 \cdot a/2$ (3)

A partir de las mismas *podemos obtener* que: $a = \dfrac{(m_1 - m_2)\,g}{m_1 + m_2 + \dfrac{m_3}{2}} \rightarrow a = 2'6\ m/s^2$

Analizando la expresión obtenida nos podemos dar cuenta en primer lugar de que es dimensionalmente homogénea (dimensiones de la aceleración LT^{-2} en ambos miembros de la igualdad) y que en ella se recogen la hipótesis anteriores. Así, podemos ver que la aceleración a aumentará cuando aumente la diferencia entre las masas m_1 y m_2, y viceversa, (como siempre a igualdad de los restantes factores) y que si m_2 y m_3 se hacen despreciables frente a m_1 ocurrirá que a = g.

También podemos darnos cuenta que si la masa m_3 de la polea se considerase despreciable (lo que es equivalente a decir que no presente inercia alguna a cambiar de rapidez angular), la expresión obtenida se transforma en otra, ya conocida, que manejamos en el capítulo de dinámica del punto, en un problema similar a este. Otra diferencia con aquel problema es que aquí la tensión de la cuerda en ambos lados de la polea es diferente, mientras que allí suponíamos que era la misma.

¿Cometimos una equivocación? ¿Qué cabe esperar que ocurra si en las expresiones de T_1 y T_2 introducimos la simplificación de considerar la masa de la polea despreciable?

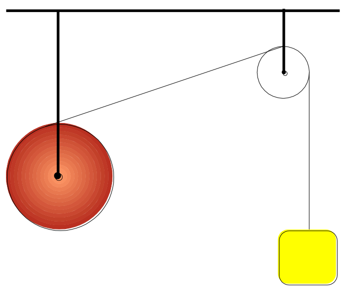
De acuerdo con las consideraciones anteriores, cabe esperar que las expresiones se transformen de forma que ambas tensiones sean iguales. En efecto, del sistema de tres ecuaciones anterior obtenemos que:

$$T_1 = m_1 (g - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m_3}{2}} g) \qquad T_2 = m_2 (g + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m_3}{2}} g)$$

y haciendo en ellas $m_3 = 0$ resulta $T_1 = T_2 = 2m_1 m_2 g/(m_1 + m_2)$

En adelante, pues, siempre que aparezca una polea **de masa despreciable** su I será 0 y no tendrá otro efecto en el sistema en que participa, que cambiar la dirección de la cuerda tensa que pase por ella.

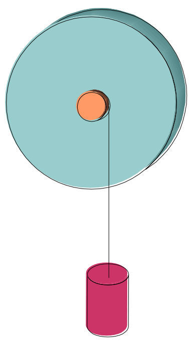
25. Una polea de 1 kg de masa y 5 m de radio, cuyo radio de giro vale 2'5 m, lleva arrollado un hilo inextensible y sin masa que pasa por otra polea, de masa despreciable y del que pende un cuerpo de 2 kg, como se indica en la figura. Determinad:



a) Aceleración angular de la polea.
b) Tensión del hilo.
c) Rapidez angular de la polea a los dos segundos de iniciar el movimiento.

sol: α = 1'78 rad/s^2; T = 2'2 N; w = 3'56 rad/s

26. Un disco de 0'5 kg de masa y 25 cm de radio, puede girar acoplado a un eje de masa despreciable y 2 cm de radio. En este eje se enrolla una cuerda de la que pende un cuerpo de 2 kg y se deja en libertad. Determinad:



a) Ángulo girado por el disco en 3 s.
b) Rapidez angular y lineal de un punto de la periferia del disco a los 10 s.

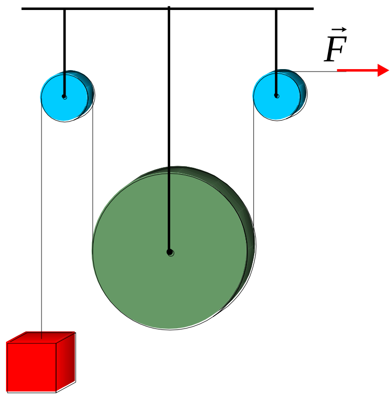
sol: a) $\Delta\theta$ = 281'25 rad. b) w = 187'5 rad/s; v = 31'2 m/s

27. Un volante gira por la acción de un cuerpo de 4 kg de masa, que cuelga del extremo de una cuerda arrollada a un eje de masa despreciable acoplado a aquel (véase la fig. del ejercicio anterior). Sabiendo que al soltar el cuerpo éste desciende 3 m en 2 s, determinad la tensión de la cuerda y el momento de inercia del volante (radio del eje = 20 cm).

sol: T = 34 N; I = 0’9 $kg \cdot m^2$

28. El sistema de la figura representa una polea fija que puede considerarse como un disco de 4 kg de masa y radio R, junto con otras dos poleas más pequeñas y de masas despreciables.

De un extremo de la cuerda se tira con una fuerza de 60 N y del otro pende un cuerpo cuya masa es de 5 kg. Calculad la aceleración del cuerpo y las tensiones de la cuerda a ambos lados de la polea grande.

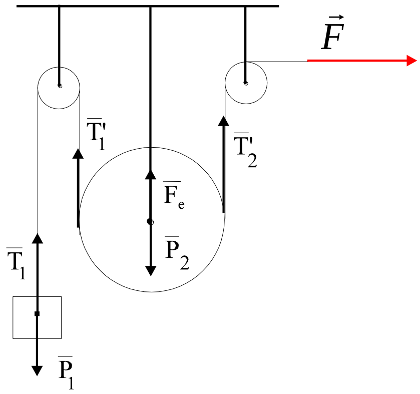


En este problema tenemos un sistema formado por cuatro cuerpos, pero de ellos hay dos, que son las poleas de masa despreciable, que, como ya hemos visto, el único efecto que producen en el sistema es modificar la dirección de la cuerda tensa. Por tanto, para determinar la aceleración que se nos pide en el enunciado, nos ocuparemos del movimiento del cuerpo (1) y de la polea (2). Para ello conviene que comencemos por *considerar qué fuerzas actúan sobre el cuerpo 1 y sobre la polea 2 y describir el movimiento de cada uno de estos cuerpos con el mayor detalle posible.*

Bajo la acción del peso P_1 = 50 N, el cuerpo 1 descendería y la polea giraría hacia la derecha. Por el contrario, la fuerza F = 60 N, haría subir al cuerpo 1 y que la polea girase hacia la izquierda. Como F es mayor que P_1, el cuerpo 1 ascenderá y la polea girará hacia la izquierda. <u>Si tomamos como sentidos positivos el del movimiento del cuerpo 1 y el del giro de la polea</u>, las ecuaciones que rigen el movimiento de cada cuerpo serán:

a) El cuerpo 1: Sobre él actúan las fuerzas $\vec{T}_1$ y $\vec{P}_1$ y se mueve sobre la trayectoria en el sentido escogido como positivo. Utilizando un tratamiento escalar a lo largo de la trayectoria, la ecuación fundamental de la dinámica aplicada al cuerpo 1 se expresa como:

$T_1 - P_1 = m_1 \cdot a$ (1)



b) El cuerpo 2: Sobre la polea, de radio r y momento de inercia I, actúan las fuerzas $\vec{T}'_1$ y $\vec{T}_2$ (ejercidas ambas por la cuerda) así como $\vec{F}_e$ ejercida por el eje y el peso de la polea $\vec{P}_2$. Como estas dos últimas están aplicadas en el eje, su momento respecto al mismo será nulo y no tendrán efecto alguno en la rotación de la polea. Por otra parte, si consideramos la masa de la cuerda despreciable, sabemos que $T'_1 = T_1$ y $T_2 = F$, con lo que:

$M_{res} = I \cdot \alpha \rightarrow F \cdot r - T_1 \cdot r = I \cdot \alpha$

Conviene tener también en cuenta que como la cuerda no "desliza" sobre la polea sino que en todo momento está en contacto punto a punto con la periferia de la misma, se cumplirá que la aceleración sobre la trayectoria de cualquier punto de dicha periferia, será la misma que la aceleración de cualquier punto de la cuerda inextensible y, por tanto, que la aceleración con que asciende el cuerpo 1. Ello nos permite expresar dicha aceleración como $a = \alpha \cdot r$. Si además consideramos a la polea como un disco macizo, sabemos que, en ese caso, $I = m_2 r^2/2$, con lo que podemos expresar la ecuación anterior como:

$F \cdot r - T_1 \cdot r = (m_2 r^2/2) \cdot a/r \rightarrow F - T_1 = m_2 \cdot r \cdot a/2$ (2)

En el problema se nos pide que calculemos la aceleración con que asciende el cuerpo 1, que, según acabamos de ver, coincidirá con la aceleración de cualquier punto de la cuerda o de la periferia de la polea.

Considerad, de acuerdo con las condiciones establecidas, qué factores cabe esperar que influyan y cómo lo harán, en el valor de dicha aceleración.

En primer lugar podemos razonar que cuanto mayor sea F y menor la masa del cuerpo 1 y menor la masa de la polea 2 (menor inercia), tanto mayor tendría que ser la aceleración con que el cuerpo 1 ascendería. Por otra parte, parece evidente que si F fuese menor que P_1, la aceleración tendría que salir negativa, es decir, el cuerpo 1 en esas condiciones descendería (partiendo de una situación inicial de reposo).

Sugerid y llevar a cabo un procedimiento para obtener la expresión de la aceleración que se nos pide.

Utilizando las dos ecuaciones anteriores:

Traslación del cuerpo 1: $T_1 - P_1 = m_1 \cdot a$ (1)
Rotación de la polea: $F - T_1 = m_2 \cdot r \cdot a/2$ (2)

Podemos obtener a partir de las mismas: $a = \dfrac{F - m_1 g}{m_1 + \dfrac{m_2}{2}} \rightarrow a = 1'43 \text{ m/s}^2$

Analizad el resultado literal obtenido

Podemos ver que el resultado, es dimensionalmente homogéneo (LT^{-2} en ambos miembros) y que en él se contemplan todas las hipótesis anteriores. Además, nos permite darnos cuenta de otros aspectos de interés, como por ejemplo, lo que ocurriría si la masa de la polea fuese despreciable. En ese caso, el momento de inercia de la polea también lo sería y la aceleración de ascenso del cuerpo sería la misma que si tirásemos directamente de él hacia arriba mediante un fuerza F:

$$a = (F - P_1)/m_1 \,.$$

También podemos plantearnos nuevos problemas, como, por ejemplo:

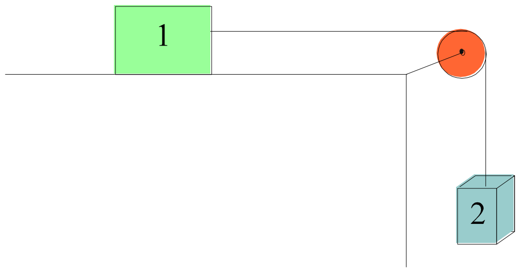
¿Cuánto debería valer F para que el cuerpo 1 suba con movimiento uniforme?

Para resolver esta nueva cuestión no tenemos mas que hacer a = 0 en el resultado literal obtenido y despejar F, con lo que resulta $F = m_1g = 50$ N.

Finalmente, el cálculo de las tensiones T_1 y T_2, no ofrece ninguna dificultad ya que basta con despejar de las ecuaciones (1) y (2), con lo que obtenemos:

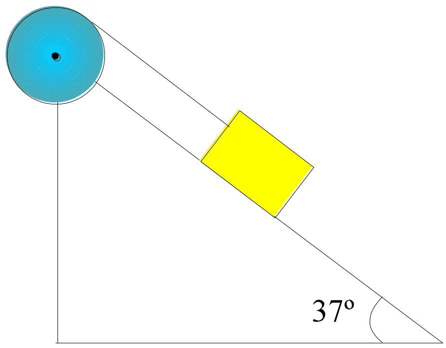
$T_1 = m_1\,(a+g) = 57'15$ N; $T_2 = F = 60$ N

29. Dado el dispositivo de la figura en el que m_1 = 4 kg, m_2 = 1 kg y la polea puede ser considerada como un disco de 2 kg de masa y 50 cm de radio, determinad la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda (suponiendo que el rozamiento sea despreciable y la cuerda inextensible).



sol: a =5/3 m/s^2 ; T_2 = 25/3 N y T_1 = 20/3 N

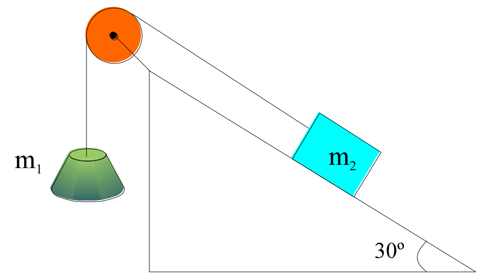
30. Un bloque de 5 kg de masa desliza a lo largo de un plano inclinado de 37° con el que presenta un coeficiente de fricción de 0'25. El bloque está unido a un hilo, inextensible, perfectamente flexible y de masa despreciable, enrollado en una polea que puede girar libremente como indica la figura.



Sabiendo que la polea tiene una masa de 20 kg, un radio de 0'2 m y que su radio de giro es de 0'1 m, determinad la aceleración con la que desciende el bloque y la tensión del hilo.

sol: a = 2 m/s^2; T = 10 N

31. Dado el dispositivo de la figura adjunta, se pide:



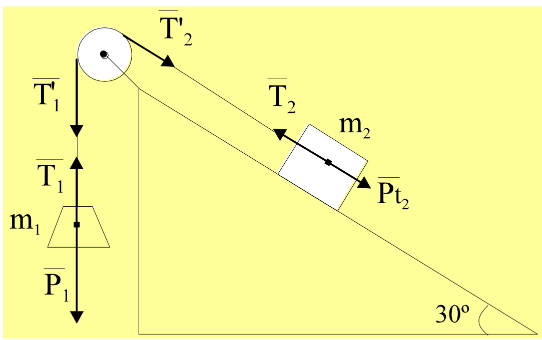
a) Aceleración del sistema.
b) Tensión de la cuerda.
c) Numero de vueltas que dará la polea en 3 s.

(Datos: masa de la polea 4 kg, radio de la polea 50 cm, m_1 = 5 kg, m_2 = 6 kg, μ = 0'1)

En este problema tenemos un sistema formado por dos bloques y una polea dispuestos como se indica en la figura y se nos pide con qué aceleración se moverán. Para resolver el problema conviene comenzar por *analizar primero la situación planteada estudiando las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo:*

Como la trayectoria es fija y conocida utilizaremos un tratamiento escalar considerando únicamente las fuerzas que actúan a lo largo de la trayectoria. Como sentido positivo escogeremos el sentido del movimiento de los bloques y de rotación de la polea, lo que nos lleva a plantearnos en primer lugar *en qué sentido se moverá el sistema partiendo de una situación inicial de reposo.*

Dado que la inercia de la polea y que la fuerza de rozamiento máxima de m_2 con el plano no dependen del sentido con que se mueva el sistema, podemos razonar que puesto que P_1 es mayor que la componente tangencial P_{t2} el sistema "intentará" desplazarse hacia la izquierda, por lo que la fuerza de rozamiento actuará en sentido descendente. Se trata esta de una reflexión previa esencial para resolver correctamente problemas en los que existan fuerzas de rozamiento, ya que el sentido de movimiento determinará el sentido de la fuerza de rozamiento y como ésta fuerza hay que tenerla en cuenta al calcular la fuerza resultante que actúa sobre el sistema, si nos equivocamos, el resultado de dicha fuerza resultante (y por tanto de la aceleración) será distinto del real. En la figura siguiente hemos representado esquemáticamente las fuerzas que actúan en la situación inicial de reposo.



Para resolver el problema introduciremos las simplificaciones habituales de suponer que se trata de una cuerda inextensible (lo cual hace que ambos bloques se muevan con la misma aceleración) y que su masa es despreciable (por lo que a ambos lados de la polea se cumplirá que $T_1 = T'_1$ y que $T_2 = T'_2$).

Tomando como sentidos positivos el de desplazamiento de las masas y el de rotación de la polea, analizaremos las fuerzas que rigen el movimiento de cada cuerpo cuando se deja el sistema en libertad y se inicia el movimiento:

a) Sobre el cuerpo de masa m_1 actúan la fuerza peso $\vec{P}_1$ y la tensión de la cuerda $\vec{T}'_1$ de manera que al aplicar la ecuación fundamental de la dinámica de la traslación nos queda:
$P_1 - T_1 = m_1 \cdot a$ (1)

b) Sobre el cuerpo de masa m_2 actúan la tensión de la cuerda $\vec{T}_2$, la componente tangencial de su peso $\vec{P}_{t2}$ y la fuerza de rozamiento $\vec{F}_r$ opuesta al movimiento (no representada en la figura anterior). Estas tres fuerzas son las que se ejercen a lo largo de la trayectoria, pero además actúan también la componente normal del peso $\vec{P}_n$ y la fuerza normal que ejerce el plano $\vec{R}$, aunque éstas se anulan entre si ya que al ser la trayectoria recta la componente normal del vector aceleración es nula. De acuerdo con ello, la ecuación fundamental de la dinámica de la traslación aplicada a este cuerpo se expresará como:

$T_2 - P_{t2} - F_r = m_2 \cdot a$ (2)

c) Sobre la polea, de masa m_3, actúan las tensiones ejercidas por la cuerda en ambos lados de la misma $\vec{T}_1$ y $\vec{T}'_2$, su peso $\vec{P}_3$ y la fuerza ejercida por el eje $\vec{F}_e$. Como las dos últimas están aplicadas en el propio eje, su momento respecto del mismo será nulo, con lo que la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación aplicada a la polea será:

$T'_1 \cdot r - T'_2 \cdot r = I \cdot \alpha \rightarrow T_1 \cdot r - T_2 \cdot r = I \cdot \alpha$ (3)

En el problema se nos pide que calculemos la aceleración "a" . Conviene que antes de operar se proceda a *realizar una reflexión cualitativa sobre los factores que pueden influir en dicha aceleración, tratando de avanzar cómo cabe esperar que lo hagan.*

Podemos razonar que cuanto mayor sea m_1 , menor m_2 y menor la inercia de la polea (y por tanto su masa si el radio no cambia) mayor tendrá que ser la aceleración. Por otra parte, es evidente, que si, por ejemplo, m_2 y m_3 fuesen nulas, m_1 debería de caer con la aceleración de la gravedad g. Además, conforme vaya aumentando la inclinación del plano (de 0 a 90º, cabe esperar que "a" vaya disminuyendo), etc.

¿Cómo podemos determinar la aceleración ?

Disponemos de tres ecuaciones que rigen el movimiento de cada cuerpo:

Traslación del cuerpo 1: $P_1 - T_1 = m_1 \cdot a$ (1)
Traslación del cuerpo 2: $T_2 - P_{t2} - F_r = m_2 \cdot a$ (2)
Rotación de la polea: $T_1 \cdot r - T_2 \cdot r = I \cdot \alpha$ (3)

Podemos tratar de obtener "a". despejando de la ecuación (1) o de la (2), pero desconocemos lo que vale la tensión de la cuerda en cada caso. El problema se podría solucionar expresando la ecuación (3) en función de la aceleración "a". Para ello hemos de tener en cuenta que como la cuerda no resbala sino que se toca con la polea punto a punto, $a = \alpha \cdot r$, con lo que la ecuación (3) queda como $T_1 \cdot r - T_2 \cdot r = I \cdot a/r$ y tenemos así un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que ya podemos *resolver*.

De la ecuación (1) despejamos $T_1 = P_1 - m_1 \cdot a$
De la ecuación (2) despejamos $T_2 = P_{t2} + F_r + m_3 \cdot a$

Sustituyendo ahora T_1 y T_2 en la tercera ecuación nos queda:

$(P_1 - m_1 \cdot a) \cdot r - (P_{t2} + F_r + m_3 \cdot a) \cdot r = I \cdot a/r$

Si identificamos la polea con un disco macizo su momento de inercia será $I = m_3 \cdot r^2/2$. Por otra parte, sabemos que $P_N = mg\cos\varphi$ y que $Fr = \mu \cdot mg\cos\varphi$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación anterior y despejando a, obtenemos:

$$a = \frac{P_1 - P_{t2} - F_r}{m_1 + m_2 + \frac{m_3}{2}} = \frac{m_1 g - m_2 g\,\mathrm{sen}\varphi - \mu m_2 g\cos\varphi}{m_1 + m_2 + \frac{m_3}{2}} = 1'14\,\frac{m}{s^2}$$

Si analizamos el resultado literal obtenido, podemos comprobar que es dimensionalmente homogéneo ($L \cdot T^{-2}$ en ambos miembros) y que, contempla las hipótesis que hicimos al comienzo. Así por ejemplo, vemos que, efectivamente, cuanto mayor sea m_1 y menores sean m_2 y m_3, la aceleración será mayor y que si $m_2 = m_3 = 0$, $a = g$. Además, si comparamos el resultado con el que se obtuvo en el capítulo de dinámica para un ejercicio similar (ved problema 24 de dinámica del punto) vemos que este se transforma en aquel sin más que considerar que la masa de la polea m_3 es despreciable (y por tanto no presenta inercia a variar su rapidez angular), que es precisamente la simplificación que hicimos allí.

¿*Cómo podemos determinar el número de vueltas N dadas por la polea a los 3 s de dejar el sistema en libertad*?

El número de vueltas se podrá obtener dividiendo el ángulo girado por la polea expresado en radianes entre 2π (que son los radianes que tiene una vuelta), es decir:

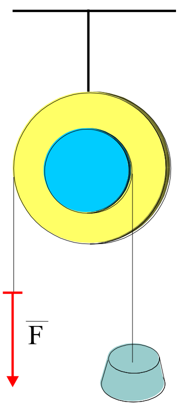
$N = \Delta\theta/2\pi$. Para calcular el ángulo recorrido bastará con hallar la aceleración angular mediante $a = \alpha \cdot r$ y calcular $\Delta\theta$ para un punto cualquiera de la periferia de la polea (que describirá un movimiento circular uniformemente acelerado de aceleración α). Así pues:

$\alpha = a/r = 1'14/0'5 = 2'28\ m/s^2$ y si tomamos $t_0 = 0$, $w_0 = 0$ y $\theta_0 = 0$, nos queda:

$\theta = \alpha t^2/2 = 2'28 \cdot 32/2 = 10'26$ rad, con lo que $N = 10'26/2\pi = 1'63$ vueltas.

32. La doble polea esquematizada en la figura adjunta tiene un radio de giro de 40 cm siendo su radio mayor de 50 cm y el menor de 20 cm.

Sabiendo que la masa de la polea es de 10 kg, determinad el valor F de la fuerza necesaria para que el cuerpo suspendido (de 4 kg de masa) ascienda con una aceleración de 1'5 m/s². ¿Cuál será la energía cinética de la doble polea a los 5 s de actuar $\vec{F}$ si inicialmente se encontraba en reposo?



En este caso tenemos un sistema formado por la doble polea que gira (y que designaremos como cuerpo 1) y un objeto suspendido que se traslada (cuerpo 2). Sobre cada uno de ellos actúan las fuerzas especificadas en la figura siguiente, y nuestro problema es determinar cuánto ha de valer F para que el cuerpo 1 ascienda con una cierta aceleración. Para ello comenzaremos por analizar el movimiento de cada uno de los cuerpos que forman el sistema:

Analizad el movimiento de cada uno de los cuerpos considerados

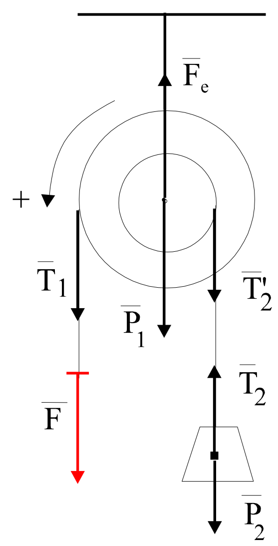
a) Sobre la doble polea, actúan las fuerzas $\vec{T}_1, \vec{T}'_2, \vec{P}_1$ y $\vec{F}_e$. Los momentos de la fuerza peso $\vec{P}_1$ y de la fuerza que hace el eje $\vec{F}_e$ respecto al eje de rotación son ambos nulos porque las dos fuerzas están aplicadas en el propio eje y, en consecuencia, solo tendrán efecto en la rotación los momentos de las fuerzas $\vec{T}_1$ y $\vec{T}'_2$ ejercidas por las cuerdas, que, como podemos apreciar en la figura, <u>tienen sentido contrario</u>. Como la trayectoria es fija y conocida, podemos aplicar un tratamiento escalar. Para ello escogeremos como positivo el del movimiento de rotación de la doble polea (hacia nuestra izquierda), con lo que la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación será: $T_1 \cdot R - T'_2 \cdot r = I \cdot \alpha$

Por otra parte, al ser la masa de las cuerdas despreciables $T_1 = F$ y $T'_2 = T_2$ con lo que la ecuación queda como:

$F \cdot R - T_2 \cdot r = I \cdot \alpha$

En la expresión anterior I es el momento de inercia de la doble polea, R el radio mayor y r el radio menor. (Démonos cuenta que, a diferencia de lo que ocurría en la máquina de Atwood, las distancias de las líneas de acción de las fuerzas al eje de giro no son iguales).

Dado que conocemos el radio de giro k, el momento de inercia de la doble polea respecto de su eje de giro, se puede evaluar como $I = m \cdot k^2$



Finalmente, hemos de considerar que la aceleración angular de la doble polea está relacionada con la aceleración con que asciende el cuerpo 2 mediante la expresión: $a_2 = \alpha \cdot r \rightarrow \alpha = a_2/r$ ya que la cuerda de la que pende dicho cuerpo toca punto a punto a la periferia de la polea de radio r.

Todo ello nos permite expresar la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación aplicada a la doble polea como:

$F \cdot R - T_2 \cdot r = m \cdot k^2 \cdot a_2/r$ (1)

b) Sobre el cuerpo 2, actúan la tensión $\vec{T}_2$ en sentido positivo y el peso $\vec{P}_2$ en sentido negativo, realizando un movimiento de traslación hacia arriba, con lo que, si aplicamos a dicho cuerpo la ecuación fundamental de la dinámica:

$T_2 - P_2 = m_2 \cdot a_2$ (2)

En el problema se nos pide que determinemos la fuerza F que será preciso realizar para que el cuerpo 2 ascienda con una determinada aceleración a_2.

Conviene que antes de operar reflexionemos sobre los factores que pueden influir en dicha fuerza.

Podemos pensar que cuanto mayor sea la aceleración a_2 con que queremos que ascienda el cuerpo 2 y mayor sea el momento de inercia de la doble polea ($I = m \cdot k^2$), mayor será el valor de F necesario. Podemos plantearnos también alguna condición límite evidente, como por ejemplo, que si el momento de inercia de la doble polea y la masa m_2 fuesen nulas F debería de resultar 0, etc.

Elaborad y aplicad una estrategia para obtener la fuerza pedida.

A partir de las ecuaciones:

$F \cdot R - T_2 \cdot r = m \cdot k^2 \cdot a_2/r$ (1)
$T_2 - P_2 = m_2 \cdot a_2$ (2)

podemos despejar F, con lo que nos queda:

$$F = \frac{m_1 k^2 \cdot \frac{a_2}{r} + m_2 (g + a_2) r}{R} = \frac{10 \cdot 0'4^2 \cdot \frac{1'5}{0'2} + 4(10 + 1'5) \cdot 0'2}{0'5} = 42'5\,N$$

Para calcular la energía cinética de la polea, dado que no se traslada, bastará aplicar la expresión de la energía cinética de rotación de un sólido rígido alrededor de un eje:

$E_c = Iw^2/2$. Para ello *hemos de hallar w en el instante que se nos pide (t = 5s).*

Como se trata de un movimiento de rotación, podemos calcular el valor de la aceleración angular como:

$\alpha = a_2/r = 1'5/0'2 = 7'5$ rad/s^2

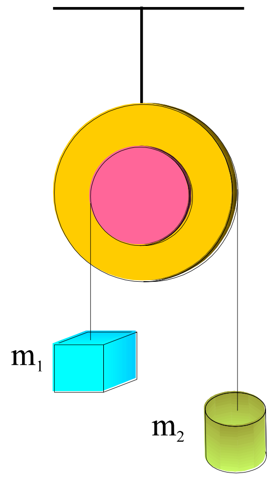
Sustituyendo ahora en la ecuación del movimiento circular uniformemente acelerado (considerando $w_0 = 0$ y $t_0 = 0$), nos queda:

$w = w_0 + \alpha (t - t_0) = \alpha \cdot t = 7'5 \cdot 5 = 37'5$ rad/s

y la energía cinética $Ec = Iw^2/2 = 10 \cdot 0'4^2 \cdot 37'5^2/2 = 1125$ J

33. En el dispositivo de la figura adjunta se muestran dos cuerpos cuyas masas son m_1 = 8 kg y m_2 = 6 kg, que cuelgan de una doble polea cuyos radios son 0’1 m y 0’2 m. Sabiendo que el momento de inercia de la doble polea vale 5 kg·m^2. Determinad:

a) Aceleración de cada uno de los cuerpos.
b) Tensiones de las cuerdas.
c) Momento cinético del sistema respecto del eje de giro.



En este caso tenemos un sistema formado por una doble polea y dos masas, que podemos considerar como puntuales y que cuelgan de la misma como se muestra en la figura. Cuando se deje el sistema en libertad (partiendo del reposo) la polea girará en torno a su eje a la vez que uno de los cuerpos subirá y el otro bajará. El problema nos pide calcular la aceleración con que se moverá cada uno, para lo cual hemos de analizar el movimiento de los cuerpos que forman el sistema. A este respecto, una primera cuestión que hemos de plantearnos es *hacia dónde se moverán los cuerpos.*

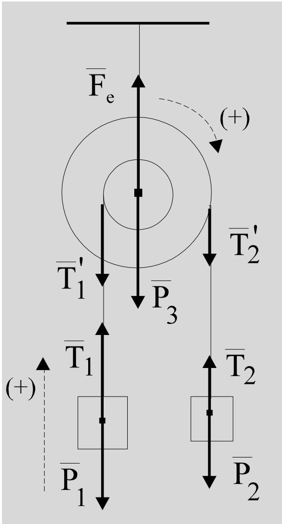
Un primer análisis de la situación, podría llevarnos a pensar que, como el peso P_1 del cuerpo 1 es mayor que el peso P_2 del cuerpo 2, el movimiento se producirá de forma que el primero baje y el segundo suba, en cuyo caso la doble polea giraría hacia la izquierda. Sin embargo, conviene recordar que lo que provoca cambios en el movimiento de rotación de un sólido no son las fuerzas sino los momentos de dichas fuerzas respecto del eje de rotación, por tanto, para determinar el sentido de giro que se producirá deberemos comparar los momentos de las fuerzas y no los valores de dichas fuerzas.

En este caso al haber dos radios diferentes, no es inmediato determinar qué momento va a ser mayor, por lo que tendremos que proceder a calcularlos:

Módulo del momento de la fuerza $\vec{P}_1$ respecto del eje: $M_1 = P_1 \cdot r = 80 \cdot 0'1 = 8$ N·m
Módulo del momento de la fuerza $\vec{P}_2$ respecto del eje: $M_2 = P_2 \cdot R = 60 \cdot 0'2 = 12$ N·m

Como vemos, aunque P_1 es mayor que P_2, el momento de esta última fuerza respecto del eje de giro es mayor, por lo que la polea girará hacia la derecha y no hacia la izquierda. Tomaremos como sentido positivo el de traslación de los cuerpos y el de giro de la polea (hacia la derecha).

A continuación, analizaremos las fuerzas que actúan sobre cada uno de los cuerpos que forman el sistema, considerando, como siempre, que las cuerdas son inextensibles y sus masas despreciables.



a) Sobre m_1 actúan $\vec{P}_1$ y $\vec{T}_1$ de modo que la ecuación fundamental de la dinámica de la traslación aplicada a dicha masa resulta ser:

$T_1 - P_1 = m_1 \cdot a_1$ (1)

b) Sobre m_2 actúan $\vec{P}_2$ y $\vec{T}_2$ y la ecuación fundamental de la dinámica de la traslación aplicada a dicha masa vendrá dada por:

$P_2 - T_2 = m_2 \cdot a_2$ (2)

c) Sobre la doble polea, de masa m_3, actúan las fuerzas $\vec{T}'_1$, $\vec{T}'_2$, su peso $\vec{P}_3$ y la fuerza ejercida por el eje $\vec{F}_e$ pero estas dos últimas están aplicadas en el eje y su momento respecto del mismo es nulo. No así el momento de $\vec{T}'_1$ (que será negativo de acuerdo con el criterio de signos adoptado) ni el de $\vec{T}'_2$ (que será positivo), de modo que la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación aplicada a la doble polea será:

$T'_2 \cdot R - T'_1 \cdot r = I \cdot \alpha$ y si tenemos en cuenta que, por ser la masa de las cuerdas despreciable $T'_1 = T_1$ y $T'_2 = T_2$, nos queda:

$T_2 \cdot R - T_1 \cdot r = I \cdot \alpha$ (3)

¿Cómo podemos calcular la aceleración con que se moverá cada uno de los cuerpos?

Tenemos tres ecuaciones en las cuales se hallan presentes las aceleraciones que nos interesa determinar. No obstante, antes de proceder a realizar ninguna operación, nos interesa tener en cuenta que, en este caso, la aceleración sobre la trayectoria con que ascenderá el cuerpo 1 <u>no será la misma</u> que la aceleración con que descenderá el cuerpo 2, ya que $a_1 = \alpha \cdot r$ y $a_2 = \alpha \cdot R$, es decir, dicha aceleración resulta ser mayor para aquel cuya cuerda está enrollada a una polea de mayor radio.

Las ecuaciones de que disponemos son pues:

Traslación de m_1: $T_1 - P_1 = m_1 \cdot \alpha \cdot r$
Traslación de m_2: $P_2 - T_2 = m_2 \cdot \alpha \cdot R$
Rotación de m_3: $T_2 \cdot R - T_1 \cdot r = I \cdot \alpha$

De ellas podemos obtener la aceleración angular con que gira la doble polea sin más que despejar T_1 y T_2 de la primera y segunda ecuaciones y sustituir en la tercera, con lo que nos queda:

$T_1 = m_1 \cdot \alpha \cdot r + P_1$

$T_2 = P_2 - m_2 \cdot \alpha \cdot R$

$(P_2 - m_2 \cdot \alpha \cdot R)\cdot R - (m_1 \cdot \alpha \cdot r + P_1)\cdot r = I \cdot \alpha$ y despejando la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{P_2 \cdot R - P_1 \cdot r}{m_2 R^2 + m_1 r^2 + I} \rightarrow \alpha = \frac{6 \cdot 0'2 - 8 \cdot 0'1}{6 \cdot 0'2^2 + 8 \cdot 0'1^2 + 5} = 0'075 \text{ rad/s}^2$$

Si *analizamos el resultado anterior* nos podemos dar cuenta de que es dimensionalmente homogéneo (T^{-2} en ambos miembros), de que el signo de la aceleración (positivo) es coherente con el criterio de signos adoptado (positivo en el sentido de giro de la polea), que cuanto mayor sea la diferencia entre los momentos de las fuerza peso, mayor será α, que a mayor inercia de la polea menor α y que si $P_1 \cdot r$ fuese mayor que $P_2 \cdot R$ la aceleración angular saldría negativa (es decir, la doble polea, partiendo del reposo, giraría en sentido contrario).

El cálculo de las restantes aceleraciones es inmediato ya que basta sustituir α en las expresiones de a_1 y a_2, con lo que se obtiene:

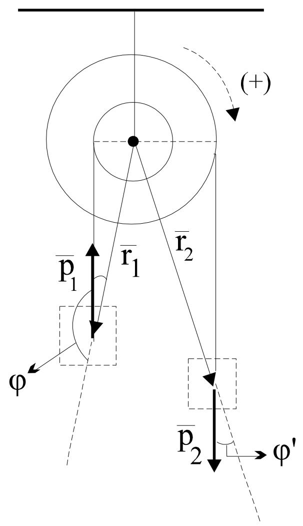
$a_1 = \alpha \cdot r = 0'075 \cdot 0'1 = 0'0075 \text{ m/s}^2$
$a_2 = \alpha \cdot R = 0'075 \cdot 0'2 = 0'015 \text{ m/s}^2$

Análogamente para *calcular la tensión en cada una de las cuerdas*, basta con sustituir los resultados que tenemos en las ecuaciones correspondientes:

$T_1 = m_1 \cdot \alpha \cdot r + P_1 = 80'06$ N
$T_2 = P_2 - m_2 \cdot \alpha \cdot R = 59'91$ N

Podemos plantearnos ahora la determinación del momento cinético del sistema respecto del eje de giro.

Para ello tendremos que calcular el momento cinético de cada uno de los cuerpos de que consta el sistema respecto de dicho eje y sumarlos, es decir:



$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3$ en donde cada uno de los momentos cinéticos vendrá dado por:

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1$$
$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2$$
$$\vec{L}_3 = I \cdot \vec{w}$$

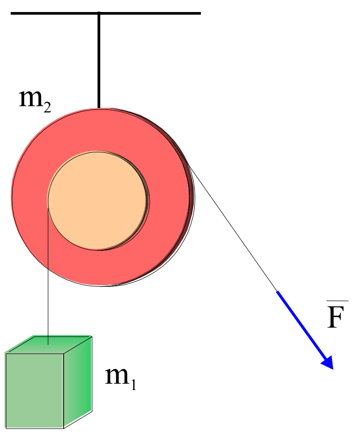
El vector $\vec{L}_1$ será perpendicular al plano del papel y dirigido hacia adentro, e igual dirección y sentido tendrán los vectores $\vec{L}_2$ y $\vec{L}_3$, por lo que para calcular su suma bastará con obtener los módulos correspondientes y sumarlos:

$L_1 = r_1 \cdot m_1 v_1 \cdot sen\varphi = m_1 v_1 \cdot r = m_1 w \cdot r^2$
$L_2 = r_2 \cdot m_2 v_2 \cdot sen\varphi' = m_2 v_2 \cdot R = m_2 w \cdot R^2$
$L_3 = I \cdot w$

Sumando obtenemos $L = m_1 w \cdot r^2 + m_2 w \cdot R^2 + I \cdot w = 5'32\ w$, es decir, el valor del momento cinético total del sistema respecto del eje de rotación, dependerá del valor que tenga la rapidez angular en el instante en que queramos conocerlo.

34. La doble polea de la figura adjunta tiene un radio de giro de 24 cm y una masa m_2 = 5 kg.

Sabiendo que el radio grande vale R = 40 cm y el pequeño vale r = 20 cm, determinad el valor de F para que el cuerpo de masa m_1 = 10 kg, partiendo del reposo, alcance una rapidez de 2 m/s tras ascender 4 m.

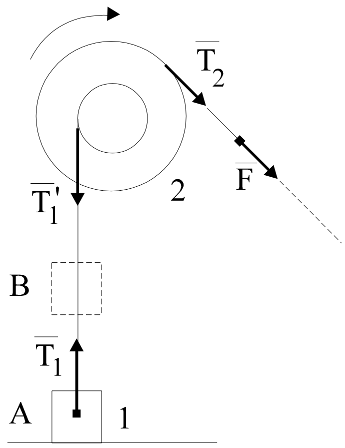


Considerando el sistema formado por la doble polea y el cuerpo de masa m_1, vemos que para que dicho cuerpo ascienda se ejerce la fuerza exterior representada en la figura, la cual hará girar a la polea hacia la derecha con lo que la cuerda se arrollará sobre el disco pequeño y el cuerpo ascenderá. Naturalmente, cuanto mayor sea la fuerza ejercida tanto mayor será la aceleración con que ascenderá el cuerpo. En el problema se pide qué valor hemos de dar a F para conseguir que la rapidez del cuerpo sea de 2 m/s después de ascender 4 m partiendo del reposo, o lo que es equivalente, para que suba con una cierta aceleración.

¿Cómo podemos determinar el valor de la fuerza que se nos pide?

Una posibilidad sería calcular la aceleración que ha de llevar el cuerpo (a partir de los datos de su movimiento) y después proceder a plantear las ecuaciones de la dinámica que rigen el movimiento del cuerpo y de la polea, tal y como hemos venido haciendo en problemas anteriores.

Otro método de resolución, que es el que vamos a desarrollar aquí, sería mediante consideraciones de trabajo y energía, haciendo uso del principio de conservación de la energía, igualando el trabajo resultante que se realiza sobre el sistema al cambio de energía cinética que éste experimenta y despejando F de la expresión final que obtengamos. Para ello consideraremos como estado inicial A cuando comienza a ascender el cuerpo (nivel 0 de energía potencial gravitatoria) y como estado final B cuando haya recorrido una distancia d = 4 m y lleve una rapidez de v_{1B} = 2 m/s.



a) Aplicando Wres = ΔEc al cuerpo 1, tendremos:

$$W_{res\,A}^{\;\;B} = \Delta Ec_{1A}^{\;B} = Ec_{1B} - Ec_{1A}$$

Como sobre dicho cuerpo solo actúan la tensión y el peso nos queda:

$$W_{P\,A}^{\;B} + W_{T\,A}^{\;B} = Ec_{1B} - Ec_{1A}\ .$$

Teniendo en cuenta que la fuerza peso es conservativa ($W_{P\,A}^{\;B} = -\Delta Ep_A^B$), que el trabajo realizado por la tensión será $T_1 \cdot d \cdot \cos 0^o = T_1 \cdot d$ y que la rapidez inicial $v_{1A} = 0$, la expresión anterior queda como:

$$-Ep_B + T_1 \cdot d = Ec_{1B} \rightarrow T_1 \cdot d - m_1 g\, d = \frac{1}{2} \cdot m_1 v_{1B}^{\;2} \ (1)$$

b) Para la polea (cuerpo 2), al tratarse de una rotación pura $W_{rot\,A}^{\;\;B} = Ec_{rot2\,B} - Ec_{rot2\,A}$

Teniendo en cuenta que el trabajo de rotación se puede calcular en este caso como M·Δθ, siendo M el momento resultante que actúa sobre la polea (respecto del eje de giro), y que inicialmente esta se encuentra también en reposo, podemos escribir:

$M \cdot \Delta\theta = Ec_{rot2\,B}$ y como $M = T_2 \cdot R - T_1 \cdot r$ y $Ec_{rot2\,B} = Iw^2/2 = m_2 k^2 w^2/2$, nos queda:

$(T_2 \cdot R - T_1 \cdot r) \cdot \Delta\theta = m_2 k^2 w^2/2$. Si consideramos la masa de la cuerda como despreciable $T_2 = F$, obtenemos finalmente:

$(F \cdot R - T_1 \cdot r) \cdot \Delta\theta = m_2 k^2 w^2/2$ (2)

¿Cómo podemos calcular el valor de F que se nos pide?

Una posibilidad es despejar directamente de la ecuación (2) con lo que:

$$F = \frac{\dfrac{m_2 k^2 w^2}{2 \cdot \Delta\theta} + T_1 \cdot r}{R}\ .$$

Para poder hallar finalmente F *necesitamos conocer* T_1 , Δθ y w *o bien poder expresar todo ello en función de otros datos conocidos*.

Sabemos que Δθ = d/r (ya que d coincidirá con la longitud de cuerda enrollada en la periferia de la polea y ésta con el arco descrito por un punto de la misma) y que $w = v/r = v_{1B}/r$. Por otra parte utilizando la ecuación (1) podemos expresar T_1 como:

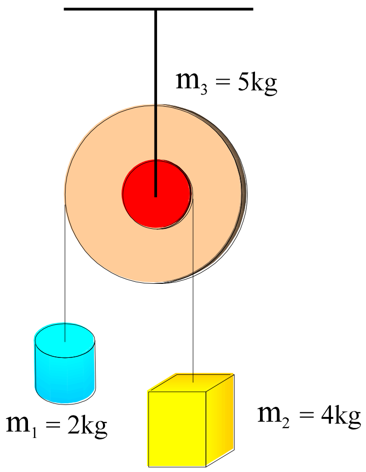
$$T_1 = m_1 g + \frac{m_1 v_{1B}{}^2}{2d}$$

con lo que: $$F = \frac{\dfrac{m_2 k^2 w^2}{2\cdot\Delta\theta} + T_1\cdot r}{R} = \frac{\dfrac{m_2 k^2 v_{1B}{}^2}{2\cdot d\cdot r} + (m_1 g + \dfrac{m_1 v_{1B}{}^2}{2d})\cdot r}{R} = 172\text{'}5\ \text{N}$$

Podemos ahora *analizar el resultado literal obtenido*, comprobando que además de ser dimensionalmente homogéneo (MLT^{-2} en ambos miembros), contempla, por ejemplo, que cuanto mayor sea la rapidez que queramos conseguir (manteniendo constantes los demás factores) más fuerza se precisará. También nos podemos dar cuenta de la influencia del radio R y comprobar que cuanto mayor sea éste menor será la fuerza necesaria (siempre a igualdad de los restantes factores). Finalmente recoge casos límite como, por ejemplo, que si m_1 y m_2 fuesen despreciables también lo sería la fuerza F necesaria, etc.

Resolved el problema utilizando un tratamiento cinemático-dinámico y comprobad que se obtiene el mismo resultado.

35. Dada la doble polea de la figura determinad la rapidez de cada uno de los cuerpos cuando el 1 haya descendido 5 m. El radio grande es R = 2 m y el radio pequeño r = 0'5 m. Considérese que la polea tiene un radio de giro de $\frac{2}{\sqrt{2}}$ m.

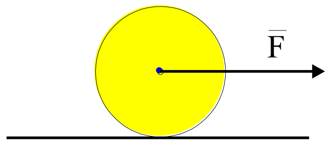


sol: v_1 = 4'57 m/s; v_2 = 1'15 m/s; w = 2'29 rad/s

36. Analizad el movimiento de un cilindro macizo de masa m y radio r que se encuentra en reposo sobre un plano horizontal, con el que presenta un coeficiente de fricción μ, al actuar una fuerza horizontal F aplicada en su eje de simetría de revolución.

Para realizar el análisis que se pide podemos comenzar por preguntarnos acerca de *qué es lo que ocurriría si llevásemos a cabo en la práctica la experiencia que se plantea en el enunciado del problema.*

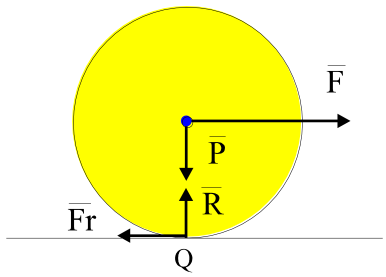
La realización de la experiencia nos mostraría que:



- Por pequeña que sea la fuerza $\vec{F}$, existe desplazamiento (el cilindro rueda), lo que no sucedería si el cuerpo fuese un prisma (con caras planas, sin capacidad de rodar) ya que no existiría aceleración mientras que no se superase el valor máximo de la fuerza de rozamiento.

- Hasta cierto valor crítico de F, el cilindro rueda sin deslizar. Eso significa que, a lo largo de una vuelta completa del cilindro un punto cualquiera de su periferia tiene contacto una sola vez con un único punto del plano (decimos que la periferia toca "punto a punto" en el plano). Sin embargo, a partir de ese valor crítico, se observa que el cilindro no solo rueda sino que también desliza, es decir, mientras el cilindro da una vuelta, cada punto de su periferia toca a más de un punto del plano.

¿Cómo podemos interpretar estos hechos?



Al aplicar la fuerza $\vec{F}$ en el centro de masas, si el cuerpo se encuentra inicialmente en reposo sobre una superficie plana, se produciría un movimiento de traslación en la misma dirección y sentido que $\vec{F}$, pero entonces, el punto de contacto con el plano deslizaría y, como existe rozamiento, se producirá una fuerza de fricción que se opone a que el punto Q del cilindro en contacto con el plano deslice, tal y como se indica en la figura adjunta.

¿Cuáles son las ecuaciones que rigen el movimiento del cilindro en las circunstancias descritas?

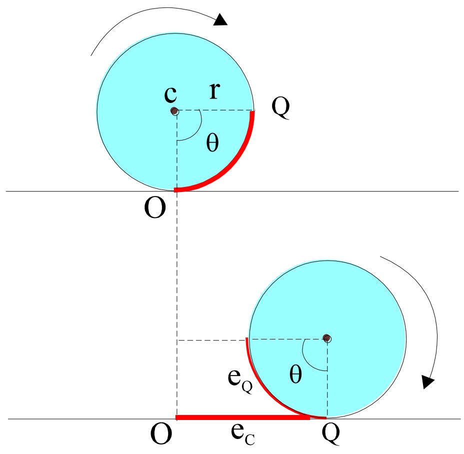
Como la trayectoria es fija y conocida, podemos aplicar un tratamiento escalar y si escogemos como sentido positivo el del movimiento de traslación y el del giro del cilindro, podemos escribir:

Traslación del centro de masas: $F - F_r = m \cdot a_C$ (1)
Rotación alrededor del eje que pasa por del centro de masas: $F_r \cdot r = I \cdot \alpha = mr^2 \alpha/2$ (2)

Para poder continuar el análisis debemos distinguir previamente si estamos aplicando o no una fuerza superior a la crítica.

a) *Determinad la aceleración del centro de masas, la aceleración angular y la fuerza de rozamiento (en función de la fuerza F aplicada, la masa m y el radio r del cilindro), para el caso de que éste se mueva bajo la acción de una fuerza con un valor menor o igual al crítico.*

En este caso el cilindro rueda sin deslizar y ello implica que cuando un punto Q de la periferia haya girado un ángulo θ, y, por tanto, haya descrito un arco $e_Q = \theta \cdot r$, el centro de masas se habrá desplazado sobre su trayectoria el mismo espacio $e_C = e_Q$. Así pues, en estas condiciones, podremos expresar la posición del centro de masas e_C en cualquier instante como $e_C = \theta \cdot r$ y derivando obtener su rapidez $v_C = w \cdot r$ y su aceleración $a_C = \alpha \cdot r$.



Utilizando esta última ecuación junto con las (1) y (2) anteriores, podemos determinar lo que se nos pide.

Traslación del centro de masas: $F - F_r = m \cdot a_C$ (1)
Rotación respecto eje de simetría: $F_r \cdot r = mr^2 \alpha/2$ (2)
Rodadura sin deslizamiento: $a_C = \alpha \cdot r$ (3)

Tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (a_C, α y F_r) que a continuación vamos a resolver:

De (3) obtenemos $\alpha = a_C/r$ que sustituida en (2) nos proporciona $F_r = ma_C/2$ Introduciendo ahora esta expresión en la ecuación (1) nos queda:

$F = 3ma_C/2$ de donde:

$$\mathbf{a_C = 2F/3m} \text{ y finalmente } \mathbf{F_r = F/3} \text{ y } \boldsymbol{\alpha} \mathbf{= 2F/3mr}$$

Conviene que nos detengamos en *analizar brevemente estos resultados.*

- Por pequeña que sea F existirá a_C y el cilindro se moverá.

- El valor de la fuerza de rozamiento que actúa depende del valor de F de manera que si fuésemos aplicando fuerzas cada vez mayores, F_r iría también aumentando. Sin embargo, aunque no hay ningún inconveniente a que podamos aumentar F indefinidamente, no ocurre lo mismo con la fuerza de rozamiento ya que, como sabemos, ésta no puede superar un valor máximo. Ello hace que si vamos aumentando F lleguemos a un valor critico F_{crit} para el que la F_r tomará su valor máximo ($F_{r\,max} = \mu \cdot N = \mu \cdot mg$).

- Para valores de F superiores a F_{crit}, la fuerza de rozamiento no podrá aumentar y, en consecuencia como $M = F_r \cdot r = I \cdot \alpha$, tampoco podrá aumentar la aceleración angular α. Sin embargo, lo que sí aumentará será la aceleración del centro de masas a_C, de modo que en dichas condiciones $a_C > \alpha \cdot r$ por lo que en un tiempo dado el desplazamiento del centro de masas sobre el plano será mayor que el arco descrito por un punto de la periferia del cilindro, es decir, habrá más traslación que rotación y el cilindro además de rodar deslizará sobre el plano.

¿Cuál será la máxima aceleración a_C posible sin deslizamiento?

Corresponderá al caso de que $F_r = F_{r\,max}$ y como $a_C = 2F/3m = 2·3F_r/3m$, obtenemos que $a_{Cmax} = 2·3F_{r\,max}/3m = 2\mu·g$, que corresponderá a una fuerza actuante:

$F = 3·F_{rmax} = 3\mu· mg$

b) *Determinad la aceleración del centro de masas, la aceleración angular y la fuerza de rozamiento (en función de la fuerza F aplicada, la masa m y el radio r del cilindro), para el caso de que éste se mueva bajo la acción de una fuerza con un valor superior al crítico.*

En este caso, como acabamos de ver, habrá también deslizamiento por lo que la ecuación $a_C = \alpha· r$ no se cumplirá, pero en cambio la fuerza de rozamiento F_r será conocida porque presentará su valor máximo. Las ecuaciones serán pues:

$F - F_r = m \cdot a_C$
$F_r \cdot r = mr^2 \alpha/2$
$F_r = \mu·mg$

De las ecuaciones anteriores podemos obtener fácilmente: $\mathbf{a_C} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{m}} - \mu\mathbf{g}$ y $\boldsymbol{\alpha = 2\mu·g/r}$

Analizados estos resultado concluimos que cuando la fuerza F es tan grande que provoca rodadura con deslizamiento, la a_C coincide con la aceleración con que se trasladaría un cuerpo si en lugar de ser cilíndrico fuese prismático (sin capacidad para rodar).

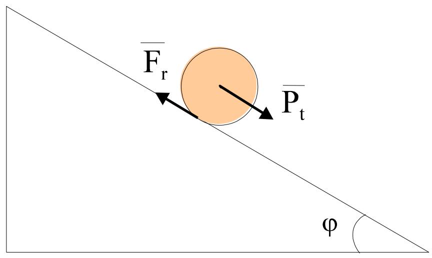
¿Quiere esto decir que para valores de F superiores al crítico dará lo mismo que el cuerpo sea un cilindro que un prisma rectangular de la misma masa?

No, puesto que aunque los centros de masas de ambos se trasladen con la misma aceleración, el cilindro posee también un movimiento de rotación que el prisma no tiene. En términos de trabajo y energía, podríamos decir que, mientras en el caso del prisma rectangular el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento supondría una disminución de la energía cinética del cuerpo, que se transformaría íntegramente en energía interna, en el caso del cilindro una parte del trabajo realizado por la fuerza de rozamiento se emplea en aumentar la energía cinética de rotación (si no deslizara y solo rodara **todo** el trabajo de rozamiento se emplearía en aumentar la energía cinética de rotación).

Este ejercicio nos permite comprender el funcionamiento de las ruedas en los vehículos de tracción y las enormes ventajas en cuanto a la utilización de la energía que supuso la invención de la rueda.

37. Analizad el movimiento de un cilindro macizo de masa m y radio r que se deja en reposo sobre un plano inclinado de pendiente φ con el que presenta un coeficiente de fricción μ.

Si realizásemos las experiencias correspondientes podríamos darnos cuenta de que, por pequeño que fuese el ángulo, el cilindro descendería rodando por el plano. Por el contrario, si se tratase de un cuerpo prismático, como sabemos, no descendería hasta que el plano presentase un cierto ángulo mínimo.



En el caso del cilindro si vamos aumentando el ángulo φ de inclinación del plano llegaremos a un valor (que llamaremos ángulo crítico φ_C a partir del cual el cilindro comienza a deslizar además de rodar). Se trata pues, de un problema similar al anterior pero ahora:

$F = P_t = mg\ sen\varphi$ y $F_{r\ max} = \mu \cdot N = \mu \cdot P_n = \mu\ mg\ cos\varphi$.

Para resolver el problema comenzaremos por escribir las ecuaciones que rigen el movimiento del cilindro. Para ello escogeremos, como venimos haciendo, como sentido positivo de la trayectoria el de traslación del cilindro y en cuanto al giro, el sentido de rotación del mismo. En dichas condiciones las ecuaciones serán:

$P_t - F_r = m \cdot a_C$ (1)
$F_r \cdot r = I \cdot \alpha = mr^2 \alpha/2$ (2)

A continuación profundizaremos en lo que sucede con las ecuaciones anteriores según el ángulo φ sea inferior o superior al crítico:

a) Para $\varphi \leq \varphi_C$ el cilindro rueda sin deslizamiento y se cumplirá $a_C = \alpha \cdot r$, que junto con las ecuaciones anteriores nos dará el sistema:

(1) $P_t - F_r = m \cdot a_C$
(2) $F_r \cdot r = mr^2 \alpha/2$
(3) $a_C = \alpha \cdot r$

A partir de dichas ecuaciones es fácil obtener:

$$\mathbf{a_C = 2gsen\varphi/3}; \quad \mathbf{F_r = mgsen\varphi/3} \ \text{ y } \ \mathbf{\alpha = 2gsen\varphi/3r}$$

Nos detendremos, ahora, en *analizar estos resultados*:

- Por pequeña que sea la inclinación del plano el cilindro desciende ya que para cualquier φ mayor que 0, habrá a_C.

- Al aumentar φ aumenta a_C pero también lo hace la fuerza de rozamiento F_r por lo que existirá un valor de φ para el cual F_r será el máximo posible, esto es $F_{r\,max} = \mu$ mg cosφ. Para ángulos mayores se producirá rodadura acompañada de deslizamiento.

¿Cómo podemos determinar el ángulo crítico?

Para $\varphi = \varphi_{crit}$ se cumplirá que la fuerza de rozamiento alcanzará su valor máximo, con lo que de acuerdo con la expresión F_r = mgsenφ/3, podremos escribir:

$F_{r\,max} = mg\ sen\varphi_{crit}/3 \rightarrow \mu\ mg\ cos\varphi = mg\ sen\varphi_{crit}/3 \rightarrow$ **$\mathbf{tg\ \varphi_{crit} = 3\mu}$**

b) Para $\varphi > \varphi_C$ el cilindro rueda con deslizamiento de forma que $a_C > \alpha\cdot r$ y $F_r = F_{r\,max}$. Las ecuaciones serán ahora:

$P_t - F_r = m \cdot a_C$
$F_r \cdot r = mr^2\alpha/2$
$F_r = \mu$ mg cosφ

de donde concluimos que $a_C = \dfrac{P_t - F_r}{m} = \dfrac{mgsen\varphi - \mu mgcos\varphi}{m}$ de donde:

$\mathbf{a_C = g\ (sen\varphi - \mu\ cos\varphi)}$ y como $\alpha = 2\ F_r/mr \rightarrow$ **$\mathbf{\alpha = 2\mu g\ cos\varphi/r}$**

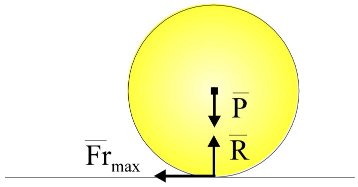
De los resultados anteriores podemos concluir que cuando el ángulo φ es superior al crítico la aceleración del centro de masas tiene el mismo valor que la aceleración que le correspondería a un cuerpo de forma prismática (sin capacidad de rodar) que se dejase sobre el mismo plano (recordemos que, sin embargo, desde el punto de vista energético no dará lo mismo).

38. Estudiad el movimiento de una esfera maciza de masa m y radio r que se lanza con una rapidez v_0 (solo de traslación), a lo largo de un plano horizontal con el que presenta un coeficiente de rozamiento μ.

Al lanzar una esfera (sin que se encuentre inicialmente girando) sobre un plano horizontal en dirección tangente a dicho plano, se observa que al principio desliza y rueda pero, a medida que pasa el tiempo, la rapidez con que se traslada va disminuyendo mientras que su rapidez de giro aumenta hasta que, en un cierto instante, comienza a rodar sin deslizar y el movimiento se mantiene uniforme, es decir, tanto w como v_C se mantienen constantes y cumpliéndose que $v_C = w \cdot r$. En realidad este último efecto no se produce tal y como lo hemos enunciado. La experiencia lo que nos muestra es que, en cualquier caso, el movimiento de la esfera se va debilitando hasta que finalmente ésta se para. Sin embargo, ello no es debido a un fallo en los razonamientos sino a que ningún cuerpo es totalmente rígido (como estamos suponiendo en este capítulo) y entre la superficie de la esfera y el plano se producen deformaciones que complicarían el análisis del problema pero cuyo resultado será frenar el cuerpo. De hecho ese efecto al que nos referimos es tanto más acusado cuanto más rígido es el material de la esfera y del plano.

A continuación vamos a proceder a realizar un estudio cinemático-dinámico del movimiento de la esfera.

Al lanzar la esfera todos sus puntos tiene únicamente movimiento de traslación (no se encuentra inicialmente girando) con una rapidez v_0. El punto que se encuentra en contacto con el plano horizontal deslizará pues con dicha rapidez, pero debido a ese deslizamiento se produce una fuerza de rozamiento que será la máxima ($F_{r\,max} = \mu \cdot N = \mu\, mg$), en el sentido especificado en la figura.



Si escogemos como sentido positivo el del movimiento de la esfera tanto en la traslación como en la rotación:

Traslación del centro de masas: $-F_{r\,max} = m \cdot a_C$
Rotación del cuerpo: $M = I \cdot \alpha$

siendo M el momento de la fuerza de rozamiento máxima (ya que tanto $\vec{P}$ como $\vec{R}$ tienen momento nulo), respecto del eje de giro. El valor de M será positivo ($\vec{M}$ tiene el mismo sentido positivo que $\vec{w}$). Así pues tendremos el sistema:

$-F_{r\,max} = m \cdot a_C$
$M = F_{r\,max} \cdot r = I \cdot \alpha = 2mr^2\alpha/5$

A partir de estas ecuaciones obtenemos:

$a_C = -F_{r\,max}/m$; $\alpha = 5\,F_{r\,max}/2mr$ y considerando que $F_{r\,max} = \mu\, mg$ nos queda:

$$\mathbf{a_C = -\mu g} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\alpha = 5\mu g/2r}$$

Podemos ahora *analizar los resultados obtenidos, prestando atención particular a los signos que les acompañan.*

- Como vemos, la aceleración del centro de masas es constante y negativa, lo que implica que la rapidez inicial del mismo irá decreciendo de manera lineal conforme la esfera avance: $v_C = v_{C0} + a_C \cdot t \rightarrow v_C = v_{C\,0} - \mu g \cdot t$

- La aceleración angular también es constante, pero positiva, lo que implica que la rapidez angular con que gira la esfera alrededor de su centro de masas irá aumentando de manera lineal: $w = w_0 + \alpha \cdot t \rightarrow w = (5\mu g/2r) \cdot t$

Si la rapidez v_C va disminuyendo desde $v_{C\,0}$ mientras que w va aumentando desde 0, llegará un instante t' en el que se cumplirá que $v_C = w \cdot r$. En ese instante, como sabemos, la esfera solo rueda. Al no haber deslizamiento ni tampoco ninguna fuerza resultante exterior, deja de haber fuerza de rozamiento con el plano (si no fuese así la rapidez angular de la esfera aumentaría sin límite, lo cual es absurdo) y tanto v_C como w permanecen constantes (suponemos que tanto la esfera como el plano son sólidos totalmente rígidos).

¿En qué instante la esfera adquiere el movimiento de rodadura puro?

Igualando las expresiones de v_C y w·r tenemos $v_{C\,0} - \mu g \cdot t' = 5\mu g\, t'/2 \cdot$ y de aquí

$$t' = 2v_{C0}/7\mu g$$

El resultado obtenido nos muestra que cuanto mayor fuese la rapidez inicial v_{C0} y menor el coeficiente de fricción, tanto más tiempo tardaría en aparecer la rodadura pura. Incluso, si no hubiese rozamiento la rodadura pura no aparecería nunca.

¿Para qué valor de v_C aparecerá la rodadura pura?

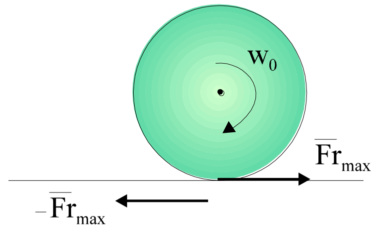
Para resolver esta cuestión bastará sustituir t' en la expresión de v_C con lo que:

$v_C = v_{C\,0} - \mu g \cdot t' = v_{C\,0} - \mu g \cdot 2v_{C0}/7\mu g = 5v_{C0}/7$

39. Estudiad el movimiento de una esfera maciza de masa m y radio r que se deja girando con rapidez angular w_0 (sin traslación), sobre una superficie horizontal con la que presenta un coeficiente de rozamiento μ.

Al dejar la esfera, que se encuentra girando, sobre el plano, se aprecia que avanza pero inicialmente rueda más que se traslada, porque "resbala" sobre el plano. Por tanto, rueda y desliza. Sin embargo, a medida que transcurre el tiempo, se observa que la rapidez de traslación va aumentando mientras que la de rotación va disminuyendo, hasta que, en cierto instante, comienza a rodar sin deslizar y el movimiento se mantiene uniforme, es decir, tanto v_C como w se mantienen constantes y se cumple que $v_C = w \cdot r$ (al igual que sucedía en el problema anterior).

Para realizar un estudio del movimiento de la esfera, conviene que, partiendo de las consideraciones anteriores, se proceda a *obtener las ecuaciones que regirán el movimiento de la misma.*



Tomaremos como sentidos positivos los de traslación y rotación de la esfera. Por otra parte, hemos de tener en cuenta que al dejar la esfera sobre el plano $v_C = 0$ pero existe una rapidez angular inicial w_0, de manera que el punto de la esfera en contacto con el plano **"**intentará**"**[1] deslizar hacia la izquierda pero el rozamiento existente tratará de impedirlo ejerciéndose una fuerza de rozamiento sobre la esfera como la que se muestra en la figura.

Esta fuerza se interpreta como la "reacción" que el plano ejerce sobre la esfera como consecuencia de la "acción" que la esfera ejerce sobre el plano. De no existir rozamiento la esfera deslizaría (patinaría) sin aparecer sobre ella fuerza alguna y permanecería en el lugar que la dejásemos girando con rapidez angular constante.

Por otra parte, al haber deslizamiento, la fuerza de rozamiento presentará su valor máximo ($F_{r\ max} = \mu \cdot N = \mu\ mg$). El momento de la misma respecto del eje de rotación de la esfera será negativo (porque el vector $\vec{M}$ tiene, en este caso, sentido contrario a $\vec{w}$, oponiéndose a la rotación). Las ecuaciones que rigen el movimiento de traslación y de rotación de la esfera serán, pues, las siguientes:

Traslación: $F_{r\ max} = m \cdot a_C$
Rotación: $-(F_{r\ max} \cdot r) = I \cdot \alpha = 2mr^2\alpha/5$

A partir de la dos ecuaciones anteriores se obtiene: $a_C = F_{r\ max}/m$; $\alpha = -5\ F_{r\ max}/2mr$
y considerando que $F_{r\ max} = \mu\ mg$ nos queda:

$$\mathbf{a_C = \mu g \quad y \quad \alpha = -5\mu g/2r}$$

Podemos ahora *analizar los resultados obtenidos, prestando atención particular a los signos que les acompañan.*

-Si μ vale 0, no existirán ni a_C ni α y, como ya hemos señalado, la esfera permanecerá rodando donde se haya dejado.

- Existe una aceleración a_C constante y positiva que hará que conforme transcurra el tiempo, la v_C, que inicialmente era 0, vaya aumentando linealmente de acuerdo con la ecuación: $v_C = v_{C\,0} + a_C \cdot t \rightarrow v_C = \mu g \cdot t$

- La aceleración angular también es constante, pero negativa, lo que implica que la rapidez angular con que gira la esfera alrededor de su centro de masas irá disminuyendo desde su valor inicial w_0 de manera lineal según: $w = w_0 + \alpha \cdot t \rightarrow w = w_0 - 5\mu g/2r \cdot t$

Si la rapidez v_C va aumentando desde 0 mientras que w va disminuyendo desde w_0, llegará un instante t' en el que se cumplirá que $v_C = w \cdot r$. En ese instante, como sabemos, la esfera toca punto a punto en el plano y solo rueda. Al no haber "intención" de deslizamiento,

[1] Atención: "intentará", es solo una forma de hablar (por eso lo entrecomillamos) . Por supuesto el cilindro no tiene ninguna "intención" de hacer nada.

deja de haber fuerza de rozamiento con el plano (si no fuese así la rapidez v_C de la esfera aumentaría sin límite, lo cual es absurdo) y tanto v_C como w permanecen constantes (suponemos que tanto la esfera como el plano son sólidos totalmente rígidos).

Obtened el valor de t' y el valor de w para los cuales se produciría la rodadura pura.

Para evaluar t' basta con utilizar la expresión $v_C = w \cdot r$ sustituyendo t por t' y despejando con lo que:

$\mu g \cdot t' = (w_0 - 5\mu g\, t'/2) \cdot r$ y de aquí

$$t' = 2w_0/7\mu g$$

El resultado obtenido nos muestra que cuanto mayor fuese la rapidez inicial w_0 y menor el coeficiente de fricción, tanto más tiempo tardaría en aparecer la rodadura pura. Incluso, si no hubiese rozamiento la rodadura pura no aparecería nunca (ya hemos señalado que la esfera permanecería girando en el lugar en que se hubiese dejado). Para hallar el valor de w para el cual comienza la rodadura pura bastará sustituir t' en la expresión de w con lo que: $w = w_0 - 5\mu g/2r \cdot t' = w_0 - (5\mu g/2r) \cdot 2w_0/7\mu g = 2w_0/7$

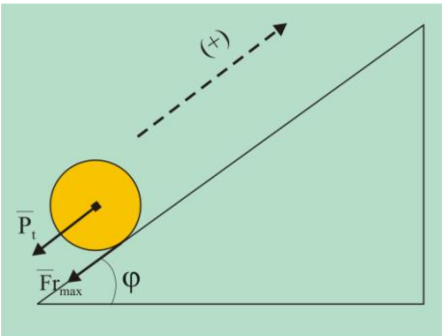
¿Qué diferencia hay en la fuerza de rozamiento con el suelo, entre un vehículo (con ruedas) movido porque es empujado desde fuera y otro que lo hace gracias a un motor?

En el primer caso la fuerza de rozamiento se opone a la traslación, mientras que en el segundo tiene la misma dirección y sentido que ésta. (Ved justificación en este mismo problema y anteriores).

40. Estudiad el movimiento de un cilindro de masa m y radio r que se lanza, en traslación, desde la base de un plano inclinado un ángulo φ con rapidez inicial v_0 (coeficiente de fricción μ).

Al lanzar el cilindro se aprecia que asciende por el plano si bien se traslada más que rueda y, por tanto, se está produciendo una rodadura con deslizamiento. A medida que asciende, la rapidez de traslación disminuye mientras que la de rotación aumenta . Llegará un instante en el que se cumplirá que $v_C = w \cdot r$. A partir de dicho instante, se observa que el cilindro sigue ascendiendo pero sin deslizar y su v_C y w van disminuyendo hasta que el cilindro se para y ambas valen 0.

Al lanzar el cuerpo con una rapidez de traslación v_0, sobre los puntos en contacto con el plano inclinado actuará una fuerza de rozamiento que se opondrá al deslizamiento de éstos, sin conseguirlo, por lo que tomará su valor máximo $F_{r\,max}$.



El momento de la fuerza de rozamiento hará que el cilindro comience a girar hacia la derecha y escogiendo como sentidos positivos los de traslación y rotación del cilindro, podemos *establecer las ecuaciones que rigen el movimiento del mismo*

Si tenemos en cuenta que ahora, a lo largo de la trayectoria, además de la fuerza de rozamiento actúa la fuerza $\vec{P}_t$ componente tangencial del peso, la ecuación que rige la traslación del centro de masas será: $-P_t - F_{r\,max} = m\,a_C$

La fuerza de rozamiento, por otra parte, es la única cuyo momento respecto al eje de rotación no es nulo, sino que será positivo y valdrá: $M = F_{r\,max} \cdot r = I \cdot \alpha$

De las dos ecuaciones anteriores obtenemos:

$$a_C = -g\,(\text{sen}\varphi + \mu\cos\varphi) \quad \text{y} \quad \alpha = 2\mu g\cos\varphi/r$$

Analizad los resultados obtenidos y razonad en qué instante se producirá la rodadura pura y cuanto valdrá v_C en ese momento.

Como vemos la v_{C0} irá disminuyendo con una a_C constante mientras que w irá aumentando desde 0 con α constante. Las ecuaciones cinemáticas correspondientes serán:

$v_C = v_{C0} - g\,(\text{sen}\varphi + \mu\cos\varphi)\cdot t$
$w = 2\mu g t\cos\varphi/r$

y en cierto instante t' se cumplirá que $v_C = w \cdot r$ (rodadura pura) de modo que:

$v_{C0} - g\,(\text{sen}\varphi + \mu\cos\varphi)\cdot t' = (2\mu g t'\cos\varphi/r)\cdot r$ de donde podemos despejar t' que resulta:

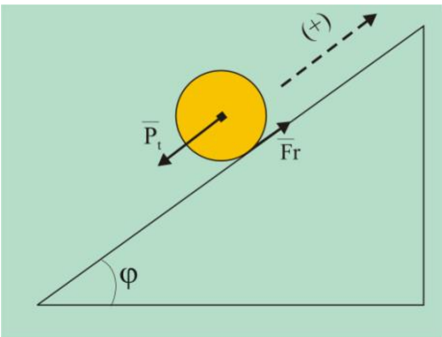
$$t' = v_{C0}/g\,(\text{sen}\varphi + 3\mu\cos\varphi)$$

En ese instante t' el centro de masas se trasladará con $v'_C = v_{C0} - g\,(\text{sen}\varphi + \mu\cos\varphi)\cdot t'$ y sustituyendo t':

$$v'_C = v_{C_0} - \frac{g\cdot(sen\,\varphi + \mu\cdot\cos\varphi)\cdot v_{C_0}}{g\cdot(sen\,\varphi + 3\mu\cdot\cos\varphi)} \;\rightarrow\; v'_C = \frac{2\cdot v_{C_0}}{3 + \mu\cdot tg\varphi}$$

¿Qué ocurrirá a partir de ese momento?

A partir del instante t' desaparecerá la $F_{r\,max}$ actuante pero como existe P_t que disminuye v_C pero no altera la w, el cilindro **"**intentará**"** rodar más que trasladarse pero esto significa deslizar (patinar) y como existe un coeficiente de fricción, se producirá una fuerza de rozamiento F_r que se opondrá a ello, actuando sobre el cilindro en el mismo sentido en que éste se traslada. A partir de esta posición se tratará de una rodadura pura y *las ecuaciones que regirán el movimiento serán:*



Para la traslación del centro de masas: $-P_t + F_r = m\,a_C$
Para la rotación en torno al eje de simetría: $-(F_r \cdot r) = I \cdot \alpha = (mr^2/2)\cdot \alpha$
y se cumplirá que $a_C = \alpha \cdot r$

De las ecuaciones anteriores obtenemos que: $a_C = -2g\,\text{sen}\varphi/3$ y $\alpha = -2g\,\text{sen}\varphi/3r$

¿Cómo podemos determinar el tiempo que tardará en detenerse el cilindro?

Las expresiones de la aceleración obtenidas nos muestran que el centro de masas se mueve con aceleración constante y negativa lo que nos indica que su rapidez disminuirá linealmente con el tiempo. Si, por comodidad, tomamos nuevos orígenes de espacio y de tiempo escogiendo $e_0 = 0$ y $t_0 = 0$ en la posición e instante en que la fuerza de rozamiento cambia de sentido, la ecuación que nos da v_C será:

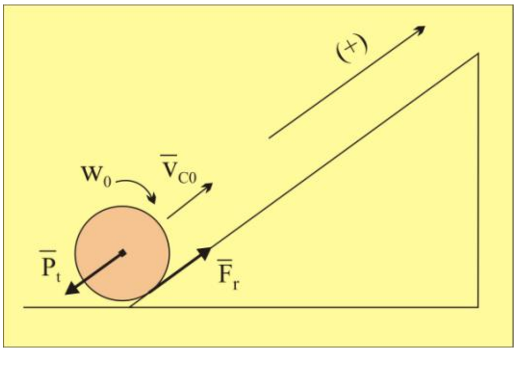
$v_C = v'_C - (2g\,\text{sen}\varphi/3)\cdot t$ y se detendrá cuando $v_C = 0$ es decir $0 = v'_C - (2g\,\text{sen}\varphi/3)\cdot t$ de donde obtenemos $t = 3v'_C/2g\,\text{sen}\varphi$ como el tiempo que tardará en detenerse (contado desde el instante en que empezó la rodadura pura).

41. Un cilindro macizo, de 2 kg de masa y 50 cm de radio, asciende rodando y sin deslizar, por un plano inclinado de 30^0. Determinad la altura h hasta la que llegará (medida sobre la base del plano), sabiendo que en dicha base la rapidez de su centro de masas era de 4 m/s.

Para resolver el problema comenzaremos por *realizar un estudio cualitativo de la situación, analizando las fuerzas que actúan y las ecuaciones que van a regir el movimiento.*

En primer lugar, hemos de tener en cuenta que para que el cilindro ascienda rodando sin deslizar, es necesario suponer (aunque no se diga explícitamente en el enunciado), que el centro de masas del cuerpo en el momento en que está en la base del plano ya posee una rapidez inicial $v_{C\,0}$ tal que $v_{C0} = w_0 \cdot r$, es decir, que ya rueda sin deslizar.

En principio, sobre el cilindro actúan las fuerzas peso $\vec{P}$ y la componente normal $\vec{R}$ de la fuerza ejercida por el plano. Como $\vec{R}$ se anula con $\vec{P}_n$, podemos suponer que la fuerza resultante sobre el cilindro será $\vec{P}_t$. Ésta fuerza, que actúa sobre el centro de masas del cilindro, solo producirá una aceleración del mismo a_C, que hará que v_{C0} vaya disminuyendo. Pero en cuanto esto empezara a suceder se cumpliría que v_C sería menor que $w_0 \cdot r$, es decir, que la periferia del cilindro giraría más aprisa de lo que se trasladaría su centro de masas, produciéndose un deslizamiento.



Sin embargo, como hay rozamiento, en el mismo momento en que la periferia del cilindro **“**intenta**”** deslizar empujando al plano hacia atrás, se produce una fuerza de rozamiento que empuja el cuerpo hacia adelante y que se opone al deslizamiento a costa de disminuir (debido al momento de dicha fuerza respecto del eje de giro) la rapidez angular del cilindro.

De esta forma se cumple que $v_C = w \cdot r$ mientras el cilindro ascienda, lo cual explica que este solo ruede hasta pararse, tal y como confirman las observaciones experimentales. Si llevamos a cabo un tratamiento escalar tomando como positivos los sentidos de traslación y rotación, tendremos que:

Traslación: $- P_t + F_r = m \cdot a_C$
Rotación: $- (F_r \cdot r) = I \cdot \alpha$

Observemos que, al no haber deslizamiento, F_r no tomará su valor máximo y además $a_C = \alpha \cdot r$, lo que nos permite obtener:

$$a_C = -2g\text{sen}\varphi/3$$

y concluir que el centro de masas del cilindro lleva un movimiento uniformemente acelerado, de manera que su rapidez irá disminuyendo linealmente desde v_{C0} hasta 0 en el instante en que alcance la máxima altura h sobre la base del plano. La fuerza de rozamiento que se dará es $F_r = mg\text{sen}\varphi/3$ y analizando este resultado vemos que si el ángulo φ fuera tal que el valor de la F_r necesaria superase a la F_{rmax}, no se podría dar este movimiento (la fuerza de rozamiento nunca puede superar su valor máximo) y existiría deslizamiento (rodaría más que se trasladaría).

¿Cómo podemos calcular la altura que alcanzará el cilindro sobre la base del plano?

Una posibilidad es escoger la base del plano como origen de espacios (ver figura) y $t_0 = 0$ el instante en que el cilindro se encuentra en ese punto. A continuación aplicar las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado para obtener la posición "e" en el instante en que se pare y finalmente tener en cuenta que, según se puede ver en la figura, $h = e \cdot \text{sen}\varphi$. En efecto:

$v_C = v_{C0} + a_C \cdot t$
$e = v_{C0} \cdot t + a_C t^2/2$

En el momento que alcance la altura máxima la rapidez será nula, luego haciendo $v_C = 0$ en la primera ecuación podemos despejar t y sustituir en la segunda para obtener el espacio:

$e = -\dfrac{v_{C_0}^2}{2a_C} = \dfrac{3v_{C_0}^2}{4g\text{sen}\varphi}$ y como $h = e \cdot \text{sen}\varphi$, obtenemos finalmente $h = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{v_{C_0}^2}{g} = 1'2$ m

Si analizamos el resultado literal obtenido, nos daremos cuenta de que es dimensionalmente homogéneo (L en ambos miembros) y que contempla casos evidentes como, por ejemplo, que cuanto mayor sea la rapidez inicial y menor la aceleración de la gravedad, mayor será h; que si la gravedad g tendiera a 0, h tendería a ∞, etc. Además, podemos ver también, que en las condiciones en que se desarrolla el problema, la altura máxima alcanzada resulta ser independiente el ángulo de inclinación del plano (el cual si tendrá influencia, junto con el coeficiente de fricción, para que el cuerpo ascienda rodando sin deslizar).

Sugerid y llevad a cabo otro procedimiento alternativo para calcular la altura máxima.

Otro procedimiento para resolver este mismo problema consiste en utilizar las relaciones entre trabajo y energía. Al igual que en el tratamiento por cinemática y dinámica hemos venido descomponiendo el movimiento en traslación y rotación, aquí también haremos lo mismo. Para ello escogeremos dos estados que designaremos como A (al inicio del plano) y B (cuando el cilindro se detiene) y aplicaremos la expresión que relaciona el trabajo resultante con la variación de energía cinética entre estos estados y a cada movimiento (traslación y rotación) por separado:

Traslación: $W_{Fr\,A}^{\;\;B} + W_{P\,A}^{\;\;B} = Ec_{tB} - Ec_{tA} \rightarrow F_r \cdot d \cdot \cos 0^o + Ep_A - Ep_B = Ec_{tB} - Ec_{tA}$

Rotación: $W_{Fr\,A}^{\;\;B} = Ec_{rB} - Ec_{rA} \rightarrow \; -F_r \cdot r \cdot \theta = Ec_{rB} - Ec_{rA}$

Si sumamos las dos ecuaciones anteriores obtendremos el trabajo resultante total:

$$F_r \cdot d - F_r \cdot r \cdot \theta + Ec_{tA} + Ec_{rA} + Ep_A = Ec_{tB} + Ec_{rB} + Ep_B$$

y como el cilindro rueda sin deslizar, se debe cumplir que la distancia recorrida por el centro de masas sea la girada por un punto de la periferia del cilindro, es decir $d = \theta \cdot r$, de modo que sustituyendo en la expresión anterior queda como:

$$Ec_{tA} + Ec_{rA} + Ep_A = Ec_{tB} + Ec_{rB} + Ep_B$$

La “simplificación” producida nos muestra que la energía cinética y potencial se conserva y puede interpretarse admitiendo que la energía que se pierde en la rotación del cilindro por efecto del trabajo que realiza F_r (negativo) pasa íntegramente a incrementar la traslación (trabajo positivo). Así pues, en adelante **siempre que se produzca una rodadura pura, podremos ignorar el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento,** puesto que resulta ser nulo.

Si escogemos como nivel 0 para la energía potencial gravitatoria la base del plano, podremos escribir:

$Ec_{tA} + Ec_{rA} = Ep_B$ y sustituyendo cada energía por su expresión:

$\frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} I w_A^2 = mgh$. Como $I = mr^2/2$ queda: $\frac{3}{4} v_A^2 = gh \rightarrow h = \frac{3}{4} \cdot \frac{v_{C_O}^2}{g}$ = 1’2 m

42. Un cilindro macizo, de 4 kg de masa y 50 cm de radio, se abandona a una altura de 5 metros sobre un plano inclinado 30º. Sabiendo que baja rodando sin deslizar, calculad cuál será su rapidez angular en el instante en que llegue a la base.

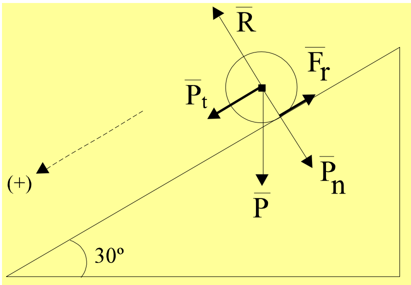
Antes de resolver el problema, conviene *proceder a un estudio cualitativo de la situación.*

Cuando se abandona un cilindro sobre un plano inclinado podemos comprobar que, para valores pequeños del ángulo de inclinación φ, este desciende sin deslizar, pero que al aumentar φ llegaríamos a un valor "critico" (φ_{crit}) a partir del cual el cilindro desciende rodando y deslizando. Como en el enunciado del problema nos dicen que el cilindro baja solo rodando, ello implica que el valor de dicho ángulo crítico será, en este caso, superior a 30º.

Recordemos que mientras no haya deslizamiento entre dos superficies, la fuerza de fricción que se estará dando podrá tener cualquier valor comprendido entre 0 y un valor máximo F_{rmax}. Si hay deslizamiento la fuerza de rozamiento tomará siempre su valor máximo. Aplicado todo esto a nuestro caso, nos lleva a concluir que la fuerza de rozamiento será tanto mayor cuanto mayor sea el ángulo de inclinación del plano y que se alcanzará un valor (φ_{crit}) por encima del cual la fuerza de rozamiento siempre tomará su valor máximo y el cilindro, además de rodar, también deslizará.

Con el fin de poder estudiar el movimiento del cilindro, *analizaremos a continuación qué fuerzas actúan sobre el mismo mientras desciende.*

En un principio, actuarán el peso $\vec{P}$ y la componente normal $\vec{R}$ de la fuerza que ejerce el plano. La suma de ambas dará $\vec{P}_t$ (vector componente tangencial de la fuerza peso) ya que, en este caso, $\vec{R}$ y $\vec{P}_n$ (vector componente normal de la fuerza peso) se anulan entre si.



Debido a la acción de $\vec{P}_t$ el cilindro descendería deslizando (sin rotación) puesto que dicha fuerza está aplicada en el centro de masas del cilindro y, por tanto, su momento respecto del eje de rotación es nulo. Sin embargo, como existe fricción, aparecerá una fuerza de rozamiento que se opondrá al deslizamiento. *¿Qué efectos tendrá esta fuerza sobre el cilindro?*

La fuerza de rozamiento produce sobre el movimiento de descenso del cilindro los siguientes efectos:

a) Disminuir la aceleración a_C con que desciende el centro de masas, ya que su sentido es opuesto al de $\vec{P}_t$

b) Provocar una rotación en el cilindro en el mismo sentido que este avanza, debido al momento de F_r respecto al eje de rotación.

Si escogemos como sentido positivo el sentido del descenso y para la rotación el sentido en que se produce el giro, podemos utilizar un tratamiento escalar para *escribir las ecuaciones fundamentales de la dinámica correspondientes al movimiento de traslación y de rotación del cilindro*, como:

Traslación: $P_t - Fr = m \cdot a_C$
Rotación: $F_r \cdot r = I \cdot \alpha$

Por otra parte, para valores de $\varphi < \varphi_{crit}$ se cumplirá que el cilindro rodará sin deslizar y ello, como ya hemos visto en problemas anteriores, implica que $a_C = \alpha \cdot r$. Teniendo en cuenta está relación, junto con las dos ecuaciones anteriores, podemos *obtener la aceleración a_C, la aceleración angular α y la fuerza de rozamiento F_r*.

$$a_C = 2g\text{sen}\varphi/3; \quad \alpha = 2g\text{sen}\varphi/3r; \quad F_r = mg\text{sen}\varphi/3$$

Vemos, pues, que para un ángulo φ determinado (menor que el crítico), el centro de masas del cilindro descenderá por el plano inclinado con aceleración constante.

Si aumentamos φ, la aceleración aumentará y también la Fr requerida. Ello implica que para un cierto ángulo (que será φ_{crit}) la fuerza de rozamiento coincidirá con la máxima $F_{rmax} = \mu \cdot N$ (N es, como sabemos, el módulo de la fuerza normal que el cuerpo ejerce sobre la superficie, que, en este caso, tiene el mismo valor que P_n). A partir de ahí, si aumentamos φ, se producirá deslizamiento ya que a_C aumentará pero no podrá hacerlo α, de modo que: $\mu \cdot N = \mu \cdot mg\cos\varphi_{crit} \rightarrow \mu \cdot mg\cos\varphi_{crit} = mg\text{sen}\varphi_{crit}/3$ y simplificando:

$$\text{tg}\ \varphi_{crit} = \mu/3$$

Luego conocido el coeficiente de rozamiento μ, podemos hallar fácilmente el ángulo φ_{crit} a partir del cual el cilindro bajará rodando y deslizando.

En el problema se nos pide que calculemos con qué rapidez angular llegará el cilindro a la base del plano. *¿Cómo podríamos hacerlo?*

Como el cilindro solo rueda, se cumplirá en todo momento que $w = v_C/r$. Una posibilidad es determinar v_C cuando el cilindro llegue a la base del plano, utilizando las ecuaciones cinemáticas del movimiento uniformemente acelerado. Después bastará dividir por r para obtener w.

Otra posibilidad, que es la que vamos a desarrollar aquí, es *determinar w mediante consideraciones de trabajo y energía.*

Si llamamos A al estado inicial en que dejamos libre el cilindro sobre el plano inclinado y estado B cuando llega a la base, podemos aplicar la relación, ya conocida, entre el trabajo resultante y la variación de energía cinética: $W_{res}{}_A^B = \Delta Ec_A^B$

Traslación: $W_{Fr}{}_A^B + W_P{}_A^B = Ec_{tB} - Ec_{tA} \rightarrow F_r \cdot \Delta e \cdot \cos 180^o + Ep_A - Ep_B = Ec_{tB} - Ec_{tA}$

Rotación: $W_{Fr}{}_{A}^{B} = Ec_{rB} - Ec_{rA} \rightarrow M_{Fr} \cdot \Delta\theta = Ec_{rB} - Ec_{rA}$

Sumando ahora las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$-F_r \cdot \Delta e + F_r \cdot r \cdot \Delta\theta + Ep_A - Ep_B = Ec_{tB} - Ec_{tA} + Ec_{rB} - Ec_{rA}$$

Si escogemos como nivel 0 de Ep la base del plano y tenemos en cuenta que al rodar sin deslizar $\Delta e = \Delta\theta \cdot r$, la ecuación anterior queda como:

$$Ep_A = Ec_{tB} + Ec_{rB}$$

Desarrollando la ecuación anterior nos queda: $mgh_A = \frac{1}{2} m v_{CB}^2 + \frac{1}{2} I w_{CB}^2$

Como $v_{CB} = w_{CB} \cdot r$ sustituimos y obtenemos: $mgh_A = \frac{1}{2} m w_{CB}^2 \cdot r^2 + \frac{1}{2} I w_{CB}^2$

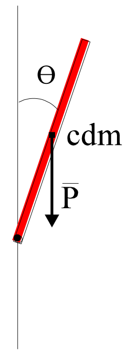
Despejando w_{CB} de la ecuación anterior: $w_{CB} = \sqrt{\frac{2mgh_A}{mr^2 + I}}$.

Como en un cilindro macizo $I = mr^2/2$, nos queda $w_{CB} = \sqrt{\frac{4gh_A}{3r^2}}$ = 18’26 rad/s

Obtened w_{CB} *por cinemática y dinámica comprobando que se obtiene igual resultado*

43. Una varilla homogénea de 1 m de longitud puede girar en torno a un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos. La colocamos verticalmente y bajo una pequeña acción cae girando. Calculad la rapidez de su centro de masas cuando pase por el punto inferior de la trayectoria.

La varilla en su caída realizará una rotación pura alrededor de un eje fijo. El centro de masas de la misma describirá una trayectoria circular de radio L/2 (L es la longitud de la varilla), por lo que cabe esperar que su velocidad en el punto más bajo será tanto más grande cuanto mayor sea L.



¿Cómo podríamos calcular la rapidez v_C *del centro de masas cuando éste pase por el punto más bajo de la trayectoria?*

Podemos tratar de resolver el problema por consideraciones de cinemática y dinámica. Para ello tendremos que calcular la aceleración angular y por integración obtener w en el punto considerado. Finalmente aplicaremos $v_C = w \cdot r_C$. Como el plano de rotación es invariable, podemos utilizar un tratamiento escalar.

Proceded a resolver el problema mediante la estrategia sugerida en el párrafo anterior.

Escogeremos como sentido positivo el que corresponde a la rotación y para calcular la aceleración angular aplicaremos a la varilla la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación $M = I \cdot \alpha$. Para calcular el momento total M hemos de analizar los momentos de las fuerzas que actúan. El momento de la fuerza ejercida por el eje sobre la varilla ($\vec{F}_e$) respecto del propio eje es nulo (porque r = 0). El único momento, que será, por tanto, el total, corresponderá al de la fuerza peso $\vec{P}$ de la varilla, aplicada en el centro de masas, cuyo valor será positivo (de acuerdo con el criterio de signos adoptado) y viene dado por:

$M = P \cdot L/2 \cdot \text{sen}\theta = mgL\text{sen}\theta/2$

que, como vemos, es variable (depende del ángulo θ), lo que significa que provocará una aceleración angular variable.

$M = I \cdot \alpha \rightarrow mgL\text{sen}\theta/2 = I \cdot \alpha \rightarrow \alpha = mgL\text{sen}\theta/2I$ y como $I = mL^2/3 \rightarrow \alpha = 3g\text{sen}\theta/2L$

Así pues, si queremos conocer la rapidez del centro de masas cuando pase por la vertical, será preciso que *obtengamos primero la rapidez angular en ese punto por integración*:

$dw/dt = 3g\text{sen}\theta/2L$. Para poder integrar debemos eliminar una de las tres variables (t, w, θ) para lo cual multiplicaremos ambos miembros por dθ:

$d\theta \cdot dw/dt = 3g\text{sen}\theta \cdot d\theta/2L \rightarrow wdw = 3g\text{sen}\theta \cdot d\theta/2L$

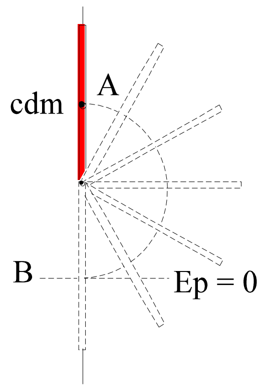
$$\int_0^w w \cdot dw = \int_0^\pi \frac{3g\text{sen}\theta}{2L} \cdot d\theta \rightarrow \left[\frac{w^2}{2}\right]_0^w = \frac{3g}{2L}\left[-\cos\theta\right]_0^\pi \rightarrow w = \sqrt{\frac{6g}{L}} \quad \text{y como } v_C = w \cdot L/2$$

obtenemos finalmente que: $v_C = \sqrt{\dfrac{3gL}{2}}$ = 3’87 m/s

Si analizamos brevemente la expresión obtenida, podemos ver que es dimensionalmente homogénea (LT^{-1} en ambos lados de la igualdad) y que, como cabía esperar, cuanto mayor sea la longitud de la varilla mayor será la rapidez del centro de masas.

Sugerid y llevad a cabo otra estrategia de resolución del problema

El problema también se puede resolver mediante consideraciones de trabajo y energía, el cual, como suele ocurrir, resulta un procedimiento más sencillo y rápido.



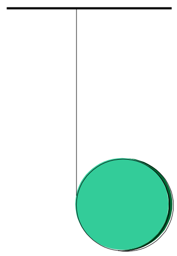
Si llamamos estado A a la posición de partida del cdm y estado B a cuando pasa por el punto más bajo de su trayectoria, podemos aplicar el teorema que nos relaciona el trabajo resultante con la variación de energía cinética, entre dichos estados: $W_{res\,A}^{\;B} = \Delta Ec_{r\,A}^{\;B}$ y como solo participa la fuerza peso $\vec{P}$ (que, como sabemos, es conservativa), si tenemos en cuenta que en A la varilla está en reposo y escogemos como nivel 0 para la energía potencial gravitatoria el del estado B, podemos hacer:

$W_{res\,A}^{\;B} = W_{\vec{P}\,A}^{\;B} = -\Delta E_{p\,A}^{\;B}$ con lo que:

$$-\Delta Ep_A^B = \Delta Ec_{r\,A}^{\;B} \rightarrow Ep_A = Ec_{rB} \rightarrow mgh_A = \frac{1}{2} Iw_B^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} mL^2 \cdot w_B^2 \rightarrow w_B = \sqrt{\frac{6g}{L}}$$

Para obtener el mismo resultado que por el procedimiento anterior, basta multiplicar por el radio correspondiente al centro de masas (L/2).

44. Se enrolla un hilo en la periferia de un cilindro macizo de 1 kg de masa y 10 cm de radio. A continuación, y tras sujetar en el techo el extremo libre del hilo, se deja caer el cilindro. Determinad la rapidez del centro de masas cuando haya descendido 1'2 m.



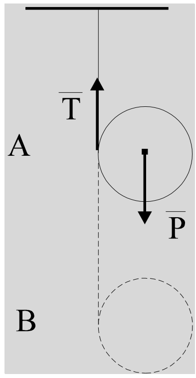
El cilindro descenderá cada vez más aprisa debido a la fuerza peso $\vec{P}$ que actúa sobre su centro de masas, pero a su vez girará también cada vez más aprisa, debido al momento de la fuerza $\vec{T}$ que la cuerda ejerce sobre su periferia, de modo que podemos interpretar el movimiento del cilindro como traslación de su centro de masas acompañada de una rotación alrededor del mismo.

Por otra parte, *si nos preguntamos por los factores que influirán en la rapidez v_C que llevará el centro de masas cuando se encuentre en una cierta posición*, cabe pensar que dependerá de la altura que haya descendido así como del momento de inercia del cuerpo, de forma que cuanto mayor sea la altura que lleve bajada mayor sea v_C.

¿Cómo podemos determinar la rapidez del centro de masas que se nos pide?

Una posibilidad es mediante consideraciones de trabajo y energía. Cuando se abandona la polea, la energía potencial gravitatoria disminuye mientras que la energía cinética aumenta. Si durante el descenso sucediera que el trabajo resultante no conservativo fuese nulo, el principio de conservación de la energía nos llevaría a establecer una igualdad entre la disminución de la energía potencial gravitatoria y el aumento de energía cinética producido (descompuesta en energía cinética de traslación y energía cinética de rotación) y de ahí podríamos obtener la v_C.

Proceded a resolver el problema mediante la estrategia sugerida.



Si aplicamos la expresión $W_{res\,A}^{\;B} = \Delta Ec_A^B$ a los estados A (cuando soltamos el cuerpo) y B (cuando haya descendido 1'2 m), tendremos:

Traslación: $W_{res\,A}^{\;B} = Ec_{tB} - Ec_{tA}$

Rotación: $W_{res\,A}^{\;B} = Ec_{rB} - Ec_{rA}$

Para calcular los trabajos anteriores será necesario que consideremos las fuerzas actuantes (que son $\vec{P}$ y $\vec{T}$).

Tanto una como otra realizarán trabajo en la traslación, pero solo $\vec{T}$ en la rotación, ya que el momento de $\vec{P}$ respecto del centro de masas es nulo).

Traslación: $W_{Tt\,A}^{\;B} + W_{P\,A}^{\;B} = Ec_{tB} - Ec_{tA}$

Rotación: $W_{Tr\,A}^{\;B} = Ec_{rB} - Ec_{rA}$

Si llamamos d al desplazamiento efectuado por $\vec{T}$ y θ al ángulo descrito, por un punto de la periferia de la polea, en dicho desplazamiento, podemos expresar los trabajos anteriores como:

Traslación: $T \cdot d \cdot (-1) + Ep_A - Ep_B = Ec_{tB} - Ec_{tA} \rightarrow Ec_{tA} + Ep_A - T \cdot d = Ec_{tB} + Ep_B$

Rotación: $M \cdot \theta = Ec_{rB} - Ec_{rA} \rightarrow T \cdot r \cdot \theta = Ec_{rB} - Ec_{rA} \rightarrow T \cdot r \cdot \theta + Ec_{rA} = Ec_{rB}$

y teniendo en cuenta que la cuerda toca punto a punto a la periferia de la polea $d = r \cdot \theta$ podemos sustituir en la ecuación correspondiente a la rotación $r \cdot \theta$ por d, sumar ambas ecuaciones y simplificar:

$$Ec_{tA} + Ec_{rA} + Ep_A - T \cdot d + T \cdot d = Ec_{tB} + Ec_{rB} + Ep_B$$

$$Ec_{tA} + Ec_{rA} + Ep_A = Ec_{tB} + Ec_{rB} + Ep_B\ .$$

Esta última ecuación puede interpretarse diciendo que la energía mecánica que se "perdería" en la traslación debido al trabajo realizado por $\vec{T}$ (negativo) en realidad no se pierde sino que es invertida en energía cinética de rotación, de modo que, al ser nulo el trabajo total correspondiente a $\vec{T}$, la suma de la energía potencial gravitatoria y la energía cinética se conserva.

Si asignamos (como hacemos habitualmente) el nivel 0 de energía potencial gravitatoria a la posición más baja (situación B), y tenemos en cuenta que se parte del reposo y que $w = v_C/r$, desarrollando la última ecuación, nos queda:

$$mgh = \frac{mv_C^2}{2} + Iw^2/2 \rightarrow mgh = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{Iv_C^2}{2r^2} \rightarrow v_C = \sqrt{\frac{2mgh}{m+\frac{I}{r^2}}}$$

Si analizamos la expresión obtenida para v_C, nos daremos cuenta que tal y como se pensó, cuanto mayor sea la altura h descendida mayor será v_C . Finalmente, si consideramos a la polea como equivalente a un disco macizo de su misma masa y radio, podemos sustituir en el resultado anterior I por $mr^2/2$ y obtener:

$$v_C = \sqrt{\frac{4gh}{3}} = 4 \text{ m/s.}$$

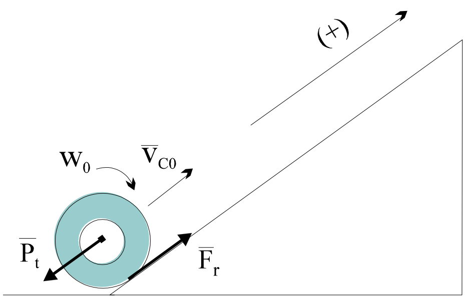
45. Se dejan en libertad sobre un plano inclinado y a la misma altura dos cuerpos (una esfera y un cilindro), de igual masa y radio. ¿Qué relación existe entre las rapideces de sus centros de masas al llegar a la base del plano sabiendo que ambos descendieron rodando sin deslizar?

sol: $v_e = 1'035 \cdot v_c$

46. A un disco macizo de 20 kg de masa y 20 cm de radio se le practica un orificio concéntrico de 10 cm de radio y se le hace rodar por una superficie horizontal de forma que cuando llega a la base de un plano inclinado (que se encuentra sobre dicha superficie) tiene un movimiento de rodadura pura y su centro de masas se está desplazando a 10 m/s. Se pide:

a) Valor máximo que puede tener el ángulo φ del plano inclinado para que el cuerpo ascienda sin deslizar (μ = 0'4).
b) Altura que alcanzará hasta detenerse si asciende sin deslizar.

Cuando el disco llega a la base del plano inclinado lo hace con rodadura pura. Al comenzar a ascender la fuerza $\vec{P}_t$ disminuirá la rapidez v_C del centro de masas. Si ello ocurriese resultaría que w·r sería mayor que v_C, con lo cual el disco giraría más de lo que se desplazaría apareciendo un deslizamiento.



Sin embargo, en cuanto el disco trata de deslizar, como existe rozamiento con el plano, se produce una fuerza de rozamiento de valor Fr que se opone a ello y cuyo momento hará disminuir la rapidez angular w. Si el coeficiente de rozamiento μ es lo bastante grande como para que la Fr requerida para disminuir la rotación sea menor que el valor máximo que puede tomar Fr, se producirá rodadura sin deslizamiento. En estas condiciones, tomando como sentidos positivos los de traslación y rotación del cuerpo, las ecuaciones que regirán el movimiento de subida del disco, son:

Traslación: $-Pt + Fr = m \cdot a_C$ (1)
Rotación: $-Fr \cdot R = I \cdot \alpha$ (2)

Además de las ecuaciones anteriores, como no hay deslizamiento, $a_C = \alpha \cdot R$ (3)

Utilizando las tres ecuaciones anteriores, podemos obtener fácilmente:

$$a_C = \frac{-P_t}{m + \frac{I}{R^2}} = \frac{-mgsen\varphi}{m + \frac{I}{R^2}} \qquad F_r = \frac{Pt}{1 + \frac{mR^2}{I}} = \frac{mgsen\varphi}{1 + \frac{mR^2}{I}}$$

Como vemos, la fuerza de rozamiento requerida para que el cuerpo ascienda por el plano rodando sin deslizar, aumentará conforme aumente el ángulo φ de inclinación del plano, de manera que habrá una valor "crítico" de dicho ángulo (φ_{crit}) para el cual la Fr alcanzará su valor máximo $F_{r\,max} = \mu \cdot mgcos\varphi$, de forma que, podremos hacer:

$$Fr_{max} = \frac{mgsen\varphi_{crit}}{1 + \frac{mR^2}{I}} = \mu \, mg\cos\varphi_{crit} \rightarrow tg\,\varphi_{crit} = \mu\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)$$

Para obtener el valor de φ_{crit} será necesario *conocer el momento de inercia del disco agujereado*. Para ello, si llamamos m' a la masa del disco completo (20 kg), m a la del disco agujereado, m'' a la masa que extraemos al agujerearlo y σ a la densidad superficial del cuerpo, se cumplirá que:

$\sigma = m'/S = 20/\pi \cdot 0'2^2 = 159'2\ kg/m^2$ y $m'' = \sigma \cdot S'' = 159'2 \cdot \pi \cdot 0'1^2 = 5$ kg, con lo que el momento de inercia buscado se podrá obtener como:

$I = I_{DC} - I_{orif} = m'R^2/2 - m''r^2/2$

Sustituyendo los valores numéricos nos queda $I = 0'375\ kg \cdot m^2$, que aplicado a la expresión de la tg φ_{crit} nos conduce finalmente a:

$\varphi_{crit} = arctg\ 0'4\ (1 + 15 \cdot 0'2^2/0'375) = 46'1^o$

¿Cómo podemos determinar la altura máxima que alcanzará el cilindro sobre la base del plano?

Para determinar la altura que alcanzará podemos utilizar la expresión que relaciona el trabajo resultante con la variación de la energía cinética, aplicándola entre los estados A (cuando se inicia el ascenso) y B (cuando alcanza la altura máxima).

En este caso, haremos uso, además, de algunas de las conclusiones que ya hemos justificado reiteradamente en problemas anteriores y plantearemos directamente la ecuación suma del trabajo resultante correspondiente a la traslación y a la rotación, considerando que al no haber deslizamiento el trabajo neto de la fuerza de rozamiento es nulo. Por otra parte, como la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza peso y ésta es conservativa, podemos escribir (tomando nivel 0 de Ep gravitatoria la base del plano) que:

$Ec_{tA} + Ec_{rA} = Ep_B$ ya que cuando alcanza la máxima altura el disco deja de moverse.

La ecuación anterior se interpreta como que toda la energía cinética de que disponía en la base se invierte íntegramente en aumentar la energía potencial y desarrollándola podemos obtener la altura buscada:

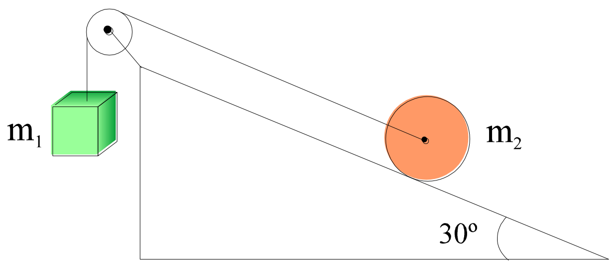
$$\frac{1}{2}mv_{CA}^2 + \frac{1}{2}Iw_A^2 = mgh_B \rightarrow \frac{1}{2}mv_{CA}^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_{CA}^2}{R^2} = mgh_B \quad \text{de donde:}$$

$$h_B = \frac{mv_{CA}^2 + \frac{Iv_{CA}^2}{R^2}}{2mg} = \frac{1 + \frac{I}{mR^2}}{2g}v_{CA}^2$$

sustituyendo los valore numéricos queda $h_B = 8'13$ m

Podemos analizar el resultado literal obtenido comprobando cómo éste además de ser dimensionalmente homogéneo (L en ambos miembros), contempla algunos casos evidentes como, por ejemplo, que cuando mayor sea la velocidad inicial del centro de masas, mayor será la altura que se alcanzará y que si no hubiese gravedad la altura máxima sería infinita (no se pararía nunca).

47. Un cilindro macizo de 8 kg de masa y 20 cm de radio, capaz de girar libremente alrededor de un eje que coincide con su eje de simetría, se encuentra sobre un plano inclinado de 30^0. Se realiza el montaje de la figura (la polea es de masa despreciable) y, a continuación, dejamos en libertad los cuerpos apreciándose que el cilindro asciende por el plano rodando sin deslizar. Determinad la rapidez angular del cilindro cuando haya recorrido 10 metros. ¿Cuánto debe valer como mínimo el coeficiente de fricción entre el cilindro y el plano? Dato: m_1 = 6 kg



El cilindro (o cuerpo 2) asciende por el plano bajo la acción de las fuerzas $\vec{T}_2$ ejercida por la cuerda, su peso $\vec{P}_2$, y la componente normal $\vec{R}$ de la fuerza ejercida por el plano. En este caso al tratarse de una trayectoria rectilínea la fuerza $\vec{R}$ se anula con la componente normal del peso $\vec{P}_n$ de modo que el cilindro, inicialmente en reposo, ascenderá debido a que T_2 es mayor que la componente tangencial del peso $\vec{P}_t$. Como ambas fuerzas se aplican en el centro de masas, producirían traslación del cilindro y, en consecuencia, **"**intentará**"** deslizar sobre el plano inclinado a lo que se opondrá la fuerza de rozamiento $\vec{F}_r$ que aparecerá provocando que el cilindro ruede.

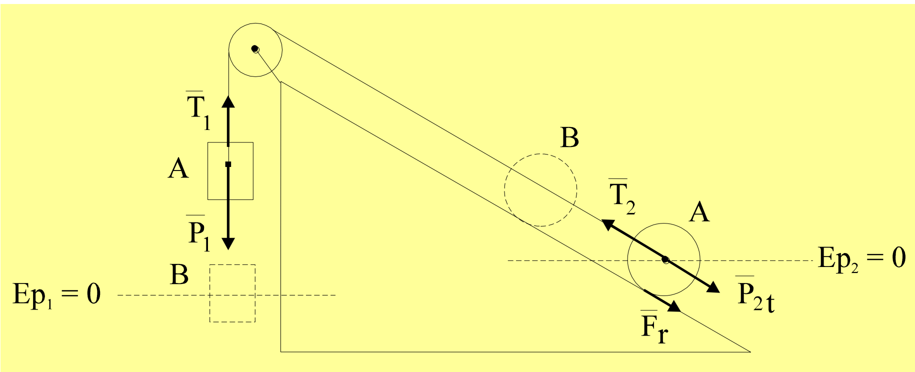
En el enunciado se dice que el cilindro asciende sin deslizar. Ello implica que en todo momento se cumplirá que $v_C = w \cdot r$, por lo que si calculamos v_C podremos obtener fácilmente la rapidez angular w.

¿De qué dependerá v_C?

Si atendemos a las condiciones en que se desarrolla el movimiento (solo rodadura, cuerda inextensible y sin masa, situación inicial de reposo, inercia de la polea nula y sentido del movimiento según el descenso del cuerpo 1), cabe esperar que cuanto mayor sea la distancia recorrida y la diferencia de masas $m_1 - m_2$, mayor tendrá que resultar v_C. Por otra parte, es evidente que si m_2 fuese nula, m_1 debería caer libremente (con la aceleración de la gravedad) y su rapidez en cualquier instante vendría dada, como sabemos, por la expresión $v = \sqrt{2gh}$.

¿Cómo podremos hallar v_C?

Como ya sabemos (ved problemas anteriores), al no haber deslizamiento el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es nulo. Por otra parte, al ser la cuerda y la polea de masas despreciables, las fuerzas $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ tienen el mismo módulo T y realizarán el mismo trabajo, pero uno (el de $\vec{T}_2$) será positivo y el otro negativo. Todo ello hace que al no haber trabajo neto no conservativo, la suma de la energía potencial y cinética se conserve, lo que nos lleva a establecer que la disminución de la energía potencial gravitatoria asociada al descenso del cuerpo 1 se traducirá en un aumento de la energía cinética de los dos cuerpos y de la energía potencial gravitatoria asociada al cuerpo 2.



Si aplicamos la expresión $W_{res\,A}^{\ \ B} = \Delta Ec_A^B$ a los estados A (cuando soltamos el cuerpo 1) y B (cuando haya descendido 10 m), tendremos:

Cuerpo 1: $W_{T\,A}^{\ \ B} + W_{P1\,A}^{\ \ B} = Ec_{1B} - Ec_{1A}$
Cuerpo 2: $W_{T\,A}^{\ \ B} + W_{P2\,A}^{\ \ B} = (Ec_{2tB} + Ec_{2rB}) - (Ec_{2tA} - Ec_{2rA})$

Como puede verse en el cuerpo 2 no figura el trabajo de la fuerza de rozamiento al ser éste nulo. Desarrollando las expresiones anteriores nos queda:

$$T \cdot d \cdot (-1) + Ep_{1A} + Ec_{1A} = Ep_{1B} + Ec_{1B}$$
$$T \cdot d \cdot 1 + Ep_{2A} + Ec_{2tA} + Ec_{2rA} = Ep_{2B} + Ec_{2tB} + Ec_{2rB}$$

Tomando como nivel 0 para la energía potencial gravitatoria de cada uno de los cuerpos el que corresponde a su posición más baja (la situación inicial A para el 2 y la B para el 1) y considerando que dichos cuerpos se hallan inicialmente en reposo, podemos sumar las expresiones anteriores y obtener finalmente que:

$Ep_{1A} = Ec_{1B} + Ep_{2B} + Ec_{2\,tB} + Ec_{2\,rB}$

La expresión obtenida nos muestra que la energía potencial gravitatoria inicial (respecto al nivel tomado como 0) se ha transformado en energía cinética (de rotación y traslación del cuerpo 2 y traslación del cuerpo 1) y en energía potencial gravitatoria (asociada al cuerpo 2). Desarrollando dicha expresión podemos despejar v_C.

$m_1gh_{1A} = \dfrac{m_1v_B^2}{2} + m_2gh_{2B} + \dfrac{m_2v_B^2}{2} + \dfrac{Iv_B^2}{2r^2}$ de modo que $v_B = \sqrt{\dfrac{2gh_{1A}(m_1 - m_2 sen\varphi)}{m_1 + m_2 - \dfrac{I}{r^2}}}$

Para obtener la expresión anterior, hemos tenido en cuenta que la altura a que asciende m_2 respecto su nivel inicial, viene dada por la expresión $sen\varphi = h_{2B}/h_{1A}$ ya que, al ser la cuerda inextensible, la misma distancia que desciende el cuerpo 1 en vertical recorrerá el cuerpo 2 sobre el plano.

Finalmente, sustituyendo los valores numéricos:

$v_B = 4'71$ m/s y $w_{2B} = v_B/r = 23'6$ rad/s

Podemos *analizar el resultado literal obtenido* comprobando que es dimensionalmente homogéneo (LT^{-1} en ambos miembros) y que además contempla las hipótesis realizadas anteriormente, como, por ejemplo, que cuanto mayor sea la distancia que desciende el cuerpo 1 (o que asciende el 2) mayor es la rapidez y que, análogamente, cuanto mayor es la diferencia de masas $m_1 - m_2$, mayor resulta v_C, o que si m_2 fuese nula, m_1 debería caer libremente (con la aceleración de la gravedad) y su rapidez en cualquier instante vendría dada por la expresión $v = \sqrt{2gh}$, etc.

7. CAMPO GRAVITATORIO

1. Diferenciad entre masa inercial y masa gravitacional de un cuerpo.

Si aplicásemos una fuerza a un bloque situado sobre una superficie horizontal y **sin rozamiento**, comprobaríamos que esta ha de tener un cierto valor para producirle una aceleración determinada. En ello no interviene la gravedad para nada, es decir, se requeriría una fuerza idéntica, para provocarle la misma aceleración, si el bloque estuviese situado en un lugar de gravedad nula. A la propiedad del bloque que hace necesaria la acción de una fuerza resultante para cambiar su estado de movimiento, se le denomina “masa inercial” y cuanto mayor es su valor, mayor es también la fuerza resultante que se necesita para producir una determinada aceleración. Dicha masa inercial (m_i), es la que figura en la ecuación fundamental de la dinámica:

$$\vec{F} = m_i \cdot \vec{a}$$

y, como sabemos, se mide en kilogramos. Su valor, para un objeto dado, se puede obtener fácilmente sin más que aplicar sobre dicho objeto una fuerza resultante determinada y medir la aceleración producida. A continuación, basta dividir el módulo de la fuerza, en N, por el de la aceleración en m/s^2, para obtener el valor de la masa inercial, en kg.

Por otra parte, sabemos que cuando abandonamos un objeto en el seno de un campo gravitatorio (como ocurre con cualquier cuerpo a una cierta altura sobre la superficie de la Tierra), sobre él se ejerce una cierta fuerza. En este caso, la inercia no juega ningún papel. Se trata de otra propiedad de la materia consistente en que los cuerpos se atraen entre sí (por ejemplo un objeto y la Tierra). Esta propiedad gravitatoria fue descubierta por Newton cuyos trabajos en este campo le llevaron a establecer que la fuerza gravitatoria entre dos cuerpos cualesquiera era directamente proporcional a su "masa gravitacional (m_g) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Esto quedó reflejado en la Ley de Newton de la Gravitación Universal:

$$F = K \frac{m_{g1} \cdot m_{g2}}{d^2}$$

¿Son la misma cosa la masa inercial que la masa gravitacional?

Para responder a la pregunta supongamos que se dejan en libertad varios cuerpos de masas inerciales m_{i1}, m_{i2} ...en la proximidad a la superficie de la Tierra. En ese caso <u>podemos comprobar experimentalmente que todos ellos caen con el mismo valor de la aceleración</u> $a = 9'81\ m/s^2$. Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica podemos obtener el valor de la fuerza que estará actuando sobre cada cuerpo: $F_1 = m_{i1} \cdot a$; $F_2 = m_{i2} \cdot a$ ...

Por otra parte, esas fuerzas no son otras que la atracción gravitatoria que ejerce la Tierra (de masa gravitacional m_{gT}), sobre cada uno de los cuerpos (de masas gravitacionales m_{g1}, m_{g2} …) que, de acuerdo con la Ley de Newton de la Gravitación vendrán dadas por:

$$F_1 = K\frac{m_{gT}\cdot m_{g1}}{d^2}\ ;\quad F_2 = K\frac{m_{gT}\cdot m_{g2}}{d^2}\ ...$$

Igualando las fuerzas y despejando obtenemos la relación existente entre m_g y m_i :

$$\frac{m_{g1}}{m_{i1}} = \frac{K\cdot m_{gT}}{a\cdot R_T^2}\ ;\quad \frac{m_{g2}}{m_{i2}} = \frac{K\cdot m_{gT}}{a\cdot R_T^2}\ ...\ \rightarrow\ \frac{m_g}{m_i} = C$$ (siendo C una constante).

Como vemos, se cumple que ambas masas son directamente proporcionales: $m_g = C\cdot m_i$

A continuación analizaremos algunas consecuencias de la proporcionalidad anterior:

La unidad para medir la masa inercial (elegida arbitrariamente) es el kilogramo. Nos queda ahora decidir en qué unidad se va a medir la masa gravitacional. Según sea nuestra decisión, quedará fijado el valor de la constante de proporcionalidad C. Para comprender el alcance de tal decisión, podemos hacer el siguiente supuesto:

Situamos dos **masas inerciales iguales**, de **1 kg cada una**, separadas entre sí por una **distancia de 1 m** y medimos la fuerza gravitatoria con que se atraen. En ese caso obtendríamos el valor de $6'67\cdot 10^{-11}$ N y sustituyendo en la expresión de la Ley de la Gravitación Universal (LGU):

$$6'67\cdot 10^{-11} = K\frac{m_{g1}\cdot m_{g2}}{1}$$

Podemos ahora diferenciar entre dos opciones en la selección de la unidad de m_g, que llamaremos "unidad de masa gravitatoria" y designaremos, de momento, como “umg”.

a) Que asignemos a cada masa inercial m_i = 1 kg, una masa gravitacional m_g = n (umg), siendo n cualquier número positivo mayor que 1, como, por ejemplo, el 5. Ello significaría que a cada kg de masa inercial le corresponderían 5 (umg) y la ecuación anterior quedaría como:

$$6'67\cdot 10^{-11} = K\frac{m_{g1}\cdot m_{g2}}{1} = K\frac{25(\mathrm{umg})^2}{1\mathrm{m}^2}$$ con lo que $$K = \frac{6'67\cdot 10^{-11}}{25}\ \frac{\mathrm{N}\cdot \mathrm{m}^2}{(\mathrm{umg})^2}$$

y la masa gravitacional de cualquier cuerpo vendría dada por: $m_g = 5\left(\frac{umg}{kg}\right)\cdot m_i\,(kg)$

b) Que asignemos a n el valor de 1, es decir que a cada masa inercial m_i = 1 kg le hagamos corresponder una masa gravitacional m_g = 1 umg. En este caso:

$$6'67\cdot 10^{-11} = K\frac{m_{g1}\cdot m_{g2}}{1} = K\frac{1(\mathrm{umg})^2}{1\mathrm{m}^2}$$ de modo K valdría: $$K = 6'67\cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{N}\cdot \mathrm{m}^2}{(\mathrm{umg})^2}$$

y la masa gravitacional de cualquier cuerpo sería $m_g = 1 \cdot \left(\frac{umg}{kg}\right) m_i$

Si, además, a la unidad de masa gravitatoria la llamásemos "kilogramo gravitatorio" en lugar de unidad de masa gravitatoria y la representásemos por kg en lugar de umg, tendríamos que K = G = $6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$ y $m_i = m_g$.

La igualdad anterior ($m_i = m_g$), no debe interpretarse como una identidad, sino simplemente como una coincidencia de valores numéricos debida a la decisión tomada.

$$m_i = 1 \cdot \left(\frac{kg\ grav}{kg\ iner}\right) \cdot m_i$$

Dicha decisión presenta la ventaja de que solo hablamos de un único valor para medir la masa de cada cuerpo (representará tanto la masa inercial como la masa gravitacional), <u>pero también tiene el inconveniente de que, habitualmente, se confundan dos propiedades distintas de la materia como son la inercia y la gravitación</u>.

La masa inercial es una propiedad de los cuerpos debida a la imposibilidad que tienen, por ellos mismos, de cambiar su velocidad, mientras que la masa gravitacional es la propiedad a la que se debe la atracción gravitatoria entre los cuerpos. La proporcionalidad existente entre estas dos propiedades distintas, se conoce con el nombre de "Principio de equivalencia". El que dos propiedades de naturaleza tan distinta, sean directamente proporcionales, se consideró durante mucho tiempo como una casualidad. Sin embargo, en la actualidad este hecho se interpreta claramente en la Teoría de la Relatividad Generalizada.

¿Qué consecuencia tiene en la caída de los cuerpos el hecho de que la masa inercial y la gravitacional sean directamente proporcionales?

Una consecuencia es que todos los objetos (en ausencia de rozamiento) caerán al suelo (desde pequeñas alturas) con igual aceleración o, como suele decirse, más impropiamente, que la aceleración de la gravedad no dependa de la masa. En efecto, cuanto mayor sea la masa gravitatoria de un objeto, mayor será la fuerza con que es atraído por la Tierra , lo que podría llevarnos a pensar que debería caer con más aceleración. Sin embargo ello no ocurre así porque al ser la masa inercial directamente proporcional a la gravitatoria, cuando una aumenta la otra lo hace también en la misma proporción, y, si bien es cierto que la fuerza resultante hacia abajo aumenta cuando aumenta la masa gravitacional, lo mismo ocurre con la inercia del cuerpo a cambiar de velocidad, por lo que ambos efectos se compensan.

Para pequeñas alturas sobre el suelo (despreciables frente al radio de la Tierra):

$F = G \frac{m_{gT} \cdot m_g}{R_T^2} = cte \cdot m_g$ de modo que la aceleración de caída será:

$$a = \frac{F}{m_i} = \frac{cte \cdot m_g}{m_i} = cte$$

¿Qué ocurriría en un mundo hipotético en el que la masa inerte y la gravitacional fuesen inversamente proporcionales?

De acuerdo con la expresión anterior ($a = cte \cdot m_g/m_i$), si la masa gravitacional y la masa inercial fuesen inversamente proporcionales, los objetos de elevada masa gravitatoria caerían con mayor aceleración que los de pequeña masa gravitatoria. Por otra parte, los objetos de masa inerte elevada como, por ejemplo, un camión, caerían muy suavemente (con muy poca aceleración) ya que su masa gravitacional sería tanto más pequeña cuanto mayor fuese su masa inercial.

2. ¿Es lo mismo la intensidad del campo gravitatorio terrestre que la aceleración de caída de un cuerpo sometido a la acción de la fuerza peso (fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra)?

En ocasiones a la magnitud física $\vec{g}$ (intensidad del campo gravitatorio), cuando nos referimos al campo generado por la Tierra, se le llama "aceleración de la gravedad", cuando, conceptualmente se trata de dos magnitudes distintas (si bien coinciden numéricamente en determinadas circunstancias). La $\vec{g}$ es una magnitud que se introduce para caracterizar el campo gravitatorio existente en un punto cualquiera. Dicha magnitud, por tanto, tomará un cierto valor, independientemente de que en ese punto haya o no masa alguna. Por el contrario solo podremos comenzar a hablar de aceleración cuando en el punto considerado se coloque una masa y se la deje en libertad.

Para profundizar en la diferenciación de ambos conceptos, analicemos lo que sucede con un cuerpo de masa inercial m_i que se abandona a cierta altura sobre la superficie de la Tierra. Si la altura es pequeña, comparada con el radio terrestre, el cuerpo se moverá hacia la superficie de la Tierra con una aceleración constante, que, medida experimentalmente, resulta ser 9'81 m/s^2. Apoyándonos en la ecuación fundamental de la dinámica, podemos decir que sobre el cuerpo actúa una fuerza de valor:

$F = m_i \cdot a$ (siendo $a = 9'81\ m/s^2$).

Esta fuerza es, como sabemos, la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre el cuerpo, que se puede expresar como:

$F = \ = m_g \cdot g$

(siendo g la intensidad del campo gravitatorio terrestre en el punto en donde se deja el cuerpo y m_g la masa gravitacional de este).

Igualando ambas fuerzas: $m_i \cdot a = m_g \cdot g \rightarrow \ g = \frac{m_i}{m_g} \cdot a$

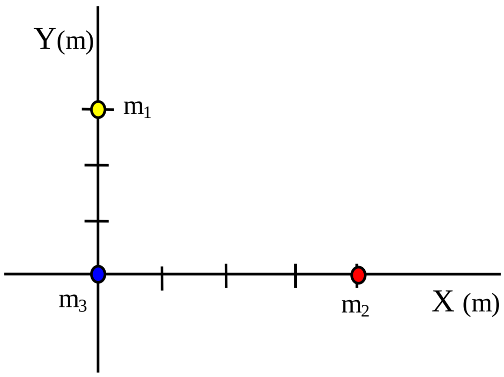
Si tenemos en cuanta ahora que los valores de ambas masas coinciden, obtenemos que:

$$g = 1\frac{kg_{iner}}{kg_{grav}} \cdot 9'81\frac{m}{s^2} = 9'81\frac{N}{kg_{grav}}$$

y, dado que la masa inercial m_i y la gravitacional m_g son conceptualmente diferentes, aunque, por conveniencia, se hayan hecho coincidir numéricamente (ved ejercicio anterior), lo mismo ocurrirá con la aceleración "a" y la intensidad del campo gravitatorio "g". Ambas tendrán el mismo valor numérico. No obstante, la unidad que conviene que acompañe a la intensidad del campo gravitatorio será N/kg y no m/s^2 ya que, evidentemente: 1 m/s^2 = 1N/kg (masa inercial) pero 1 $m/s^2 \neq 1$ N/kg (masa gravitacional). Si la unidad de masa gravitacional hubiese recibido, en lugar de kilogramo, otro nombre distinto, esta confusión no se daría.

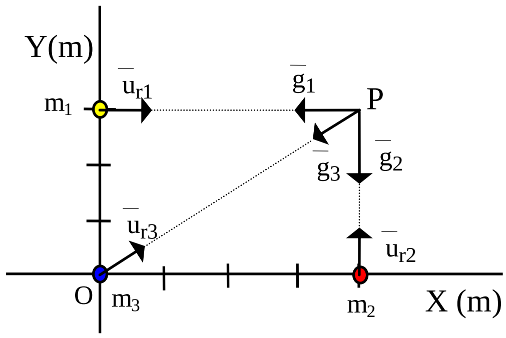
3. Las masas m_1, m_2, y m_3, de la figura adjunta valen $8 \cdot 10^3$ kg, $9 \cdot 10^3$ kg y 10^3 kg, respectivamente. Se pide:

a) La intensidad del campo gravitatorio en el punto (4, 3) m.
b) Fuerza que actuaría sobre una masa de 10 kg situada en dicho punto.



Como el campo gravitatorio se debe, en este caso, a tres masas, la intensidad en un punto cualquiera del mismo, se obtendrá como la suma de la intensidad correspondiente a cada una de las masas por separado, esto es: $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3$

Para determinar $\vec{g}$ podemos expresar cada uno de los vectores en función de un vector unitario $\vec{u}_r$ que vaya desde la masa que crea el campo hacia el punto en el que se desea conocer la intensidad, tal y como se propone en la figura adjunta:



Expresad los vectores intensidad de campo en P, en función de los correspondientes vectores unitarios:

$$\vec{g}_1 = -\frac{Gm_1}{d_1^2}\vec{u}_{r1} = -6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{8 \cdot 10^3}{4^2}(1, 0) = (-3'34 \cdot 10^{-8},\ 0)\ N/kg$$

$$\vec{g}_2 = -\frac{Gm_2}{d_2^2}\vec{u}_{r2} = -6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{9\cdot 10^3}{3^2}(0\,,1) = (0\ ,\ -6'67\cdot 10^{-8})\ \text{N/kg}$$

$$\vec{g}_3 = -\frac{Gm_3}{d_3^2}\vec{u}_{r3}$$ *¿Cómo podemos determinar* d_3 *y* $\vec{u}_{r3}$ *en este caso?*

Un procedimiento que nos permite evaluar d_3 y $\vec{u}_{r3}$ (incluso cuando trabajemos con tres componentes) es el siguiente:

Consideramos el vector $\overline{OP}$ = (4 , 3) m. Su módulo será OP = $\sqrt{4^2+3^2}$ = 5 m y coincidirá con la distancia d_3. Si dividimos ahora dicho vector por su propio módulo, obtendremos el vector unitario $\vec{u}_{r3}$:

$\vec{u}_{r3}$ = $\overline{OP}$/OP = (4/5 , 3/5), de modo que sustituyendo en la expresión de $\vec{g}_3$ nos queda:

$$\vec{g}_3 = -\frac{Gm_3}{d_3^2}\vec{u}_{r3} = -6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{10^{-3}}{5^2}\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right) = (-2'13\cdot 10^{-9}\ ,\ -1'6\cdot 10^{-9})\ \text{N/kg}$$

Podemos ahora calcular $\vec{g}=\vec{g}_1+\vec{g}_2+\vec{g}_3$ simplemente sumando analíticamente los vectores obtenidos, con lo que resulta:

$$\vec{g} = (-3'34\cdot 10^{-8},\ 0) + (0,\ -6'67\cdot 10^{-8}) + (-2'13\cdot 10^{-9}\ ,\ -1'6\cdot 10^{-9}) = (-3'55\cdot 10^{-8},\ -6'83\cdot 10^{-8})\ \text{N/kg}$$

¿Cómo podemos hallar la fuerza a que estará sometido un cuerpo cuando se coloque en el punto P considerado?

La intensidad del campo gravitatorio en un punto, es una característica intrínseca del campo y su valor coincide con el de la fuerza que actuaría sobre la unidad de masa si la colocásemos en dicho punto (de este modo, podemos comparar las intensidades correspondientes a distintos puntos del campo). Esto hace, que si conocemos la intensidad en un punto P, resulte sencillo determinar la fuerza gravitatoria que actuará sobre cualquier masa que coloquemos en ese punto, mediante la expresión: $\vec{F} = m\cdot\vec{g}$, lo que aplicado a nuestro caso será:

$$\vec{F} = m\cdot\vec{g} = 10\cdot(-3'55\cdot 10^{-8},\ -6'83\cdot 10^{-8}) = (-35'5\cdot 10^{-8},\ -68'3\cdot 10^{-8})\ \text{N}$$

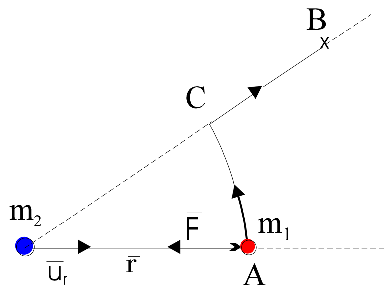
4. Determinad el valor de la Energía potencial gravitatoria de una masa m_1 que se encuentra en el seno del campo gravitatorio generado por otra masa m_2.

Supongamos un cuerpo de masa m_1 que se mueve desde un punto A hasta otro punto B sometido a la acción del campo gravitatorio generado por otro cuerpo de masa m_2. El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria sobre la masa m_1 será:

$$W_A^B = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B}\vec{F}\bullet d\vec{r}$$

donde la fuerza será $\vec{F} = -\dfrac{G\,m_2 m_1}{r^2}\,\vec{u}_r$ y por tanto el trabajo se podrá expresar como:

$$W_A^B = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \frac{G\,m_2 m_1}{r^2}\,\vec{u}_r \bullet d\vec{r} \;=\; -G\,m_2 m_1 \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \frac{\vec{u}_r \bullet d\vec{r}}{r^2}.$$



Para resolver esta integral necesitamos, en principio, conocer la trayectoria seguida por el cuerpo. Tomemos una trayectoria particularmente sencilla (y útil, como veremos a continuación) representada en la figura adjunta.

Podemos descomponer el trabajo en dos sumandos: $W_A^B = W_A^C + W_C^B$ y, como en el trayecto AC la fuerza es siempre perpendicular a la trayectoria (se trata de un trayecto circular con centro en m_2), el trabajo realizado por $\vec{F}$ a lo largo del mismo será nulo, luego:

$$W_A^B = W_C^B \;=\; -G\,m_2 m_1 \int_{\vec{r}_C}^{\vec{r}_B} \frac{\vec{u}_r \bullet d\vec{r}}{r^2}$$

siendo $\vec{u}_r$ un vector unitario que, en todo momento tendrá la misma dirección y sentido que el vector $\vec{r}$, es decir: $\vec{r} = r \cdot \vec{u}_r$, y, como en esta segunda parte del trayecto, $d\vec{r}$ tiene la misma dirección que el vector unitario $\vec{u}_r$, podemos expresarlo como $d\vec{r} = dr \cdot \vec{u}_r$ (donde el escalar dr será positivo si nos alejamos de m_2 y negativo si nos aproximamos a ella).

En estas condiciones $\vec{u}_r \bullet d\vec{r} = (\vec{u}_r \bullet \vec{u}_r) \cdot dr = dr$ y sustituyendo en la integral:

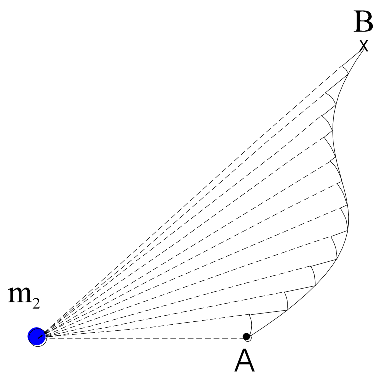
$$W_A^B = W_C^B \;=\; -Gm_2 m_1 \int_{\vec{r}_C}^{\vec{r}_B} \frac{\vec{u}_r \bullet d\vec{r}}{r^2} \;=\; -G\,m_2 m_1 \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} \;=\; -G\,m_2 m_1 \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_C}^{r_B}$$

y como r_C vale lo mismo que r_A, tendremos:

$$W_A^B = -Gm_2 m_1 \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} \;=\; -\,Gm_2 m_1 \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right) = \frac{Gm_2 m_1}{r_B} - \frac{Gm_2 m_1}{r_A}$$

¿Qué sucedería para cualquier otra trayectoria entre los puntos A y B?

No es difícil darse cuenta que siempre podríamos descomponerla en una serie de infinitos y sucesivos desplazamientos infinitesimales según un arco (centrado en m_2) y radiales, tal y como se aprecia en la figura adjunta. En ésta la línea quebrada que se forma no coincide exactamente con la trayectoria, pero es fácil imaginar que para desplazamientos infinitesimales sí que coincidiría prácticamente.



Como solo existe trabajo en los desplazamientos radiales, el trabajo total a lo largo de la trayectoria indicada se podrá evaluar como la suma de los correspondientes a los desplazamientos radiales infinitesimales y su valor coincidirá con el de antes ya que llegaríamos a la misma expresión en función de r_A y r_B .

Así pues, sea cual sea el trayecto seguido entre A y B, el trabajo realizado por $\vec{F}$ será el mismo y, por tanto, la fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa. Si recordamos el concepto de función energía potencial, podemos escribir:

$W_A^B = -\Delta Ep = -(Ep_B - Ep_A)$ e igualando con la expresión del trabajo obtenida antes:

$\dfrac{Gm_2m_1}{r_B} - \dfrac{Gm_2m_1}{r_A} = -(Ep_B - Ep_A)$, lo que implica que: $Ep = \dfrac{-Gm_2m_1}{r} + C$

En la expresión obtenida C es una constante, y su valor dependerá de la situación para la que nos convenga tomar Ep = 0. Lo habitual, por ser lo más cómodo, es definir dicha situación de modo que C resulte 0. Ello supone que para r = ∞ hagamos Ep = 0, ya que así se cumple:

$$0 = \frac{-Gm_2m_1}{\infty} + C \;\rightarrow\; C = 0$$

Recordemos que la energía potencial (gravitatoria o de otro tipo) es una magnitud física que permite determinar de forma sencilla el trabajo realizado por una fuerza conservativa cuando el cuerpo sobre el que actúa se desplaza desde un punto A a otro B. Dicho trabajo, como acabamos de ver, se puede evaluar como una diferencia de Ep entre esos dos puntos, que es independiente de la forma de la trayectoria, de modo que lo que realmente tiene significado es hablar de variaciones de Ep, pero no de valores absolutos de Ep. La Ep puede tomar infinitos valores distintos (tanto como valores distintos podamos asignar a la constante C), mientras que ΔEp solo tendrá un valor.

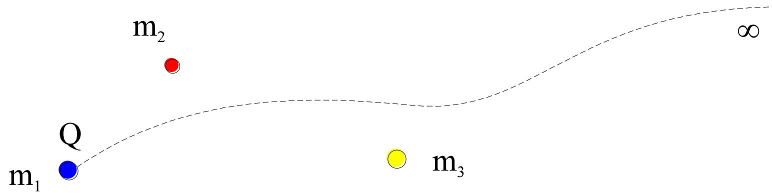
Una vez que definimos Ep = 0 *para* r = ∞ *¿qué interpretación física puede tener el afirmar que la* Ep *de un cuerpo de masa* m_1 *situado en un punto* Q *de un campo gravitatorio creado por otro cuerpo de masa* m_2 *es* $Ep = -Gm_2 m_1/r$*?*

Si analizamos el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando el cuerpo de masa m_1 se traslada desde Q hasta el ∞, podemos escribir: $W_Q^\infty = Ep_Q - Ep_\infty = Ep_Q$ y, de aquí concluimos el significado físico que podemos dar a la Ep de m_1 situada en un punto dado de un campo gravitatorio: Es una magnitud cuyo valor nos indica el trabajo que realizaría la fuerza gravitatoria cuando dicha masa se aleje a una distancia infinita de dicho punto.

5. Diferenciad entre Energía potencial de una masa en una distribución de masas y Energía potencial de la distribución.

Para comenzar, supongamos un sistema formado por un conjunto de cuerpos cuyas masas se puedan considerar como puntuales. ¿Cuál sería la Ep gravitatoria de una de esas masas?

Si seguimos la definición dada en el ejercicio anterior, el valor de esa energía potencial debería de coincidir con el del trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando dicha masa se trasladase desde la posición que ocupa hasta el infinito. Para simplificar, vamos a considerar un sistema formado solo por tres masas m_1, m_2 y m_3 puntuales, como el representado en la figura adjunta.



Cuando m_1 de traslada desde su posición inicial Q hasta el infinito, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria que actúa sobre ella se podrá evaluar como la suma de los trabajos realizados por cada una de las fuerzas gravitatorias actuantes sobre m_1:

$W_Q^{\infty} = W_{F2\,Q}^{\ \ \infty} + W_{F3\,Q}^{\ \ \infty}$ y, por tanto, la Ep de la masa m_1 en la distribución será:

$$Ep_1 = Ep_{12} + Ep_{13} = -\frac{Gm_2 m_1}{r_{12}} - \frac{Gm_3 m_1}{r_{13}}$$

Es decir: La Ep de m_1 será la suma de las energías potenciales que a dicha masa le corresponderán por el hecho de encontrarse en el seno del campo gravitatorio de cada una de las restantes masas que conforman el sistema.

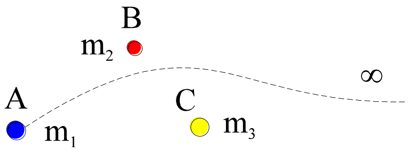
De igual forma podríamos evaluar la energía potencial gravitatoria de la masa m_2 y la de la masa m_3 como $Ep_2 = Ep_{21} + Ep_{23}$ y $Ep_3 = Ep_{31} + Ep_{32}$ respectivamente.

¿Cómo podríamos definir ahora la Ep gravitatoria de una distribución de masas?

Por paralelismo con la definición establecida para una masa en un sistema, podríamos decir que: La energía potencial gravitatoria de un sistema es una magnitud cuyo valor coincide con el trabajo total realizado por la fuerza gravitatoria cuando se trasladen todas estas masas (sucesivamente) desde la posición que ocupan en la distribución hasta el infinito.

Para evaluarla bastará, pues, con imaginar que vamos llevando sucesivamente cada una de las n masas puntuales de que consta la distribución, desde su posición inicial hasta el infinito y calcular, en cada caso, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria del campo creado por las masas que queden. La suma de todos esos trabajos coincidirá con la Ep gravitatoria del sistema.

Para simplificar los cálculos, consideraremos, de nuevo un sistema formado solo por tres masas puntuales m_1, m_2 y m_3, y comenzaremos por calcular el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando m_1 se traslada hasta el infinito:



$W_A^{\infty} = Ep_{12} + Ep_{13} = -\frac{Gm_2 m_1}{r_{12}} - \frac{Gm_3 m_1}{r_{13}}$. Si ahora se traslada m_2 hasta el infinito:

$W_B^{\infty} = Ep_{23} = -\frac{Gm_3 m_2}{r_{23}}$ (ya que solo queda m_3 en la distribución). Finalmente, para m_3:

$W_C^{\infty} = 0$ (ya que al estar cada una de las otras masas a una distancia ∞ la fuerza será nula).

Luego la energía potencial del sistema será: $Ep_{sis} = -\frac{Gm_2 m_1}{r_{12}} - \frac{Gm_3 m_1}{r_{13}} - \frac{Gm_3 m_2}{r_{23}}$

Comparad la expresión que acabamos de obtener con la que resultaría de sumar las Ep correspondientes a cada una de las tres masas consideradas.

Si sumamos las Ep de cada una de las tres masas ($Ep_1 + Ep_2 + Ep_3$) obtenemos:

$$\left(-\frac{Gm_2 m_1}{r_{12}} - \frac{Gm_3 m_1}{r_{13}}\right) + \left(-\frac{Gm_1 m_2}{r_{21}} - \frac{Gm_3 m_2}{r_{23}}\right) + \left(-\frac{Gm_1 m_3}{r_{31}} - \frac{Gm_2 m_3}{r_{32}}\right)$$

Como podemos ver: La suma de las energías potenciales de cada una de las partículas de un sistema no coincide con la energía potencial correspondiente a dicho sistema, aunque, ambas magnitudes están relacionadas, ya que:

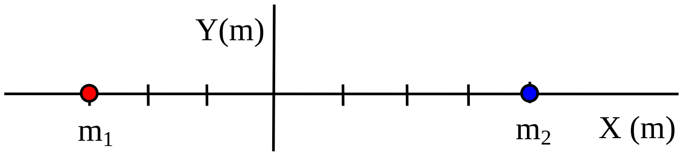
$Ep_{sis} = \frac{1}{2}(Ep_1 + Ep_2 + Ep_3)$ y, en general: $Ep_{sis} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} Ep_i$

Otra forma, equivalente, de expresar el resultado anterior es decir que la energía potencial gravitatoria (o de otro tipo) de un sistema formado por más de dos masas (m_1, m_2, m_3) interaccionando entre ellas, se puede obtener calculando la suma de las energías potenciales de cada pareja de masas, es decir:

$Ep_{sis} = (Ep_{12} + Ep_{13} + Ep_{23})$ y, en general: $Ep_{sis} = \sum_{ij} Ep_{ij}$ $(i \neq j)$

Conviene, pues, diferenciar entre los conceptos de energía potencial gravitatoria (y de cualquier otro tipo) de una partícula situada en un punto dado de un campo (obviamente, <u>si no hay campo y partícula no se puede hablar de Ep</u>) y energía potencial correspondiente a un sistema de partículas.

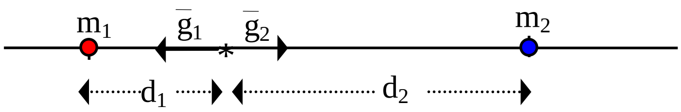
6. En la figura adjunta $m_1 = 10^6$ kg y $m_2 = 4 \cdot 10^6$ kg. Ambas se hallan sobre el eje X a 4 m y 3 m del origen respectivamente. Determinad:



a) Punto en el que la intensidad del campo gravitatorio es nula.
b) Potencial gravitatorio en el origen de coordenadas.
c) Energía potencial gravitatoria de una masa $m_3 = 10^5$ kg situada en el origen.
d) Energía potencial gravitatoria del sistema formado por m_1, m_2 y m_3.

La intensidad del campo gravitatorio resultante creado por las dos masas viene dada por la expresión $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$. Buscamos un punto en el que $\vec{g} = 0$. Antes de proceder a realizar ningún cálculo convendrá que nos planteemos *en qué zona podría estar dicho punto.*

El hecho de que $\vec{g} = 0$ significa que $\vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0$ y, por tanto, que los vectores $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_2$ han de tener el mismo módulo y sentidos contrarios. Como el vector intensidad del campo gravitatorio, creado por una masa que pueda considerarse puntual, siempre se dirige hacia la masa creadora del campo, las posibilidades quedan reducidas al eje X (para que tengan la misma dirección) y entre las dos masas (para que tengan sentido contrario). Además, el punto buscado deberá de estar más próximo a m_1 por ser ésta la masa más pequeña de las dos (si fuesen iguales debería de hallarse justo en el punto medio, pero al no serlo se ha de compensar la diferencia de masa con la distancia).



Proponed un procedimiento para determinar el punto en que $\vec{g} = 0$ *y llevadlo a cabo.*

La intensidad del campo gravitatorio creado por una masa puntual m a una distancia d de la misma, se obtiene mediante:

$$g = Gm/d^2$$

Podemos expresar el módulo de la intensidad del campo debido a cada una de las masas e igualarlos con el fin de obtener la distancia a que se halla el punto que buscamos de alguna de las dos masas. De esta forma:

$$G\frac{m_1}{d_1^2} = G\frac{m_2}{d_2^2} \rightarrow \frac{m_1}{d_1^2} = \frac{m_2}{d_2^2}$$

En la ecuación anterior hay dos incógnitas, pero si tenemos en cuenta que $d_1 + d_2 = d = 7$ m, el problema queda reducido a resolver un sistema de dos ecuaciones para hallar d_1 o d_2:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 \cdot d_2^2 = m_2 \cdot d_1^2 \\ d_1 + d_2 = d \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} d_2 \cdot \sqrt{m_1} = d_1 \cdot \sqrt{m_2} \\ d_1 = d - d_2 \end{array}\right\} \rightarrow d_2 \cdot \sqrt{m_1} = (d - d_2) \cdot \sqrt{m_2}$$ y despejando d_2:

$$d_2 = \frac{d \cdot \sqrt{m_2}}{\sqrt{m_2} + \sqrt{m_1}} \rightarrow d_2 = \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}} = \frac{7}{1 + \sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{7}{1 + 0'5} = \frac{7}{1'5} = 4'7 \text{m.}$$

El resultado es, pues, que el punto en el que $\vec{g} = 0$ está 4'7 m a la izquierda del cuerpo de masa m_2 y que, por tanto, sus coordenadas según el sistema de referencia explícito en la figura del enunciado, serán P (-0'7, 0) m. Si nos fijamos en el resultado literal, podemos ver que, tal y como habíamos supuesto, cuando las masas sean iguales, el punto en el que $\vec{g} = 0$ se situará en la mitad de la recta que las une (d_2 = 3'5 m). El resultado también refleja lo que ocurrirá cuando cambie el valor de las masas. Podemos ver, por ejemplo, que si (manteniendo constantes los demás factores) se aumenta el valor de m_2 la distancia d_2 a la que g = 0, aumentará, es decir el punto P en el que g = 0 se alejará de m_2, etc.

¿Cómo podemos calcular el valor del potencial del campo gravitatorio en el punto origen de coordenadas?

El potencial que buscamos será la suma de los potenciales en ese punto correspondientes a cada una de las masas por separado, y, como se trata de una magnitud escalar:

$$V_0 = V_{10} + V_{20} = \frac{-Gm_1}{r_1} + \frac{-Gm_2}{r_2} = \frac{-6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^6}{3} - \frac{-6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^6}{4} = 8'89 \cdot 10^{-5} \text{ J/kg}$$

El potencial del campo gravitatorio en un punto es una magnitud cuyo valor numérico coincide con el que tendría la energía potencial de una masa unidad colocada en dicho punto. Por tanto, si conocemos el potencial del campo gravitatorio en un punto, resulta sencillo evaluar la energía potencial que correspondería a una masa cualquiera colocada en dicho punto, sin más que aplicar la expresión: Ep = m·V

En nuestro caso, la ecuación anterior queda como: $Ep_0 = m_3 \cdot V_0 = 10^5 \cdot (-8'89 \cdot 10^{-5}) = -8'89$ J

¿Cómo podemos hallar la energía potencial gravitatoria del sistema formado por las tres masas?

Podemos utilizar la expresión: $Ep_{sis} = (Ep_{12} + Ep_{13} + Ep_{23})$

que aplicada a nuestro caso concreto conduce a:

$$Ep_{sis} = -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{21}} + \frac{m_1 m_3}{r_{31}} + \frac{m_2 m_3}{r_{32}}\right) = -6'67 \cdot 10^{-11} \left(\frac{4 \cdot 10^{12}}{7} + \frac{10^{11}}{3} + \frac{4 \cdot 10^{11}}{4}\right)$$

y operando obtenemos finalmente: $Ep_{sis} = -49'96$ J

7. Una masa de 1000 kg se desplaza desde un punto de potencial V_1 = -5 J/kg a otro cuyo potencial es V_2 = -7 J/kg. Calculad el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria e indicad si se trata de una transformación espontánea o forzada. Ídem si el cuerpo se aleja desde el punto de potencial V_1 hasta el infinito.

sol: W_1^2 = 2000 J (transformación espontánea); W_1^∞ = -5000 J (transformación forzada).

8. Determinad la intensidad del campo gravitatorio generado por una varilla homogénea de masa m y longitud L, en un punto situado a distancia d de uno de sus extremos y en la dirección de la varilla.

Sabemos que la intensidad del campo gravitatorio debido a una masa puntual m en un punto P situado a una distancia r de la misma, se puede calcular mediante la expresión:

$$\vec{g} = -\frac{Gm}{r^2}\vec{u}_r$$

en la que $\vec{u}_r$ es un vector unitario con origen en m y dirigido hacia el punto P. Sin embargo, la varilla no es una masa puntual y es evidente que no toda su masa se encuentra a la misma distancia del punto P, de manera que la parte izquierda de la varilla, por estar más alejada, contribuirá menos al campo en P que la parte derecha.

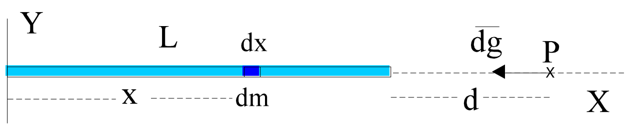
¿Cómo podríamos pues hallar la intensidad del campo gravitatorio en P?

Podemos descomponer la varilla en infinitos elementos de masa dm fraccionándola en infinitos elementos de longitud dL. Cada una de estas masas infinitesimales producirá en el punto P una intensidad:

$$d\vec{g} = -\frac{G\cdot dm}{r^2}\vec{u}_r$$

y, a continuación, proceder a sumar (integrar) todas las intensidades: $\vec{g} = \int d\vec{g}$

Para ello, conviene elegir un sistema de referencia apropiado. En el de la figura adjunta, cada elemento de la varilla tiene una longitud dL = dx y una masa dm, estando situado a una distancia r = (L + d) - x del punto P, de modo que:



$$\vec{g} = \int dg \cdot \vec{i} = \int_0^m \frac{-G \cdot dm}{(L + d - x)^2} \vec{i}$$

donde "dg" es la componente escalar cartesiana del vector $d\vec{g}$ y el vector $\vec{i}$ es un vector unitario siempre en el sentido positivo del eje X.

En la integral anterior existen dos variables *¿cómo podemos reducirlas a una sola?*

Como ya hemos hecho en temas anteriores, podemos utilizar la densidad lineal λ de la varilla (suponiendo que su sección es despreciable frente a su longitud), de modo que:

$\lambda = dm/dL \rightarrow dm = \lambda \cdot dL = \lambda \cdot dx$, *y sustituyendo dm en la integral ya podemos resolverla*:

$$\vec{g} = \int_0^L \frac{-G\lambda dx}{(L + d - x)^2} \vec{i} = -G\lambda\vec{i}\int_0^L \frac{dx}{(L + d - x)^2} = -G\lambda\vec{i}\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{L + d}\right]_0^L$$ y como $\lambda = m/L$, queda:

$$\vec{g} = \frac{-Gm}{(L + d)\,d} \vec{i}$$

La expresión obtenida nos muestra que cuanto mayor sea la distancia d a la que el punto P se encuentra de la varilla, menor será la intensidad del campo gravitatorio en dicho punto.

¿Qué debería ocurrir con la intensidad g en el punto P si éste se alejase tanto de la varilla que la longitud L de la misma fuese mucho menor que la distancia d?

En ese caso, la intensidad del campo gravitatorio creado por la varilla debería de tender a la que corresponde a una masa puntual. Este hecho queda perfectamente reflejado en el resultado obtenido ya que, como podemos ver, para valores de d mucho mayores que L (es decir, para L despreciable frente a d) la expresión se transforma en:

$$\vec{g} = \frac{-Gm}{d^2} \vec{i}$$

que es, justamente, la que corresponde a una masa puntual.

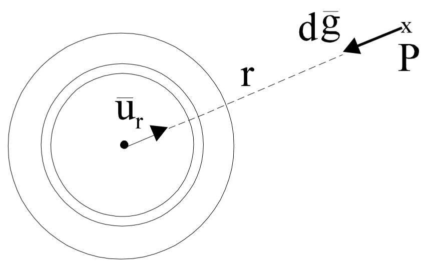
Mediante un proceso similar (aunque con cálculos un poco más complejos) se puede demostrar que la intensidad del campo gravitatorio debido a una esfera hueca de masa m y radio R, en un punto exterior a la misma (situado a una distancia de su centro $r \geq R$), es la misma que correspondería a una masa puntual m situada en el centro de la esfera, y, que para aquellos puntos situados a una distancia $r < R$, la intensidad es nula (como si no existiera masa). De ello haremos uso en problemas posteriores.

9. Determinad la intensidad del campo gravitatorio generado por una esfera maciza y homogénea de masa m y radio R, en un punto P situado a distancia r de su centro.

De acuerdo con lo que hemos señalado en el problema anterior, podemos descomponer la esfera maciza en una serie de infinitas capas esféricas concéntricas de espesor "dr" y masa "dm" (algo parecido a la estructura de una cebolla).

Sugerid y llevad a cabo un procedimiento para calcular la intensidad del campo gravitatorio en un punto P, cuando éste se encuentre a una distancia $r \geq R$ del centro de la esfera maciza considerada.

En este caso cada una de las capas esféricas infinitesimales se comporta como una masa puntual dm situada en su centro y su $d\vec{g}$ correspondiente vendrá dado por la expresión:



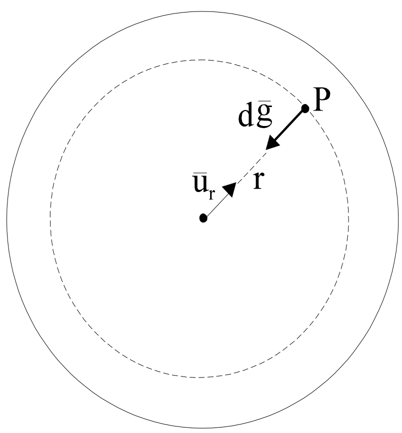
$$d\vec{g} = -\frac{G \cdot dm}{r^2}\vec{u}_r$$ de modo que $$\vec{g} = \int d\vec{g} = \int_0^m \frac{-Gdm}{r^2}\vec{u}_r$$ y como $\vec{r}$ y $\vec{u}_r$ son constantes:

$$\vec{g} = \frac{-G\vec{u}_r}{r^2}\int_0^m dm = -\frac{G \cdot m}{r^2}\vec{u}_r .$$

Vemos, pues, que en el caso considerado, la esfera se comporta como una masa puntual colocada en su centro, con lo que g va disminuyendo con el cuadrado de la distancia r al centro de la esfera.

Sugerid y llevad a cabo un procedimiento para calcular la intensidad del campo gravitatorio en un punto P, cuando éste se encuentre a una distancia $r < R$ del centro de la esfera.

En este caso hemos de distinguir entre dos grupos de capas esféricas: Aquellas cuyo radio sea mayor que r (cuyo efecto en la intensidad del campo gravitatorio en P será nulo) y las que su radio sea inferior o igual a r (que se comportarán como masas puntuales). De esta forma, si llamamos m' a la masa total de todas las capas cuyo radio sea $\leq$ r, tendremos que:



$$\vec{g} = \int_0^{m'} -\frac{Gdm}{r^2}\vec{u}_r = \frac{-G\vec{u}_r}{r^2}\int_0^{m'} dm = -\frac{Gm'}{r^2}\vec{u}_r$$

Utilizando la densidad de la esfera, podemos poner este resultado en función de m y R:

$m' = d \cdot V' = \dfrac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \dfrac{4}{3}\pi r^3 = mr^3/R^3$.

Sustituyendo m' en la ecuación anterior, nos queda: $\vec{g} = -\dfrac{G \cdot m \cdot r}{R^3}\vec{u}_r$

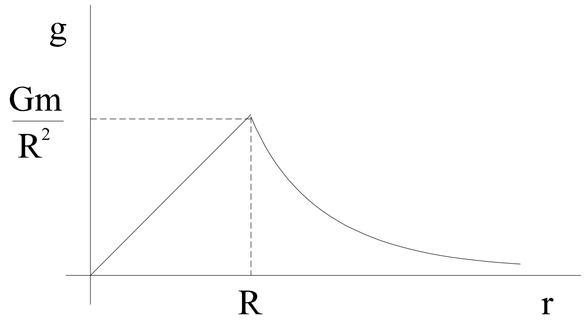
Vemos que el módulo de g, en este caso, es una función lineal de la distancia r al centro de la esfera, de modo que va aumentando conforme aumenta r.

A la vista de los resultados obtenidos *razonad que forma tendrá la gráfica que representa la variación de g con la distancia desde que r = 0 hasta un punto en el que r > R.*

Es evidente que en dicha gráfica se observarán dos tramos:

El primero para valores de r comprendidos entre O y R, donde la función g aumenta linealmente con r.

El segundo, para valores de r mayores que R, donde la función g disminuye con el cuadrado de r.



10. ¿A qué altura de la superficie terrestre la intensidad del campo vale la mitad que en la superficie de la Tierra? (Dad el resultado en función del radio de la Tierra R_T).

El problema es equivalente a que nos pregunten a qué distancia r (mayor que el radio terrestre R_T) del centro de la Tierra el módulo de la intensidad del campo gravitatorio tiene un valor determinado. Sabemos que, en ese caso, la Tierra se comporta como si toda su masa estuviera concentrada en su centro y que, por tanto, la intensidad vendrá dada por:

$g = \dfrac{G \cdot m_T}{r^2} = \dfrac{G \cdot m_T}{(R_T + h)^2}$ y en la superficie de la Tierra será $g_0 = \dfrac{G \cdot m_T}{R_T{}^2}$

¿Cómo podemos calcular el valor de h en el que g vale justamente $g_0/2$*?*

Si imponemos la condición de que g sea igual a $g_0/2$ y después sustituimos el valor de g_0, podemos despejar la h buscada. En efecto:

$\dfrac{g_0}{2} = \dfrac{G \cdot m_T}{(R_T + h)^2}$ y sustituyendo el valor de g_0, nos queda: $\dfrac{G \cdot m_T}{2R_T^2} = \dfrac{G \cdot m_T}{(R_T + h)^2}$

Simplificando obtenemos $2R_T^2 = (R_T + h)^2 \rightarrow \sqrt{2} \cdot R_T = R_T + h$ y despejando h:

$h = (\sqrt{2} - 1) \cdot R_T = 0'41 \cdot R_T$

Si tomamos como valor medio para el radio de la Tierra 6350 km, la altura a la que la intensidad del campo gravitatorio se haría la mitad, corresponde a los 2603'5 km. Una persona situada a esa altura pesaría la mitad de lo que pesa en la superficie de la Tierra.

¿Cuánto valdría g a una altura igual al radio de la Tierra?

Como la intensidad del campo es menor cuanto mayor es la distancia al centro, a primera vista podría pensarse que si la distancia se duplica, la intensidad del campo gravitatorio se reducirá a la mitad. Sin embargo, basta reflexionar un poco para darse cuenta que ello no es así, puesto que g es inversamente proporcional a la distancia al cuadrado (no a la distancia) y, por tanto, lo que ocurrirá es que g se hará cuatro veces menor que en la superficie. En efecto:

Sustituyendo h por R_T en la expresión $g = \dfrac{G \cdot m_T}{(R_T + h)^2}$ obtenemos $g = \dfrac{G \cdot m_T}{4R_T^{\,2}} = g_0/4$

De acuerdo con el resultado anterior, un astronauta situado en una órbita de radio $r = 2R_T$, pesaría allí cuatro veces menos de lo que pesa en la superficie de la Tierra.

11. Si el peso de una persona fuera de la atmósfera terrestre no es 0, ¿por qué se dice que los astronautas que se encuentran en una estación espacial se hallan en estado de ingravidez?

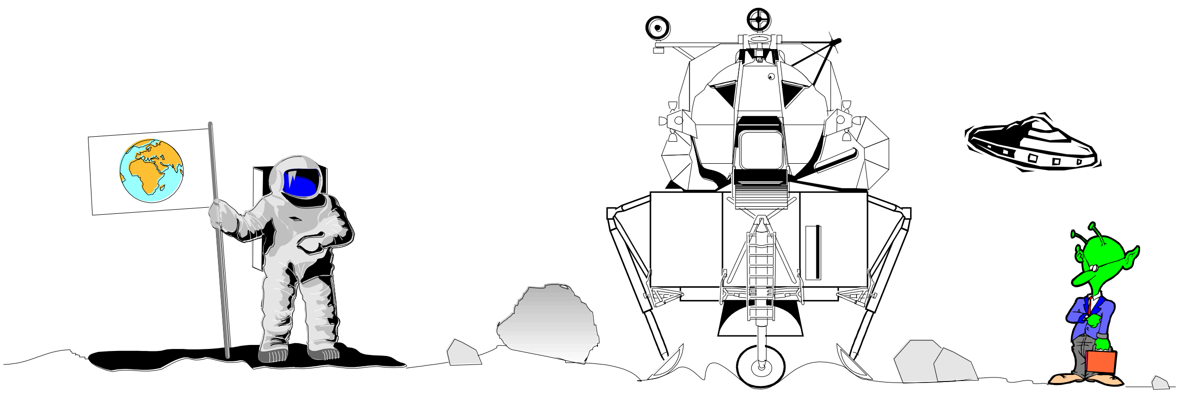
La sensación física que tenemos acerca de nuestro propio peso se debe a la existencia de otras fuerzas que habitualmente lo equilibran. Así, por ejemplo, cuando nos colocamos encima de una balanza de baño en nuestra casa, la fuerza peso con que la Tierra nos atrae es equilibrada por la fuerza ejercida sobre nosotros por el resorte de la balanza. Nosotros notamos esa fuerza, lo mismo que la que nos hace el suelo cuando permanecemos de pie en él y esto nos da la sensación de que pesamos.

A veces, la superficie sobre la que estamos nos hace una fuerza mayor que nuestro peso (y nosotros a ella), por eso notamos **como si** pesáramos más (aunque la Tierra nos sigue atrayendo con la misma fuerza y realmente seguimos pesando igual). Esto ocurre, por ejemplo, en el momento en que un ascensor arranca y acelera hacia arriba. En otros casos ocurre lo contrario y la fuerza que nos hace la superficie (y nosotros a ella) es menor que nuestro peso y, consecuentemente, **nos da la sensación** de que pesamos menos. ¿Qué ocurrirá en aquellos casos en los que la superficie no ejerce ninguna fuerza sobre nosotros o, simplemente, no hay ninguna superficie y estamos en caída libre? En esos casos **nos parecería** que no pesamos nada. Sentimos un estado de "ingravidez" pero eso, naturalmente, no debe interpretarse como que no hay gravedad o que la Tierra ha dejado de atraernos y realmente no pesamos. Esta sensación la experimentan por un tiempo los saltadores de trampolín, los paracaidistas y también (de forma continua) los astronautas que se hallan en órbita en satélites alrededor de la Tierra. Así pues cuando se dice que un astronauta está en estado de "ingravidez" debe entenderse que **se halla en caída libre**, sometido a la acción de la fuerza gravitatoria terrestre sin ninguna otra fuerza que la equilibre, pero no que se encuentre en un lugar donde no exista gravedad (como a veces se piensa identificando, erróneamente, espacio vacío con gravedad nula).

12. Determinad la masa de la Tierra sabiendo que la intensidad del campo en su superficie vale 9’81 N/kg y que el radio medio de la Tierra es 6350 km.

sol: $m_T = 5'93 \cdot 10^{24}$ kg

13. Determinad el valor de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Luna sabiendo que su masa es 81 veces menor que la de la Tierra y su radio 3’66 veces menor. ¿Qué pesará en su superficie un astronauta que en la superficie de la Tierra tiene un peso de 1000 N? (g_{0T} = 9’81 N/kg).



El módulo de la intensidad del campo gravitatorio de la Luna en un punto de su superficie vendrá dado por la expresión:

$$g_{0L} = \frac{G \cdot m_L}{R_L^2}$$

Si supiéramos lo que vale la masa m_L de la Luna y su radio R_L, el cálculo de g_{0L} sería inmediato. Sin embargo no conocemos ninguna de las dos cosas, por lo que se hace necesario *buscar otro procedimiento*.

Podemos expresar m_L y R_L en función de m_T y de R_T, ya que en el enunciado se nos indica que $R_T = 3'66 \cdot R_L$ y que $m_T = 81\ m_L$, de modo que:

$$g_{0L} = G \cdot \frac{\frac{m_T}{81}}{\left(\frac{R_T}{3'66}\right)^2} = \frac{3'66^2}{81} \cdot \frac{G \cdot m_T}{R_T^2} = 0'17 \cdot \frac{G \cdot m_T}{R_T^2} \quad \text{y como } g_{0T} = \frac{G \cdot m_T}{R_T^2} \text{ tendremos:}$$

$$g_{0L} = 0'17 \cdot g_{0T}$$

El resultado obtenido nos muestra que la intensidad del campo gravitatorio lunar (en la superficie de la Luna) es solo el 17 % de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra. Si consideramos que g_{0T} = 9’81 N/kg, obtenemos que:

$g_{0L} = 0'17 \cdot 9'81 = 1'67$ N/kg

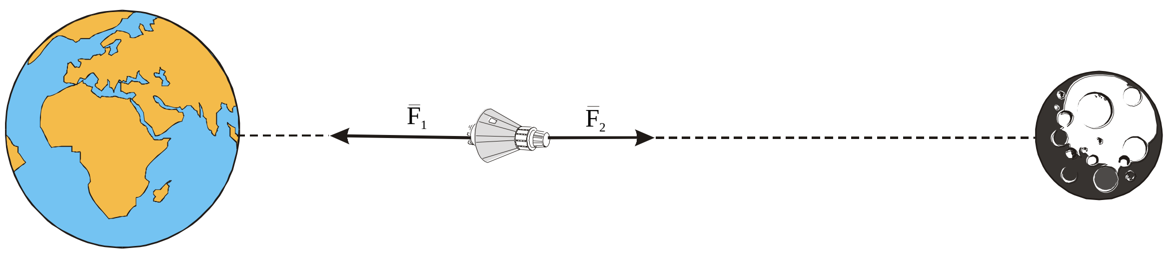
¿Cómo podríamos calcular el peso de un astronauta en la Luna?

Dado que conocemos la intensidad del campo gravitatorio en su superficie no tendríamos sino que aplicar la expresión P = m·g sustituyendo g por g_{0L}. La masa m del astronauta, evidentemente, sería la misma que la que tiene en la Tierra. Para calcularla, podemos utilizar la expresión que nos proporciona su peso en la superficie de la Tierra y despejar m.

$P_{0T} = m \cdot g_{0T}$ de donde $m = P_{0T}/g_{0T} = 1000/9'81 = 101'94$ kg , con lo que su peso en la superficie de la Luna será: $P_{0L} = m \cdot g_{0L} = 101'94 \cdot 1'67 = 170'24$ N, es decir, se reduciría casi a la sexta parte de lo que pesa en la Tierra, o lo que es lo mismo, el astronauta en la Luna pesaría aproximadamente, lo mismo que un niño de 17 kg de masa pesa en la Tierra.

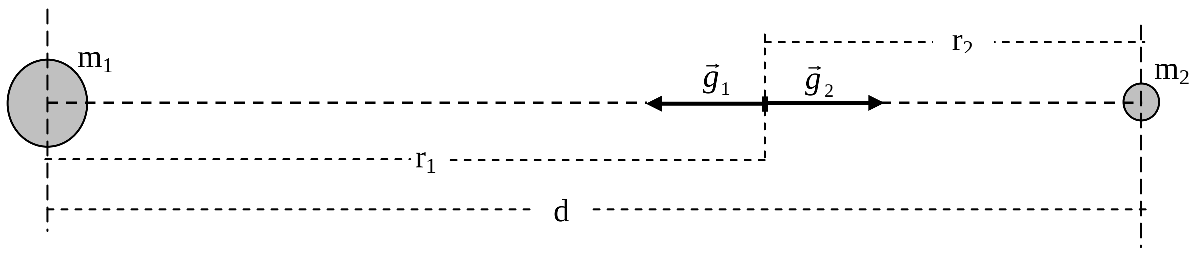
14. ¿En qué punto de la recta que pasa por dos astros la intensidad del campo gravitatorio resultante es 0?

Supongamos un sistema formado por dos astros como, por ejemplo, la Tierra y la Luna, separados entre sí por una cierta distancia. Si una nave se dirige hacia la Luna siguiendo la recta que pasa por ambos astros, resultará del mayor interés conocer en qué punto del trayecto, la fuerza gravitatoria resultante que el sistema ejerce sobre la nave, deja de oponerse a su movimiento y comienza a favorecerlo (análogamente cuando se dirige de la Luna hacia la Tierra). Es evidente que ello se producirá a partir del punto en el que la intensidad del campo gravitatorio sea 0 y que dicho punto deberá estar situado entre ambos astros para que los vectores intensidad tengan sentidos contrarios y que su suma pueda valer 0.



El problema planteado tiene que ver, pues, con algo más general, cómo es el aprovechamiento de los campos gravitatorios en el movimiento de naves y sondas espaciales.

Nos vamos a centrar en el caso de dos astros de masas m_1 y m_2 separados por una gran distancia “d” tal que ambos se puedan considerar como masas puntuales y vamos a calcular a qué distancia r_1 de m_1 el campo gravitatorio de dicho sistema es nulo.



Cabe pensar que r_1 dependa de la distancia d, así como de los valores de m_1 y de m_2, de tal forma que: cuanto mayor sea m_1 y menor sea m_2, tanto mayor será r_1; cuanto mayor sea d, mayor será también r_1. También podemos pensar en algún caso límite o evidente como, por ejemplo: que si m_2 tiende a 0, r_1 tenderá a d; o que si las masas de ambos astros fuesen iguales, $r_1 = d/2$, etc.

Sabemos que en el caso del campo gravitatorio creado por una masa m puntual (o que pueda considerarse como tal), la intensidad del campo en un punto del mismo es una magnitud vectorial cuyo módulo viene dado por $g = Gm/r^2$.

En nuestro caso, la intensidad del campo gravitatorio será $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$. Para que la suma de dos vectores que tienen la misma dirección y sentidos contrarios valga 0, es necesario que sus módulos sean iguales. Por tanto una forma de resolver el problema podría ser igualar g_1 con g_2 y a partir de la ecuación obtenida hallar r_1.

$$g_1 = g_2 \rightarrow \frac{Gm_1}{r_1^2} = \frac{Gm_2}{r_2^2} \rightarrow \frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{r_2^2}$$

y teniendo en cuenta que $r_2 = d - r_1$, nos queda que: $\dfrac{m_1}{r_1^2} = \dfrac{m_2}{(d - r_1)^2}$

Despejando r_1 en la última ecuación, se llega a: $\boxed{r_1 = \dfrac{d}{1 + \sqrt{m_2 / m_1}}}$

A partir de ese punto (suponiendo el caso de la figura anterior), la fuerza con que m_2 atraería a cualquier objeto de masa m sería mayor que la fuerza con que ese mismo objeto sería atraído por m_1 (recordemos que $F = mg$).

El resultado se puede cuantificar sin más que sustituir por valores reales. Por ejemplo, m_1 podría ser la Tierra y m_2 la Luna. En el caso de la Tierra y la Luna, sabiendo que la masa de la primera es unas 81 veces la de la segunda y que la distancia media entre ambos astros es de 384000 km, nos quedaría que: $r_1 = 345600$ km del centro de la Tierra.

Si nos fijamos en el resultado final obtenido podemos ver en primer lugar que es dimensionalmente homogéneo (L en ambos miembros). También que se cumplen nuestras hipótesis de partida ya que, por ejemplo: si m_1 aumenta, r_1 también aumenta; si m_2 tiende a 0, r_1 tiende a d; si $m_1 = m_2$, $r_1 = d/2$, etc.

Una vez resuelto este problema podríamos plantearnos otros más complejos como, por ejemplo, qué hacer en el caso de sistemas con más de dos astros o cómo aprovechar el campo gravitatorio de distintos planetas cuando queremos enviar una sonda espacial a la periferia de nuestro sistema solar, etc.

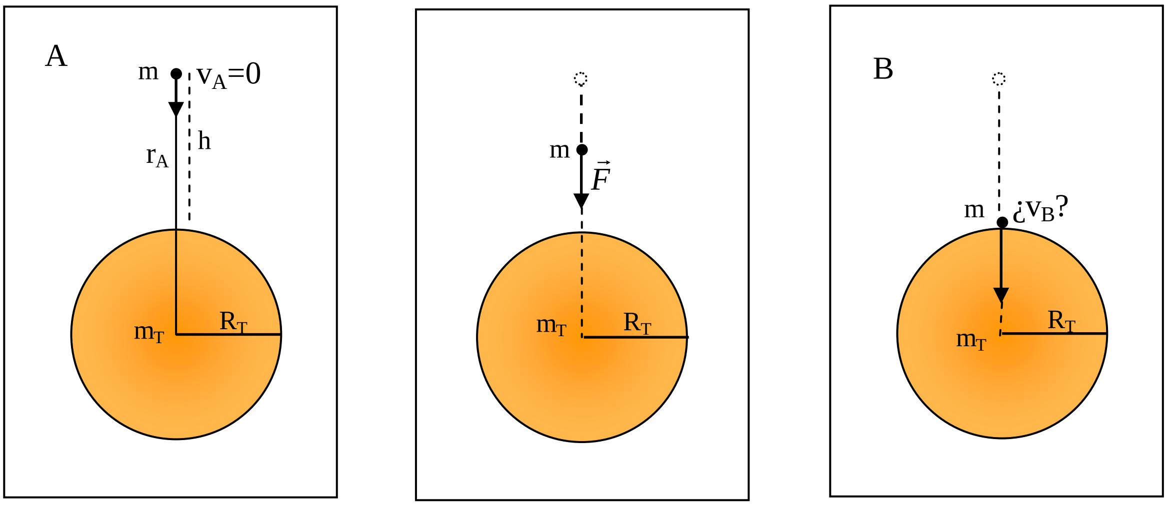
15. Calculad la energía potencial gravitatoria de un cuerpo de 2000 kg de masa
a) En la superficie de la Tierra.
b) A una altura sobre su superficie igual al radio de la Tierra (6350 km).

sol: a) Ep = -1'26 $\cdot 10^{11}$ J; b) Ep = -6'3 $\cdot 10^{10}$ J

16. Determinad la rapidez con que llegaría a la superficie de la Tierra un cuerpo de masa m que se abandonase a una altura igual al radio terrestre. (Para simplificar, ignorar el rozamiento con el aire, intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre g_{0T} = 9'81 N/kg, radio de la Tierra R_T = 6370 km).

Vamos a manejar el sistema formado por un cuerpo de masa m (considerado puntual) y la Tierra (a la que consideraremos inmóvil). Supondremos que el cuerpo se halla a una altura inicial h lo bastante grande como para que **no** se pueda considerar constante a la aceleración de la gravedad.

En cuanto lo soltemos, el cuerpo caerá sometido a la acción de la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra. Como dicha fuerza siempre va dirigida hacia el centro del planeta, el cuerpo tendrá un movimiento rectilíneo hacia el centro de la Tierra, aumentando su velocidad respecto de la Tierra (aunque no de manera uniforme ya que F no es constante sino que va aumentando conforme el cuerpo se acerca a la Tierra). Se trata pues de un movimiento variado y, como consecuencia, la determinación cinemático-dinámica de la rapidez al llegar al suelo, no es una tarea sencilla).



No obstante, cabe esperar que la rapidez v con la que choca, para una masa y un radio de la Tierra que tienen unos valores dados, dependerá de la altura inicial h desde la que lo soltamos de modo que v aumentará cuanto mayor sea el valor de h. Es evidente que si h fuera 0 la v valdría 0. Además, en el caso de que la altura fuese lo bastante pequeña como para que pudiésemos considerar constante la aceleración de la gravedad, el objeto llevaría un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y la rapidez valdría: $v = \sqrt{2g_0h}$ en donde g_0 tendría el valor de la aceleración de la gravedad al nivel del mar (9'81 m/s^2).

Se trata de un problema que tiene un indudable interés práctico en el tema de lanzamiento de satélites, proyectiles, e incluso el posible impacto de meteoritos.

En el sistema considerado no hay fuerzas exteriores y, por tanto, el trabajo exterior es 0. Además, por tratarse de una masa puntual no se produce calor.

Dado que el trabajo exterior es 0, y no hay calentamiento, podemos concluir que, aunque cambie la energía cinética y la energía potencial del sistema, la suma de ambas (energía mecánica) permanecerá constante. Por tanto, una forma sencilla de obtener la rapidez pedida sería aplicar la expresión $W_{ext} = \Delta E$ (donde $E = E_c + E_p$), tomando como estado inicial (A) del sistema cuando se suelta el cuerpo y como estado final (B) la situación del sistema en el momento en que el cuerpo impacta contra el suelo.

Otra posibilidad sería aplicar al cuerpo el teorema de las fuerzas vivas $W_{res} = \Delta Ec$ en donde la fuerza resultante sobre el cuerpo sería la fuerza gravitatoria con que la Tierra lo atrae (cuyo valor iría cambiando con la distancia r al centro de la Tierra).

Siguiendo la primera estrategia y llamando m_T y R_T a la masa y radio de la Tierra respectivamente:

$W_{ext} = \Delta E$;   como $W_{ext} = 0 \rightarrow \Delta E = 0 \rightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = 0$ y sustituyendo:

$$\left(\frac{1}{2}mv_B^2 - 0\right) + \left(-\frac{Gm_T m}{R_T} + \frac{Gm_T m}{r_A}\right) = 0 \;\rightarrow\; v_B = \sqrt{\frac{2Gm_T h}{r_A \cdot R_T}}\,.$$

Teniendo en cuenta que $Gm_T = g_0 \cdot R_T^2$ y que $r_A = R_T + h$: $v_B = \sqrt{\dfrac{2g_0 R_T \cdot h}{R_T + h}}$.

Dividiendo arriba y abajo por h obtenemos: $$\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2g_0 R_T}{(R_T / h) + 1}}}$$

Tras esta resolución literal, podemos sustituir los datos numéricos que nos den y obtener el valor de la rapidez que se demanda, que en este caso resulta ser: $v_B = 7905$ m/s. Se trata de una rapidez enorme (más de 28000 km/h) que conlleva también una enorme energía cinética. Incluso teniendo en cuenta el efecto de frenado de la atmósfera, el posible choque con la Tierra de cualquier satélite espacial averiado, podría tener muy graves consecuencias.

Si nos fijamos en la última expresión obtenida, podemos ver en primer lugar que es dimensionalmente homogénea (L/T en ambos miembros); si no lo fuese es seguro que el resultado sería incorrecto. Por otra parte, tal y como habíamos supuesto, cuanto mayor sea el valor de h, mayor es el valor de la rapidez con que el cuerpo choca contra el suelo.

En cuanto a los casos límite considerados, es evidente que si h = 0 la $v_B = 0$. Además si h es muy pequeño frente a R_T, podemos despreciar el 1 del denominador frente a R_T/h con lo que nos quedaría:

$$v_B = \sqrt{\frac{2g_0 R_T}{(R_T / h)}} = \sqrt{2g_0 \cdot h}$$

que es, precisamente, el resultado obtenido cuando la altura es pequeña y se puede hacer la simplificación de suponer que el movimiento de caída es un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado.

El resultado literal obtenido también nos permite percatarnos de algo que no sabíamos. En principio, cabe pensar que cuanto más lejos de la Tierra se "deje caer" al cuerpo, mayor será la rapidez con que impactará contra el suelo. Ahora bien: ¿se trata de un proceso que no tiene ningún límite? En otras palabras: *¿la rapidez del impacto crece indefinidamente con la distancia h?*

Analizando el resultado anterior podremos contestar a esta importante pregunta:

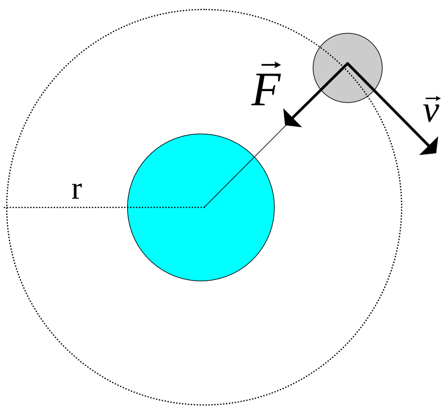
En efecto, si lo hacemos, podemos ver que cuando h $\rightarrow \infty$ resulta que $v_B \rightarrow \sqrt{2g_0R_T}$

de modo que sustituyendo, obtenemos que la máxima rapidez de impacto (partiendo del reposo), resulta ser de unos 11'2 km/s (equivalente a 40320 km/h).

Naturalmente los resultados y conclusiones a que hemos llegado solo son válidos para las condiciones que hemos considerado imperantes en el problema (el objeto parte del reposo hacia la Tierra inmóvil y no incluimos el rozamiento), con lo que el problema podría proseguir cambiando alguna de estas condiciones y viendo cómo eso afecta al resultado. También es posible proponer el problema inverso: *¿Con qué velocidad debería lanzarse un objeto desde la superficie terrestre para que no regresara a ella?*

17. Si la Luna se encontrara a solo 100000 km de la Tierra, ¿cuál sería su periodo de revolución alrededor de la misma?

El movimiento de la Luna alrededor de la Tierra puede considerarse aproximadamente como un movimiento circular y uniforme (a lo largo del tema haremos uso siempre de esta simplificación para estudiar el movimiento de planetas y satélites). De acuerdo con ello la Luna describirá una trayectoria circular sometida exclusivamente a la fuerza de atracción gravitatoria que le ejerce la Tierra. Dicha fuerza estará dirigida hacia el centro de la Tierra y su módulo será siempre constante e igual a $Gm_T \cdot m_L/r^2$ siendo r la distancia entre el centro de la Tierra y el de la Luna.



Para resolver el problema conviene comenzar obteniendo las ecuaciones que rigen el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra.

Las ecuaciones que en las condiciones anteriores regirán el movimiento de la Luna (de trayectoria conocida) son:

$F_t = m_L \cdot a_t$
$F_n = m_L \cdot a_n$

y sustituyendo las fuerzas:

$0 = m_L \cdot a_t \rightarrow a_t = 0$ (movimiento uniforme).
$F = m_L \cdot a_n \rightarrow Gm_T \cdot m_L/r^2 = m_L \cdot v^2/2$

De la segunda ecuación, podemos obtener la rapidez con que gira la Luna $v = \sqrt{\dfrac{Gm_T}{r}}$

En el problema se nos pide que calculemos el periodo de rotación T de la Luna (para un cierto valor de r). La última ecuación anterior nos muestra que cuanto menor sea la distancia r, mayor tendrá que ser la rapidez de giro v (para que el movimiento sea circular y uniforme), por tanto, cabe esperar que el periodo T (tiempo que tarda en dar una vuelta completa) disminuya conforme lo haga r (ya que la v debe ser mayor). El problema puede resolverse, pues, *obteniendo la ecuación que relaciona v con T*.

Al tratarse de un movimiento circular la rapidez lineal v estará relacionada con la angular mediante $v = w \cdot r$ y como además es uniforme, w será constante y valdrá $w = \Delta\theta/\Delta t$. Para una vuelta $\Delta\theta = 2\pi$ radianes e $\Delta t = T$, luego $w = 2\pi/T \rightarrow T = 2\pi/w = 2\pi r/v$

Sustituyendo ahora v por su expresión nos queda: $T = \dfrac{2\pi r}{\sqrt{\dfrac{Gm_T}{r}}}$

Por otra parte, hemos visto que $G \cdot m_T = g_{0T} \cdot R_T^2$ y sustituyendo en la expresión anterior:

$$T = \frac{2\pi}{R_T \sqrt{g_{0T}}} \cdot \sqrt{r^3} = 3'6 \text{ días.}$$

Si analizamos el resultado literal anterior, vemos que es dimensionalmente homogéneo (**T** a ambos lados de la igualdad) y que, efectivamente, el periodo de rotación depende de la distancia r, de forma que al disminuir r disminuye T (más precisamente, el cuadrado del periodo es directamente proporcional al cubo del radio). En este caso concreto, el periodo de rotación de la Luna alrededor de la Tierra pasaría de ser 27’3 días a solo 3’6 días. El resultado también es aplicable a otros astros en su movimiento de rotación alrededor del Sol (en la ecuación habría que cambiar R_T y g_{0T} por los valores correspondientes al Sol), lo que hace que el periodo de rotación vaya disminuyendo desde los aproximadamente 250 años que tarda Plutón hasta los 88 días del planeta Mercurio.

18. Sabiendo que la Luna tiene un periodo de revolución T = 27’3 días. Determinad la distancia Tierra-Luna. (Masa de la Tierra $m_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg).

sol: $r = 3'84 \cdot 10^8$ m = 384.000 km

19. Determinad el radio de la órbita geoestacionaria de la Tierra (R_T = 6350 km).

sol: r = 41.910 km (35.560 km sobre la superficie terrestre).

20. Determinad la mínima rapidez con que debería lanzarse, desde la superficie de la Tierra, un objeto de masa m para que, en ausencia de rozamiento, consiga escapar del campo gravitatorio terrestre. (Considerad R_T = 6350 Km y g_{0T} = 9'81 N/kg).

Para que un objeto de masa m no vuelva a caer sobre la superficie de la Tierra, tras ser lanzado desde su superficie con una cierta rapidez, será necesario que consiga escapar del campo gravitatorio terrestre. Para ello debe alejarse a una distancia infinita de la Tierra, donde la fuerza de atracción gravitatoria ejercida por ésta valdrá 0. Por tanto, el valor mínimo de la velocidad de lanzamiento (o velocidad de escape) será el menor valor necesario para que el objeto pueda llegar al infinito con velocidad final nula. Durante el trayecto la fuerza de atracción gravitatoria ejercida por la Tierra, hará que disminuya la velocidad con que el objeto se aleja de ella. Utilizando consideraciones de trabajo y energía, podemos decir que el trabajo resultante producirá una disminución de la energía cinética.

En el problema se nos pide el valor de la velocidad de escape. *¿Cómo podría obtenerse?*

Una forma de abordar el problema es aplicando la expresión que relaciona el trabajo resultante sobre el objeto con el cambio experimentado por la energía cinética entre los estados A (cuando es lanzado) y B (cuando llega al infinito con rapidez final nula) y, a partir de la ecuación obtenida, despejar v_A.

Procederemos, pues a *resolver el problema de acuerdo con la estrategia indicada*:

$$W_{res\,A}^{\;B} = \Delta Ec \rightarrow W_{P\,A}^{\;B} = \Delta Ec$$

(Estamos suponiendo que la única fuerza que actúa sobre el objeto es la gravitatoria ejercida por la Tierra).

Como la fuerza gravitatoria es conservativa: $W_{P\,A}^{\;B} = -\Delta Ep$, de modo que: $-\Delta Ep = \Delta Ec$.

Esta expresión puede ponerse como $Ep_A + Ec_A = Ep_B + Ec_B$, en la que:

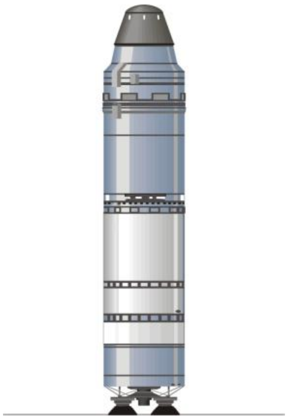
$Ep_A = -GMm/R_T$; $Ep_B = 0$; $Ec_B = 0$; $Ec_A = \dfrac{mv_A^2}{2}$ y sustituyendo:

$-GMm/R_T = -\dfrac{mv_A^2}{2}$. Despejando obtenemos $v_A = \sqrt{\dfrac{2GM}{R_T}}$

Finalmente, como $G \cdot m_T = g_{0T} \cdot R_T^2$, obtenemos que $v_A = \sqrt{2g_{0T} \cdot R_T} = 1'12 \cdot 10^4$ m/s

El resultado obtenido es aplicable también a cualquier otro planeta (sustituyendo g_0 y R por los valores correspondientes a dicho planeta). En el caso de la Tierra, el valor mínimo de la velocidad con que habría que lanzar un cuerpo (de cualquier masa) para que no regrese de nuevo atraído por la gravedad terrestre (velocidad de escape) sería de 11'2 km/s (considerando nula la fricción con la atmósfera).

21. Un satélite artificial, de 10^3 kg de masa, se eleva hasta cierta altura desde la superficie de la Tierra. Una vez allí, es impulsado mediante cohetes propulsores para que pueda describir una órbita circular alrededor de la Tierra, con un movimiento circular uniforme, de periodo T = 1'5 horas. Determinad:



a) Radio de la órbita que describe.
b) Rapidez con que se mueve en dicha órbita.
c) Energía total suministrada para situarlo en la órbita.

Datos: R_T = 6370 km; g_0 = 9'8 N/kg

Para resolver el problema, conviene que *obtengamos primero las ecuaciones que rigen el movimiento del satélite en órbita alrededor de la Tierra*.

$F_t = m_S \cdot a_t \rightarrow 0 = m_S \cdot a_t \rightarrow a_t = 0$ (movimiento uniforme).
$F_n = m_S \cdot a_n \rightarrow F = m_S \cdot a_n \rightarrow Gm_T \cdot m_S/r^2 = m_S \cdot v^2/r$

De la segunda ecuación, podemos obtener la rapidez de giro $v = \sqrt{\dfrac{Gm_T}{r}}$, que, como podemos ver, tendrá que ser tanto mayor cuanto mayor sea el radio que se quiera dar a la órbita del satélite.

¿Cómo podríamos calcular el radio de la órbita?

Si conociésemos la rapidez v con que se mueve el satélite la obtención de r mediante la ecuación anterior sería inmediata, pero lo que conocemos es el periodo T de revolución. No obstante, dicho periodo está relacionado con v, ya que es evidente que cuanto menor sea T, con mayor rapidez ha de girar el satélite. Obteniendo, pues, la relación entre v y T podremos resolver el problema.

Como la rapidez lineal v está relacionada con la angular w mediante $v = w \cdot r$ y al ser un movimiento circular uniforme $w = 2\pi/T$, podemos expresar v como $v = 2\pi r/T$, de forma que sustituyendo en la ecuación anterior:

$$v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}}\text{, obtenemos } 2\pi r/T = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}} \text{ y despejando, } r = \sqrt[3]{\frac{Gm_T T^2}{4\pi^2}}$$

El resultado obtenido puede ponerse en función de g_{0T} y de R_T si tenemos en cuenta que, como ya sabemos, $G \cdot m_T = g_{0T} \cdot R_T^2$ y obtener así finalmente, que:

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_{0T} \cdot R_T^2 \cdot T^2}{4\pi^2}} = 6'65 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Podemos ahora *proceder a calcular la rapidez lineal del satélite.*

Basta con sustituir el resultado obtenido para r en la ecuación v = 2πr/T, con lo que se obtiene v = 7737'6 m/s

Para terminar, hemos de *calcular la energía suministrada para situarlo en órbita*

Dicha energía proviene del propio satélite. El proceso consiste pues en una disminución de energía interna (de origen químico) que se traduce en un aumento de la energía mecánica. Como es lógico, considerando el sistema satélite-Tierra, esa energía será la diferencia entre la energía mecánica del sistema en la situación B (satélite en órbita) y la energía mecánica del sistema en la situación A (satélite en reposo sobre la superficie terrestre).

$$\Delta E = E_B - E_A = \left(Ec_B + Ep_B\right) - Ep_A$$

Teniendo en cuenta que: $Ep_A = -Gm_T \cdot m_S/R_T$, $Ep_B = -Gm_T \cdot m_S/r$, $Ec_B = m_S v^2/2$

$$\Delta E = \frac{m_s \cdot v^2}{2} + \left(-\frac{Gm_T \cdot m_s}{r}\right) - \left(-\frac{Gm_T \cdot m_s}{R_T}\right)$$

Teniendo en cuenta que $v = \sqrt{\dfrac{Gm_T}{r}}$

$$\Delta E = \left(\frac{Gm_T \cdot m_s}{2r} - \frac{Gm_T \cdot m_s}{r}\right) - \left(-\frac{Gm_T \cdot m_s}{R_T}\right) = \left(-\frac{Gm_T \cdot m_s}{2r}\right) - \left(-\frac{Gm_T \cdot m_s}{R_T}\right)$$

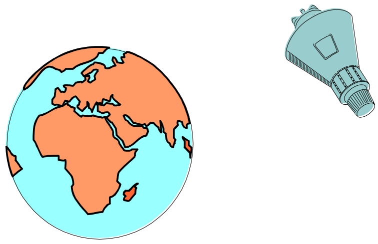
El primer paréntesis de la expresión anterior, corresponde a la energía mecánica del sistema formado por la Tierra y un satélite en órbita (MCU) alrededor de ella. Análogamente, el segundo paréntesis corresponde a la energía mecánica del sistema en la situación inicial (satélite en reposo sobre la superficie terrestre).

Teniendo ahora en cuenta que $Gm_T = g_0 \cdot R_T^2$ y simplificando, obtenemos finalmente:

$\Delta \mathrm{E} = \mathrm{g}_0 \cdot \mathrm{m}_\mathrm{S} \cdot \left(\mathrm{R}_\mathrm{T} - \dfrac{\mathrm{R}_\mathrm{T}^2}{2\mathrm{r}}\right)$ y sustituyendo valores numéricos: $\Delta E = 3'2 \cdot 10^{10}$ J

Conviene tener en cuenta que lo que hemos obtenido es el valor teórico de la energía que se necesitaría para colocar en órbita un satélite de una masa dada en unas condiciones determinadas. Como dicha energía ha de obtenerse de un combustible, en realidad se necesitará una energía mayor, ya que junto con el satélite es necesario elevar también los tanques llenos de los materiales utilizados como combustible (que se irán consumiendo, con lo que la masa cambiará). Además, hemos ignorado el efecto del rozamiento con el aire, el cual no es nada despreciable, dada la gran velocidad a la que el satélite atraviesa la atmósfera.

22. Un satélite de 1000 kg de masa se encuentra en órbita terrestre de radio $3R_T$. Determinad: a) Rapidez y periodo de revolución; b) Trabajo realizado por el motor del satélite al pasar a otra órbita de radio $2R_T$. Datos: $g_0 = 9'81$ N/kg ; $R_T = 6350$ km.



sol: a) v = 4556’6 m/s; T = 0’3 días.   b) $-5'2 \cdot 10^9$J

23. Determinad la energía necesaria para situar en órbita terrestre de un radio igual a dos veces el de la Tierra un cuerpo de 10^4 kg de masa.

sol: $E = 4'67 \cdot 10^{11}$ J

24. Un satélite artificial de 100 kg está girando alrededor de la Tierra y a una altura de 400 km sobre su superficie. Calculad:

a) La rapidez del satélite.
b) Supuesto que no existe rozamiento, la energía necesaria para situarlo en órbita.

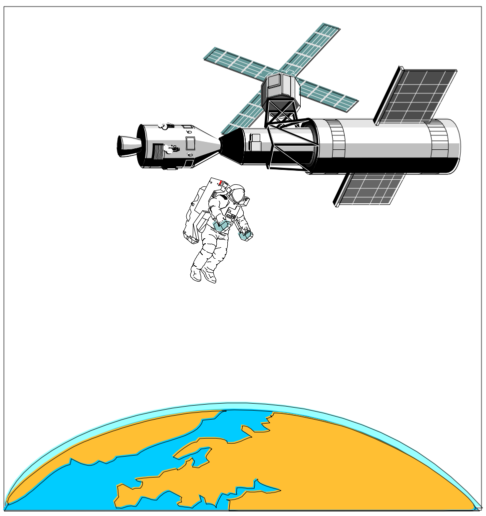
sol: $v = 7'76 \cdot 10^3$ m/s; $\Delta E = 3'39 \cdot 10^9$ J

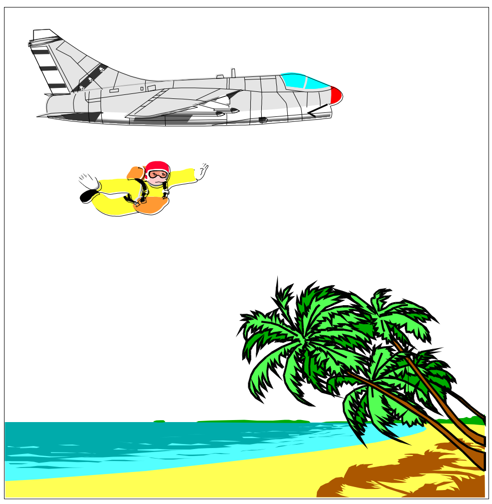
25. Un satélite de 10^4 kg se sitúa en órbita terrestre de periodo 3 horas. Sabiendo que $g_0 = 9'81$ N/kg y que $R_T = 6350$ km. Determinad:

a) Radio de la órbita que ocupa, rapidez con la que se desplaza y aceleración a la que se encuentra sometido.
b) Si desde la órbita anterior cambia a otra de radio 15000 km, calculad el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria y la energía necesaria para dicho cambio.

sol: a) r = 10533'4 km, v = 6128 m/s, $a = 3'56$ m/s^2; b) $W_{Fg} = -1'12 \cdot 10^{11}$ J, $\Delta E = 5'6 \cdot 10^{10}$ J

26. Un astronauta sale al exterior de la estación espacial a arreglar una avería, al mismo tiempo que un paracaidista se deja caer desde un avión. Comparad el movimiento de ambas personas señalando las semejanzas y diferencias existentes.





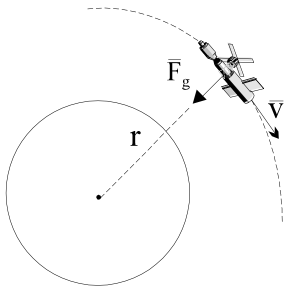
Para resolver este problema comenzaremos por *estudiar cada uno de los movimientos por separado, analizando las fuerzas que actúan en cada caso*.

a) La estación espacial se desplaza en su órbita sin necesidad de ninguna propulsión, ya sobre ella se supone que solo actúa la fuerza gravitatoria terrestre, cuyo único efecto es impedir que la nave continúe con movimiento rectilíneo y uniforme en la dirección de la tangente (como haría si en un momento dado desapareciera el campo gravitatorio en el que se encuentra). Por tanto, la fuerza gravitatoria, perpendicular en todo momento a la velocidad de la estación y dirigida hacia el centro de la Tierra, produce un cambio constante solo en la dirección del vector velocidad, haciendo que el movimiento sea circular y uniforme, lo que cinemáticamente significa que:

$a_t = 0$; $a_n = v^2/r =$ constante.

Y dinámicamente:

$F_t = m_e \cdot a_t \rightarrow \ F_t = 0$
$F_n = m_e \cdot a_n \rightarrow \ F_n = m_e \cdot v^2/r$



La estación espacial, pues, deberá de estar sometida a una fuerza constante, perpendicular a la trayectoria y de valor $m_e \cdot v^2/r$ (siendo m_e su masa, v la rapidez lineal con que gira y r el radio de la órbita descrita). *¿Quién ejerce dicha fuerza?*

La única fuerza que actúa sobre la estación (en el sistema considerado) es la de atracción gravitatoria F_g, que ejerce la Tierra. Dicha fuerza al estar dirigida en todo momento hacia el centro de la Tierra será siempre normal a la trayectoria. Por tanto, deberá cumplirse que:

$$F_g = F_n \rightarrow F_g = m_e \cdot v^2/r \rightarrow Gm_T \cdot m_e/r^2 = m_e \cdot v^2/r \rightarrow \ v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}} \ .$$

La expresión anterior nos muestra la rapidez que debe llevar la estación espacial para mantenerse en una órbita dada y que su valor depende del radio de la órbita (cuanto menor sea r mayor será la rapidez requerida) y de una constante, pero no de la masa de la estación. Cualquier cuerpo que se encuentre a la misma distancia de la Tierra y con la misma velocidad (perpendicular a $\vec{F}_g$ y de módulo $\sqrt{\frac{Gm_T}{r}}$) describirá el mismo movimiento orbital. Esto es lo que le ocurrirá al astronauta cuando salga, ya que su velocidad es la misma que la de la estación, por lo que permanecerá constantemente junto a la nave animado del mismo movimiento circular y uniforme que ella.

b) El avión, si suponemos que se desplaza paralelamente a la superficie terrestre, describe también un movimiento circular (aunque su órbita es de mucho menor radio que la de la estación espacial) y si su rapidez es constante será también uniforme, de manera que las condiciones cinemáticas y dinámicas serán las mismas que para la estación espacial:

$a'_t = 0$; $a'_n = v'^2/r' = cte$ y $F'_t = m_a \cdot a'_t \rightarrow F'_t = 0$; $F'_n = m_a \cdot a'_n \rightarrow F'_n = m_a \cdot v'^2/r'$

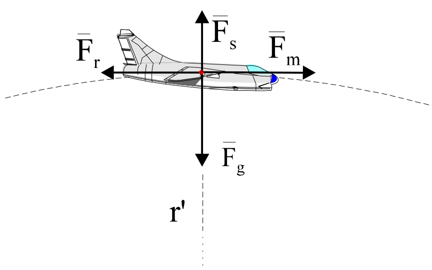
Si sustituyésemos F'_n por $F_g = Gm_T \cdot m_a/r'^2$ obtendríamos $v' = \sqrt{\dfrac{Gm_T}{r'}}$

Esta es la rapidez a la que debería de volar el avión, pero si la calculamos, veremos que nos sale un valor tremendamente elevado (más de 28000 km/h), muy superior a la rapidez máxima que puede alcanzar cualquier avión.

¿Cómo puede entonces el avión mantenerse en su trayectoria, con un movimiento circular y uniforme si la rapidez con que vuela (que llamaremos v") es mucho menor que la que, en principio se requiere, v'?

El movimiento del avión, debido a que se realiza dentro de la atmósfera, no es tan sencillo como el de la estación espacial. Para empezar, gracias a que el rozamiento con el aire no es despreciable, los aviones pueden volar y los paracaidistas sobrevivir. Sobre el avión actúan dos tipos de fuerzas: Una la de rozamiento "por deslizamiento" $\vec{F}_r$, que se ejerce siempre en sentido contrario al vector velocidad del avión $\vec{v}''$ y otra la debida a la diferencia de presión que se origina en la parte superior e inferior de sus alas (que llamaremos $\vec{F}_s$ o de sustentación), que actúa en sentido contrario a la fuerza gravitatoria $\vec{F}_g$.

Por tanto, sobre el avión se ejercen en realidad cuatro fuerzas: $\vec{F}_m$ debida a los motores[1], $\vec{F}_g$, $\vec{F}_s$ y $\vec{F}_r$.



Las ecuaciones del movimiento serán ahora:

$F''_t = m_a \cdot a''_t \rightarrow F_m - F_r = 0 \rightarrow F_m = F_r$
$F''_n = m_a \cdot a''_n \rightarrow F_g - F_s = m_a \cdot v''^2/r'$

Analizando la primera ecuación, constatamos que la fuerza que ejercen los motores compensa a la de rozamiento con el aire y de esa forma la rapidez se mantiene constante. De la segunda se aprecia que parte de la fuerza de atracción gravitatoria se compensa con la fuerza de sustentación, lo que explica que con una rapidez v" mucho menor que la, en principio, requerida v' el avión pueda describir un movimiento circular.

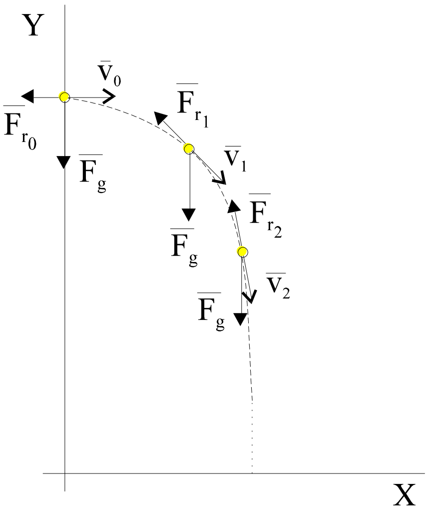
$$v'' = \sqrt{\frac{F_g - F_s}{m_a}} = \sqrt{\frac{Gm_T}{r'} - \frac{F_s}{m_a}}$$

c) Respecto al paracaidista, en cuanto abandone el avión, sobre el no actuarán ni $\vec{F}_m$ ni $\vec{F}_s$. De inmediato, pues, al estar dotado de la misma velocidad que el avión pero sin F_s, existirá una fuerza en la dirección normal y hacia el centro de la Tierra (cuyo valor vendrá

[1] En realidad la fuerza que empuja a un avión a reacción hacia delante es ejercida por el aire y otros gases que son expulsados hacia atrás, como consecuencia de la compresión y combustión que tiene lugar en los turbo-rreactores.

dado por $F_g = Gm_T \cdot m_p/r'^2$, siendo m_p la masa del paracaidista). Si el rozamiento del paracaidista con el aire se pudiese considerar despreciable, su movimiento sería como el del astronauta, sometido únicamente a la acción de la fuerza gravitatoria, pero con la diferencia de que, en este caso, dicha fuerza resulta demasiado grande para la rapidez v'' con que se mueve el paracaidista y el radio de la trayectoria r' que estaba describiendo hasta entonces, es decir: $F_g >> m_p v''^2/r'$ y, en consecuencia, el radio r' disminuiría.

Si queremos estudiar el movimiento del paracaidista con más detenimiento, podríamos considerar un fragmento de la superficie de la Tierra comparable con la altura a que se encuentra el avión. En esas circunstancias y debido al valor tan grande del radio terrestre (comparado con dicha altura), podríamos suponer que la superficie de la Tierra es plana y el movimiento del paracaidista sería el representado en la figura adjunta. En ella se puede apreciar que al salir del avión tiene la misma velocidad horizontal que éste.



A partir de ese momento, queda sometido a la acción de $\vec{F}_r$ y de $\vec{F}_g$ produciéndose una disminución, desde v'', de la componente X del vector velocidad y un aumento, desde 0, de su componente Y (aunque en el sentido escogido como negativo). En poco trayecto, la componte X de la velocidad se habrá anulado prácticamente y a partir de entonces el paracaidista experimentará una caída casi vertical, con una rapidez creciente (en valor absoluto) hasta que se alcance un valor límite debido a que la fuerza de rozamiento con el aire aumenta conforme aumenta la rapidez con que cae. Si tal y como le conviene, utiliza el paracaídas, el valor de dicha rapidez límite será mucho menor impidiendo que colisione con el suelo a gran velocidad.

27. En una nave espacial que gira en órbita alrededor de la Tierra con movimiento circular y uniforme, hay un péndulo simple que cuelga del "techo" de la misma. Razonad cómo será el periodo de oscilación del péndulo en dicha situación respecto a su valor en la superficie de la Tierra:

(Dato: El periodo de un péndulo simple viene dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ **)**

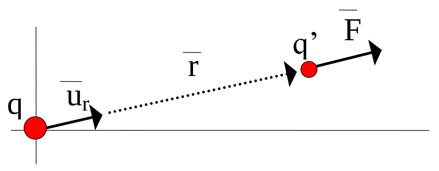
sol: En las condiciones dadas en el enunciado el péndulo no oscila porque la tensión del hilo es 0. El péndulo se desplaza a la misma velocidad que la nave, que es la velocidad idónea para la órbita en la que se encuentra y la fuerza gravitatoria existente sobre él tiene como único efecto modificar la dirección de su velocidad (el hilo no hace nada sobre el cuerpo).

8. CAMPO ELÉCTRICO

1. Obtened la expresión que nos permite calcular la intensidad $\vec{E}$ del campo eléctrico creado por una carga eléctrica q, que puede considerarse como puntual, a una distancia r de la misma.

Sabemos que siempre que se sitúe una carga q' en cualquier punto de un campo eléctrico, se verá sometida a una fuerza. En caso de que el campo se deba a una carga q que podamos considerar como puntual, dicha fuerza vendrá dada mediante la expresión de la ley de Coulomb:

$$\vec{F} = K\frac{q\,q'}{r^2}\vec{u}_r$$



en la que al valor numérico de cada carga hay que acompañarlo del signo correspondiente para indicar así el sentido de la fuerza $\vec{F}$ (en el ejemplo de la figura ambas cargas son del mismo signo). Dicha fuerza, no constituye una magnitud apropiada para caracterizar el campo eléctrico creado por la carga q, ya que en cada punto puede tomar infinitos valores diferentes (tantos como pueda tomar la carga q' allí situada). Para poder solucionar este problema, es necesario introducir una nueva magnitud que cumpla las siguientes condiciones:

a) Que su valor en cada punto del campo dependa únicamente de la carga creadora del campo y de la distancia a que dicho punto se encuentre de ella.

b) Que, conocida esa magnitud en un punto dado, se pueda calcular fácilmente la fuerza que se ejercería sobre cualquier carga q' que se colocase en ese punto.

Proponed una magnitud que cumpla las condiciones anteriores.

Si nos fijamos en la expresión anterior, que nos sirve para calcular la fuerza ejercida sobre una carga q' situada a una distancia r de q, nos podemos dar cuenta que una función que cumpliría con los requisitos impuestos sería:

$$\vec{E} = K\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

ya que en cada punto tomará un valor distinto y, conocido este, podemos calcular fácilmente la fuerza que se ejercería sobre cualquier carga q' que se colocase en ese punto sin más que aplicar: $\vec{F} = q'\cdot\vec{E}$.

A la función $\vec{E}$ anterior, se le denomina intensidad del campo creado por la carga puntual q. Tal y como ha sido definida, la intensidad del campo eléctrico en un punto será totalmente independiente de que en dicho punto se coloque o no carga alguna, de manera que siempre podemos caracterizar un campo eléctrico por el vector $\vec{E}$ que corresponde a cada punto del mismo. El módulo, de dicho vector dependerá del valor de la carga q creadora del campo y de la distancia r a que el punto considerado se encuentre de ella. Su dirección será la de la recta que une la carga q con el punto, y el signo de q determinará el sentido de $\vec{E}$ (hacia q si ésta es negativa y al contrario si es positiva).

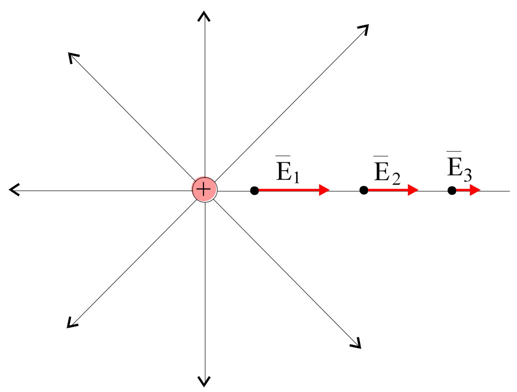
Por otra parte, si analizamos la expresión $\vec{F} = q' \cdot \vec{E}$, podemos ver que el valor de la intensidad del campo $\vec{E}$ en un punto cualquiera coincidirá con el valor de la fuerza que actuaría sobre la unidad de carga positiva si se colocase en dicho punto[2]. Cuanto mayor sea la intensidad del campo eléctrico en un punto, mayor fuerza se ejercerá sobre cualquier carga dada que se coloque en dicho punto.

2. Representad el campo generado por una carga puntual y positiva mediante las líneas de campo y las superficies equipotenciales.

Las líneas de campo se definen como unas líneas que en todos sus puntos son tangentes al vector intensidad de campo y tienen su mismo sentido. Por otra parte, la intensidad del campo generado por una carga puntual viene dada por:

$$\vec{E} = K\frac{q}{r^2}\vec{u}_r,$$

donde r es el módulo del vector $\vec{r}$ con origen en q y sentido hacia el punto donde se va a evaluar $\vec{E}$, y $\vec{u}_r$ un vector unitario de la misma dirección y sentido que $\vec{r}$. Por tanto, $\vec{E}$ es un vector que en todo punto tiene una dirección radial con centro en la carga q y, como consecuencia, la línea del campo tendrá que ser también radial para permanecer en todos sus puntos tangente a $\vec{E}$. En la figura adjunta se ha representado esta situación para el caso del campo creado por una carga q puntual y positiva.



Fijémonos que al alejarnos de la carga q las líneas del campo se separan a la vez que el módulo de $\vec{E}$ disminuye. Esta propiedad se cumple en cualquier campo eléctrico, lo que permite con una simple observación determinar en qué lugares éste es más intenso (allí donde las líneas del campo estén más próximas).

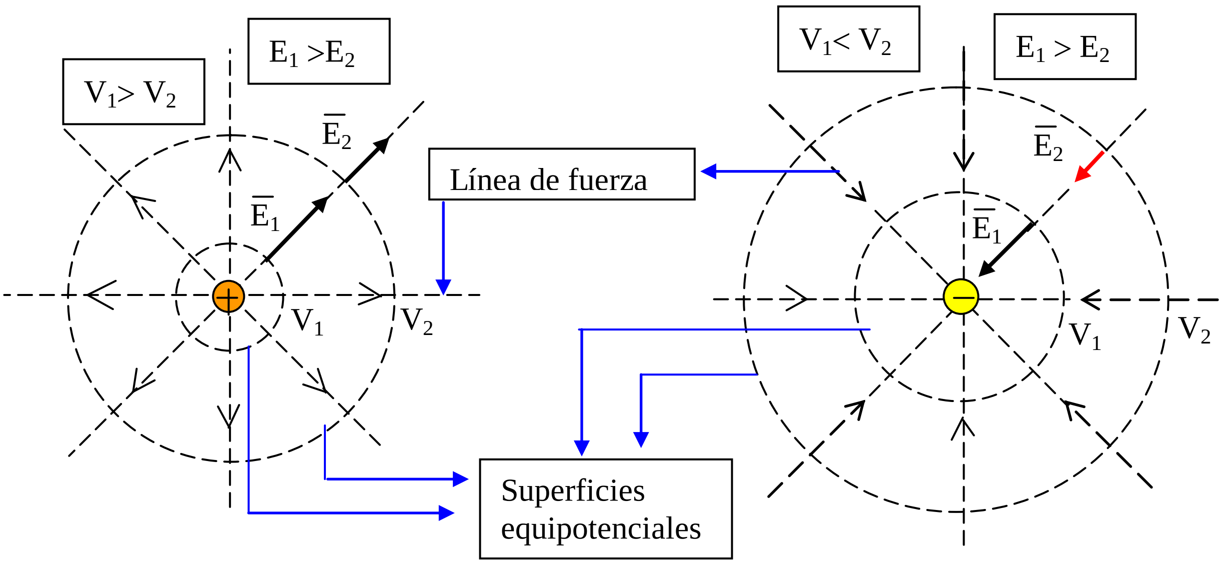
[2] Atención: Esa coincidencia es únicamente numérica y nunca debe interpretarse como que la intensidad del campo eléctrico en un punto ES la fuerza ejercida sobre la unidad de carga positiva… Una cosa es Fuerza y otra Intensidad de campo. Son dos magnitudes diferentes.

Se entiende por superficie equipotencial aquella superficie constituida por puntos en los que el potencial vale lo mismo. Si la carga creadora del campo se puede considerar como puntual, el potencial a una cierta distancia r viene dado por:

$$V = K\frac{q}{r}$$

Por tanto, en todos los puntos situados a la misma distancia de la carga q el potencial del campo será el mismo y como consecuencia la superficie equipotencial correspondiente tendrá forma esférica.

Si representamos las líneas del campo y las superficies equipotenciales, vemos que resultan perpendiculares, tal y como se muestra en las figuras siguientes, correspondientes a un campo creado por una carga puntual positiva (izquierda) y a otro campo creado por una carga puntual negativa (derecha).



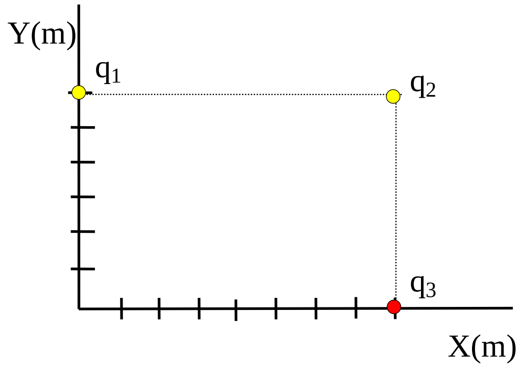
Si en el seno de un campo eléctrico se realiza un desplazamiento infinitesimal de una carga q' desde un punto A a otro B a lo largo de una superficie equipotencial cualquiera, el trabajo realizado por la fuerza electrostática se podrá evaluar como $dW_{Fe\,A}^{\;B} = -q' \cdot dV = 0$ ya que el potencial no cambia. Dicho trabajo también se puede calcular mediante la expresión general $dW_{Fe\,A}^{\;B} = \vec{F}_e \bullet d\vec{r}$ y para que sea nulo no siéndolo la fuerza ni el desplazamiento, es necesario que ambos vectores sean perpendiculares y como el vector campo eléctrico siempre tiene la misma dirección que el vector fuerza ejercida por el campo, se concluye que el vector campo eléctrico también ha de ser perpendicular a la superficie equipotencial.

3. Dadas las cargas: $q_1 = 10^{-8}$ C y $q_2 = -2\cdot10^{-8}$ C, situadas en los puntos (0,0) y (2,0) m. Determinad: a) Intensidad del campo eléctrico en los puntos: A(1,0) m, B(0,1) m y C(2,1) m. b) ¿En qué punto se anula la intensidad del campo?

sol: a) $\vec{E}_A = (270, 0)$N/C; $\vec{E}_B = (32'2, 73'9)$N/C; $\vec{E}_C = (16'1, -172)$ N/C. b) P(-4'8 , 0) m

4. Dadas las cargas: $q_1 = -7'2\ \mu C$, $q_2 = -\ 40\ \mu C$ y $q_3 = 6'4\ \mu C$ representadas en la figura adjunta, determinad:

a) Intensidad del campo eléctrico en el origen de coordenadas y fuerza que actuaría sobre una carga de -10^{-6} C situada en dicho punto.
b) Trabajo realizado por la fuerza electrostática al desplazar q_2 hasta el origen.
c) Energía potencial de la distribución inicial ¿Cuál es su significado físico?



En este caso tenemos un sistema formado por tres cargas puntuales. Como sabemos, asociado a dicho sistema existirá un campo eléctrico. Tanto aquí, como en todos los ejercicios siguientes, supondremos que el medio en el que se hallan las cargas es el aire ($K \approx 9\cdot10^9$ U.I.). En el problema se nos pide que calculemos la intensidad de dicho campo en un punto determinado (el origen de coordenadas).*¿Cómo podríamos hacerlo?*

Para obtener la intensidad $\vec{E}$ del campo eléctrico en cualquier punto bastará con que calculemos los vectores $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_3$ en dicho punto y los sumemos.

Calculad la intensidad del campo eléctrico generada por cada una de las cargas en el origen de coordenadas de la figura y, obtened $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

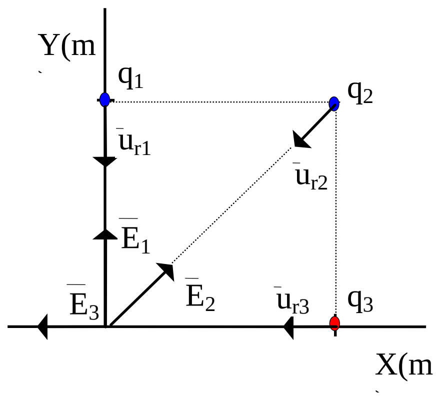
Sabemos que la intensidad del campo eléctrico en un punto, cuando la carga generadora del campo sea una carga puntual, se puede determinar como: $\vec{E} = K\dfrac{q}{r^2}\,\vec{u}_r$

siendo $\vec{u}_r$ un vector unitario que siempre tiene la misma dirección y sentido que el vector $\vec{r}$ que va desde la carga generadora del campo hasta el punto donde se desea calcular su intensidad (no confundirlo con el vector de posición de las cargas). Aplicando esta expresión al problema que nos ocupa tendremos:

$$\vec{E}_1 = \frac{Kq_1}{r_1^2}\vec{u}_{r1} = \frac{9\cdot10^9\cdot(-7'2\cdot10^{-6})}{6^2}\cdot\vec{u}_{r1} = -1800\cdot\vec{u}_{r1}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{Kq_2}{r_2^2}\vec{u}_{r2} = \frac{9\cdot10^9\cdot(-\ 40\cdot10^{-6})}{10^2}\cdot\vec{u}_{r2} = -3600\cdot\vec{u}_{r2}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{Kq_3}{r_3^2}\vec{u}_{r3} = \frac{9\cdot10^9\cdot(6'4\cdot10^{-6})}{8^2}\cdot\vec{u}_{r3} = 900\cdot\vec{u}_{r3}$$



La determinación de los vectores $\vec{u}_{r1}$ y $\vec{u}_{r3}$ es inmediata ya que de la figura anterior se desprende que $\vec{u}_{r1}$ = (0, -1) y $\vec{u}_{r3}$ = (-1, 0). Por el contrario la determinación del vector $\vec{u}_{r2}$ es algo más laboriosa:

$\vec{r}_2$ = (-8, -6) m; $r_2 = \sqrt{8^2 + 6^2}$ = 10 m; $\vec{u}_{r2} = \vec{r}_2 / r_2$ = (-8, -6)/10 = (-0'8, -0'6)

Sustituyendo los vectores unitarios en las expresiones que nos dan las intensidades de campo y sumando obtenemos:

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$ = (0, 1800) + (2880, 2160) + (-900, 0) = (1980, 3960) N/C

El resultado coincide numéricamente con la fuerza que actuaría sobre la unidad de carga positiva si se colocase en el origen de coordenadas. Si en lugar de la unidad de carga positiva se sitúa una carga q, la fuerza que actuará sobre la misma viene dada por: $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, de modo que sustituyendo los valores correspondientes a este caso:

$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = -10^{-6} \cdot (1980, 3960) = (-1'98 \cdot 10^{-3}, \ -3'96 \cdot 10^{-3})$ N

¿Cómo podríamos determinar el trabajo realizado por la fuerza electrostática cuando la carga q_2 se desplace desde su posición inicial (punto A) hasta el origen de coordenadas?

La carga q_2 se moverá en el seno del campo eléctrico generado por q_1 y q_3. La fuerza resultante que actúe sobre ella será la fuerza electrostática ejercida por el campo. Al ser dicha fuerza conservativa, podemos escribir: $W_{Fe\,A}^{\ \ O} = -\Delta Ep_A^O = -(Ep_O - Ep_A)$.

En el caso del campo eléctrico, cuando se trata de resolver problemas mediante consideraciones de trabajo y energía, lo habitual es manejar la función potencial eléctrico. Expresando Ep en función del potencial (Ep = q·V), la ecuación anterior queda como:

$$W_{Fe\,A}^{\ \ O} = -\Delta Ep_A^O = -q \cdot \Delta V_A^O = -q\,(V_O - V_A) = q\,(V_A - V_O)$$

Para calcular, pues, el trabajo que se nos pide tendremos que *calcular el potencial del campo creado por las cargas* q_1 *y* q_3 *en los puntos A y O:*

$$V_A = V_{A1} + V_{A3} = k \cdot \frac{q_1}{r_{A1}} + k \cdot \frac{q_3}{r_{A3}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-7'2 \cdot 10^{-6})}{8} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{6'4 \cdot 10^{-6}}{6} = 1500 \text{ V}$$

$$V_O = V_{O1} + V_{O3} = k \cdot \frac{q_1}{r_{O1}} + k \cdot \frac{q_3}{r_{O3}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-7'2 \cdot 10^{-6})}{6} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{6'4 \cdot 10^{-6}}{8} = -3600 \text{ V}$$

$$W_{Fe\,A}^{\ \ O} = -q\,(V_O - V_A) = 40 \cdot 10^{-6} \cdot (-3600 - 1500) = -0'204 \text{ J}$$

El hecho de que resulte un trabajo negativo se interpreta como que la transformación considerada (desplazamiento de q_2 desde su posición inicial A hasta el origen de coordenadas O), no es espontánea, lo que significa que la fuerza electrostática que actúa sobre q_2 se opone al desplazamiento. Por tanto, para que éste se produzca será necesario que disminuya la energía cinética de la partícula de carga q_2 en 0'204 J, o bien actúe una fuerza exterior que realice un trabajo (suministre una energía) de al menos 0'204 J.

La determinación de la energía potencial electrostática del sistema se puede hacer sin más que aplicar la expresión correspondiente:

Ep_{sis} = Ep_{12} + Ep_{13} + Ep_{23} $\rightarrow$ $Ep_{sis} = \dfrac{Kq_2q_1}{r_{12}} + \dfrac{Kq_3q_1}{r_{13}} + \dfrac{Kq_2q_3}{r_{23}}$ y sustituyendo:

$$Ep_{sis} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{288\cdot 10^{-12}}{8} + 9\cdot 10^9 \cdot \frac{(-46\cdot 10^{-12})}{10} + 9\cdot 10^9 \cdot \frac{(-256\cdot 10^{-12})}{6} = -0'101 \text{ J}$$

Este problema nos permite también plantearnos nuevas preguntas, como por ejemplo: *¿En qué dirección se moverá espontáneamente una pequeña carga q abandonada en el seno de un campo eléctrico, hacia potenciales crecientes o decrecientes?*

La ecuación general $W_{Fe\,A}^{\;B}$ = -q (V_B - V_A) nos permite contestar a la cuestión ya que si q es negativa, para que el trabajo realizado por el campo sea positivo (transformación espontánea) V_B tendrá que ser mayor que V_A y al contrario si q es positiva, lo que nos lleva a concluir que las cargas negativas siempre se moverán espontáneamente hacia potenciales crecientes y las positivas hacia decrecientes.

5. Una carga puntual q_1 = 36 μC se halla en el punto (0,0) de un sistema de coordenadas cartesianas y otra q_2 = -36 μC, también puntual, en el (8,0) cm. Calculad:

a) Intensidad del campo electrostático en el punto A (0,6) cm.
b) ¿Qué trabajo realizaría la fuerza electrostática del campo si se trasladara una carga de 2 μC, situada en A, hasta el punto B (4,0) cm?

sol: a) $\vec{E}$ = (2'6·10^7, 7·10^7) N/C. b) W_A^B = 4'32 J

6. ¿Qué relación existe entre las magnitudes intensidad $\vec{E}$ y potencial V, de un campo eléctrico?

Dada una carga q' que se sitúa en un punto de un campo eléctrico, se verá sometida a una fuerza: $\vec{F} = q'\cdot\vec{E}$ y "dispondrá" de una energía potencial Ep = q'·V

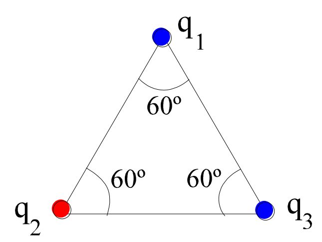
Si se produce un desplazamiento $d\vec{r}$ de la carga q', el campo realizará un trabajo (elemental) de valor: $dW_{Fe} = \vec{F}\bullet d\vec{r}$, que se podrá evaluar también (al ser $\vec{F}$ conservativa) como: $dW_{Fe} = -dEp = -q'\cdot dV$.

Si igualamos tendremos: $\vec{F}\bullet d\vec{r} = -q'\cdot dV$ y como $\vec{F} = q'\cdot\vec{E}$, nos queda finalmente:

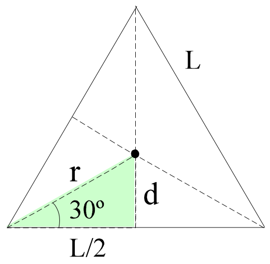
$$q'\cdot\vec{E}\bullet d\vec{r} = -q'\cdot dV \rightarrow \boxed{\vec{E}\bullet d\vec{r} = -dV}$$

7. Sabiendo que la longitud del lado del triángulo equilátero de la figura es 2 m, y que $q_1 = -2\cdot10^{-5}$ C, $q_2 = 10^{-5}$ C y $q_3 = -10^{-5}$ C, se pide:

a) Intensidad del campo electrostático en su centro.
b) Valor de la energía potencial de la carga q_3
c) Energía potencial de la distribución.



Para resolver el problema nos conviene, en primer lugar, *localizar el centro de la figura* que corresponderá al punto en donde se cortan las bisectrices. Si llamamos r a la distancia del centro de la figura a cualquiera de los vértices, d a la distancia entre dicho centro y el punto medio de cualquiera de los lados y L a la longitud del lado, tendremos:



$$\cos 30º = \frac{\frac{L}{2}}{r} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{L}{2r} \rightarrow r = \frac{L}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \text{m}$$

$$\text{Por otra parte, } d = r\cdot\text{sen}30º = \frac{L}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{L}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{m}$$

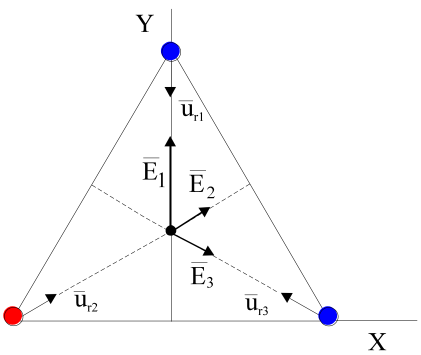
¿De qué factores dependerá la intensidad del campo eléctrico resultante en el punto considerado? ¿Cómo podríamos obtenerla?

La intensidad del campo eléctrico creado por una carga puntual q a una distancia r de la misma viene dada, por la expresión:

$$\vec{E} = K\frac{q}{r^2}\,\vec{u}_r$$

siendo $\vec{u}_r$ un vector unitario que siempre tiene la misma dirección y sentido que el vector $\vec{r}$ que va desde la carga generadora del campo hasta el punto donde se desea calcular su intensidad. La intensidad del campo eléctrico en el centro del triángulo dependerá de los vectores intensidad de campo $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_3$ correspondientes a cada una de las tres cargas y podremos obtenerla sumando dichos vectores.

Para ello es necesario que escojamos un sistema de referencia cómodo, tal y como el que se propone en la figura adjunta, en la que se han representado los vectores anteriores. En dicho sistema, las coordenadas del centro del triángulo son $(0,\ L/\sqrt{3})$. y la expresión analítica de cada uno de los vectores vendrá dada por:



$$\vec{E}_1 = \frac{Kq_1}{r_1^2}\vec{u}_{r1} = \frac{9\cdot 10^9\cdot(-2\cdot 10^{-5})}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\vec{u}_{r1} = -1'35\cdot 10^5\cdot\vec{u}_{r1} = -1'35\cdot 10^5\cdot(0\,,-1) \rightarrow$$

$$\vec{E}_1 = (0, -1'35\cdot 10^5)\ \text{N/C}\ .$$

$$\vec{E}_2 = \frac{Kq_1}{r_2^2}\vec{u}_{r2} = 0'675\cdot 10^5\cdot\vec{u}_{r2}\ .$$

La expresión de $\vec{u}_{r2}$ en función de sus componentes escalares no es inmediata (como ocurría con $\vec{u}_{r1}$ en el caso anterior). Para obtenerla dividiremos el vector $\vec{r}_2$ por su módulo r_2. El vector $\vec{r}_2$ podemos hallarlo sin más que restar las coordenadas de su origen a las coordenadas de su extremo (centro del triángulo), de modo que:

$$\vec{u}_{r2} = \vec{r}_2/r_2 = \frac{\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - (-1, 0)}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$ y sustituyendo en $\vec{E}_2$ queda:

$$\vec{E}_2 = 0'675\cdot 10^5\cdot\vec{u}_{r2} = 0'675\cdot 10^5\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (0'584\cdot 10^5,\ 0'338\cdot 10^5)\ \text{N/C}$$

$\vec{E}_3 = \frac{Kq_3}{r_3^2}\vec{u}_{r3} = -0'675\cdot 10^5\cdot\vec{u}_{r3}$. Conocido $\vec{u}_{r2}$ resulta muy sencillo determinar $\vec{u}_{r3}$.

En efecto, si analizamos la figura vemos que solo difieren en el signo de la componente X, con lo que:

$$\vec{E}_3 = -0'675\cdot 10^5\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (0'584\cdot 10^5,\ -0'338\cdot 10^5)\ \text{N/C}$$

Finalmente, sumamos: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = (1'17\cdot 10^5\,,\ 1'35\cdot 10^5)$ N/C

El módulo podemos hallarlo como: $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 1'79\cdot 10^5$ N/C.

En cuanto a la dirección y sentido del vector, estos, vienen dados por los ángulos directores o ángulos que forma el vector con cada uno de los semiejes positivos:

cos α = 1'17/1'79 = 0'65 $\rightarrow$ α = arccos 0'65 = 49º
cos β = 1'35/1'79 = 0'75 $\rightarrow$ β = arccos 0'75 = 41º

El resultado obtenido se puede interpretar diciendo que si en el centro del triángulo se colocase una hipotética carga puntual positiva (+ 1 C), sobre ella el cempo ejercería una fuerza de $1'79\cdot 10^5$ N en la dirección y sentido obtenidos.

En cuanto a la determinación de las energías potenciales que se demanda, el procedimiento a seguir es similar al que se utilizó en el caso del campo gravitatorio:

La energía potencial de la carga q_3 en el sistema será:

$Ep_3 = Ep_{13} + Ep_{23} = (Kq_1q_3/L) + (Kq_2q_3/L) = (q_1 + q_2)\cdot Kq_3/L$ y sustituyendo valores:

$Ep_3 = (-2\cdot10^{-5} + 10^{-5}) \cdot 9\cdot10^9 \cdot (-10^{-5})/2 = 0'45$ J.

¿De qué otra forma podríamos obtener el valor de la Ep pedida?

Otra posibilidad es utilizar el concepto de potencial del campo eléctrico. El valor de dicha magnitud en un punto dado coincide con el de la energía potencial que tendría la unidad de carga positiva si se colocase en dicho punto, de modo que si conocemos el potencial en un punto, para hallar la Ep de una carga cualquiera que se coloque en ese punto bastará aplicar la expresión: $Ep = q\cdot V$

En nuestro caso, el potencial del campo en el punto ocupado por q_3 valdrá:

$$V_3 = V_{13} + V_{23} = \frac{Kq_1}{L} + \frac{Kq_2}{L} = \frac{K}{L}(q_1 + q_2) = \frac{9\cdot10^9}{2}(-2\cdot10^{-5} + 10^{-5}) = 4'5\cdot10^4 \text{ V}$$

de modo que: $Ep_3 = q_3\cdot V_3 = 10^{-5} \cdot 4'5\cdot10^4 = 0'45$ J

La energía potencial del sistema, se puede evaluar mediante: $Ep_{sis} = \sum_{ij} Ep_{ij}$ $(i \neq j)$ que en nuestro caso queda como: $Ep_{sis} = Ep_{12} + Ep_{13} + Ep_{23}$, y sustituyendo:

$$Ep_{sis} = Ep_{12} + 0'45 = \frac{9\cdot10^9(-2\cdot10^{-5})\cdot10^{-5}}{2} + 0'45 = -0'9 + 0'45 = -0'45 \text{ J}$$

8. En cada uno de los vértices de un triángulo equilátero de 10 cm de lado hay una carga de 1 nC. Determinad el potencial y la intensidad del campo eléctrico en el centro del triángulo.

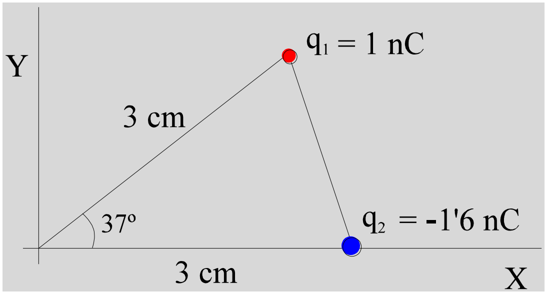
sol: El potencial 465 V y la intensidad es nula.

9. Tres cargas puntuales se encuentran en los vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 m y 4 m. La que se encuentra en el vértice del ángulo recto es q_1 = 4 nC y las otras dos $q_2 = q_3$ = -2 nC. Hallad la fuerza que actúa sobre cada carga y el potencial en el punto en que se encuentra la carga positiva.

sol: $\vec{F}_1 = (4'5\cdot10^{-9},\ 8\cdot10^{-9})$ N; $\vec{F}_2 = (-3'35\cdot10^{-9}, -8'6\cdot10^{-10})$ N;
$\vec{F}_3 = (-1'15\cdot10^{-9}, -7'14\cdot10^{-9})$ N; $V_1 = -10'5$ V

10. Dado el esquema de cargas adjunto, determinad:

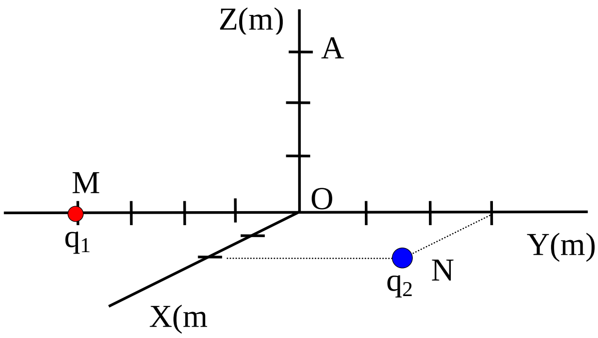
a) Intensidad del campo y el potencial que generan en el otro vértice.
b) Fuerza que actuaría sobre una carga de 100 μC situada en dicho punto.



sol: a) $\vec{E} = (8000, -6000)$ N/C; V= -180 V. b) $\vec{F} = (0'8, -0'6)$ N

11. Dada la figura adjunta y sabiendo que en el punto M se encuentra una carga q_1 de 5 nC y en el punto N otra carga q_2 de valor -10 nC, determinad:

a) Intensidad del campo y potencial en A. ¿Qué fuerza actuaría sobre una carga q = - 2 μC que se situase A?
b) Energía potencial del sistema de cargas formado por q_1 y q_2.
c) Trabajo realizado por la fuerza electrostática si desplazamos q_1 hasta O.



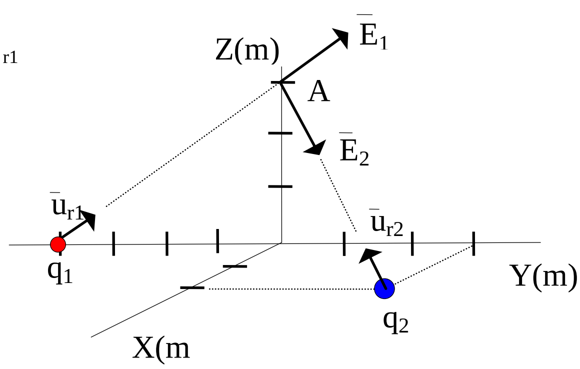
Hasta ahora hemos trabajado con cargas distribuidas en un plano. En este tipo de problemas podríamos haber calculado la intensidad $\vec{E}$ del campo eléctrico resultante sin apoyarnos en el vector unitario $\vec{u}_r$, obteniendo las componentes escalares de $\vec{E}$ por consideraciones trigonométricas. Sin embargo, no lo hemos hecho porque este procedimiento <u>no sería útil</u> en problemas como el que aquí se plantea, en donde se tiene una distribución espacial y hemos de trabajar en tres dimensiones.

Procederemos a *calcular* $\vec{E}$ *como la suma de los vectores* $\vec{E}_1$ *y* $\vec{E}_2$ *que crean en dicho punto las cargas* q_1 *y* q_2 *aplicando el procedimiento general que venimos utilizando.*

$$\vec{E}_1 = \frac{Kq_1}{r_1^2}\vec{u}_{r1} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 5\cdot 10^{-9}}{5^2}\cdot \vec{u}_{r1} = (9/5)\cdot \vec{u}_{r1}$$

donde $\vec{r}_1 = (0, 4, 3)$ m; $r_1 = 5$ m;
$\vec{u}_{r1} = \vec{r}_1/r_1 = (0, 4, 3)/5 = (0, 4/5, 3/5)$

de modo que: $\vec{E}_1 = (0,\ 1'44,\ 1'08)$ N/C



$\vec{E}_2 = \frac{Kq_2}{r_2^2}\vec{u}_{r2}$, donde: $\vec{r}_2 = (0, 0, 3) - (2, 3, 0) = (-2, -3, 3)$ m; $r_2 = \sqrt{22}$ m.

con lo que: $\vec{E}_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (10 \cdot 10^{-9})}{\left(\sqrt{22}\right)^2} \cdot \vec{u}_{r2}$, siendo $\vec{u}_{r2} = \vec{r}_2 / r_2$ = (-0'43, -0'64, 0'64)

Sustituyendo $\vec{u}_{r2}$ y operando: $\vec{E}_2$ = (1'76, 2'62, -2'62) N/C

Sumando: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ = (0, 1'44, 1'08) + (1'76, 2'62, -2'62) = (1'76, 4'06, -1'54) N/C

¿Cómo podemos calcular la fuerza que actuará sobre una carga q situada en A?

Para obtener la fuerza actuante sobre una carga de -2μC situada en el punto A, bastará sustituir en la expresión: $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$

$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ = $-2 \cdot 10^{-6}$ (1'76, 4'06, -1'54) = ($-3'52 \cdot 10^{-6}$, $-8'12 \cdot 10^{-6}$, $3'08 \cdot 10^{-6}$) N

Como podemos ver, el vector fuerza obtenido tiene sentido contrario al vector intensidad del campo. Ello se debe, evidentemente, al signo negativo de la carga q colocada y a la propia definición de la intensidad del campo eléctrico.

Vamos a *calcular, ahora, el potencial en el mismo punto A*. Como se trata de una magnitud escalar:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Kq_1}{r_1} + \frac{Kq_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{5 \cdot 10^{-9}}{5} + \frac{(-10 \cdot 10^{-9})}{4'69}\right) = 9 + (-19'9) = -10'19 \text{ V}$$

En cuanto a la energía potencial del sistema, como se trata de dos cargas, su valor coincidirá con el de la energía potencial de cualquiera de dichas cargas en el sistema:

$$Ep = \frac{Kq_1q_2}{r_{12}} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-9}(-10 \cdot 10^{-9})}{7'28} = -6'18 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

(El valor de la distancia entre las cargas r_{12} se puede obtener calculando el vector $\vec{r}_{12}$ y determinando su módulo o también aplicando el teorema de Pitágoras en la figura).

¿Cómo podemos calcular el trabajo realizado por la fuerza electrostática cuando q_1 se desplaza desde el punto que ocupa (M) hasta el origen (O)?

Podemos aplicar la expresión: $W_{FeM}^{O} = -q \cdot \Delta V_M^O = -q(V_O - V_M) = q(V_M - V_O)$

Para ello hemos de determinar previamente V_O y V_M.

$$V_O = \frac{Kq_2}{r_{2O}} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-10 \cdot 10^{-9})}{\sqrt{13}} = -24'93 \text{ V}$$

$$V_M = \frac{Kq_2}{r_{2M}} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot (-10\cdot 10^{-9})}{7'28} = -12'36 \text{ V}$$

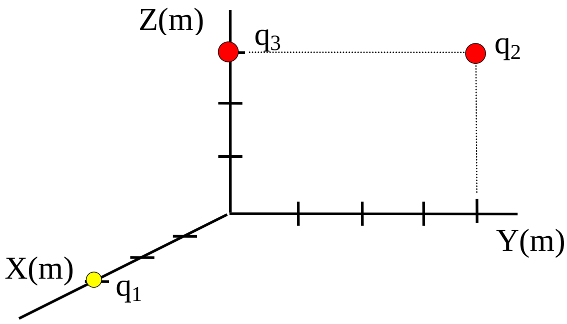
Sustituyendo: $W_{Fe\,M}^{\;\;O} = -q_1 (V_O - V_M) = -5\cdot 10^{-9} (-24'93 + 12'36) = 6'29\cdot 10^{-8}$ J

¿Cómo se interpreta que el trabajo realizado sea positivo?

El carácter positivo del trabajo realizado por el campo, nos muestra que se trata de una transformación en la que la fuerza ejercida por el campo no se opone al desplazamiento experimentado por la carga. Si la única fuerza actuante en el desplazamiento considerado fuese la electrostática todo el trabajo realizado por esta produciría un aumento de la energía cinética.

12. En el sistema de tres cargas puntuales representado en la figura, $q_1 = -10^{-5}$ C, $q_2 = 2\cdot 10^{-5}$ C y $q_3 = 4\cdot 10^{-5}$ C. Se pide:

a) Intensidad del campo eléctrico que crean en el origen de coordenadas.
b) Fuerza que sufriría una carga de -10^{-4} C si se colocase en el origen.
c) Trabajo realizado por la fuerza electrostática si desplazamos q_3 hasta el origen.



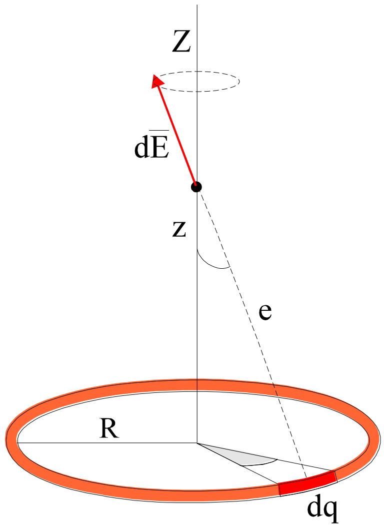
sol: a) $\vec{E} = (10^4, -5'76\cdot 10^3, -4'43\cdot 10^4)$ N/C; b) $\vec{F} = (-1, 0'58, 4'43)$ N; c) W = 0'71 J

13. Dado un anillo de radio R, cargado con una carga q uniformemente distribuida, determinad la intensidad del campo eléctrico y el potencial que crea en un punto de la recta perpendicular al plano del anillo y que pasa por su centro.

Hasta aquí, hemos calculado la intensidad $\vec{E}$ del campo eléctrico en un punto, en situaciones tales que las cargas creadoras del campo podían ser consideradas como puntuales. *¿Cómo podemos abordar ahora un problema como este, en el que la carga no puede ser considerada como puntual?*

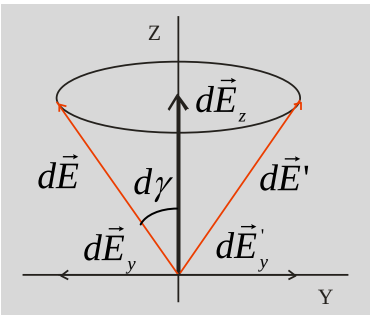
Como ya hicimos en el campo gravitatorio, podemos descomponer la carga total q del anillo en infinitas cargas dq que sí podrán considerarse como puntuales, hallar la expresión del campo eléctrico $d\vec{E}$ correspondiente a cada una (en el punto considerado) y finalmente obtener $\vec{E}$ como la suma de todos los $d\vec{E}$.

Si suponemos el grosor del anillo despreciable frente a su longitud L, podremos simplificar el problema y considerar el anillo como una distribución lineal de carga. En ese caso para descomponer la carga q bastará que dividamos el anillo en elementos de longitud dL a cada uno de los cuales le corresponderá una carga dq, En la figura adjunta podemos ver la intensidad del campo eléctrico generado en el punto P por uno de tales elementos de carga dq.



Podemos pensar cómo sería la contribución del resto de los elementos que conforman el anillo y preguntarnos *hacia dónde iría dirigida la intensidad del campo eléctrico resultante en P.*

Por la simetría que presenta la figura, es fácil darse cuenta de que el vector $\vec{E}$ se encontrará sobre la recta perpendicular al plano del anillo que pasa por su centro y dirigido hacia afuera.



En efecto, cada vector $d\vec{E}$ puede ser descompuesto en dos vectores, uno de los cuales será horizontal ($d\vec{E}_y$) y el otro vertical ($d\vec{E}_z$). Podemos ver que las componentes horizontales de tales vectores estarán situadas en un plano perpendicular al eje Z y siempre se anularán por pares. En consecuencia, sólo existirá intensidad del campo en la dirección del eje Z, por lo que para calcular $\vec{E}$ bastará con sumar todos los $d\vec{E}_z$.

Teniendo en cuenta lo anterior proceded a calcular el vector $\vec{E}$ que se pide.

$d\vec{E}_z = K \cdot \dfrac{dq}{e^2} \cos\gamma \cdot \vec{u}_z$ y la suma será: $\vec{E} = \int d\vec{E}_z = \int_0^q K \dfrac{dq}{e^2} \cos\gamma \cdot \vec{u}_z$

Sacando fuera de la integral las constantes: $\vec{E} = \dfrac{K \cdot \cos\gamma}{e^2} \vec{u}_z \int_0^q dq \rightarrow \boxed{\vec{E} = K \cdot \dfrac{q}{e^2} \cos\gamma \cdot \vec{u}_z}$

El resultado también se puede expresar en función de la distancia z existente desde el centro del anillo hasta el punto P si tenemos en cuenta que $\cos\gamma = \dfrac{z}{e}$ y sustituimos:

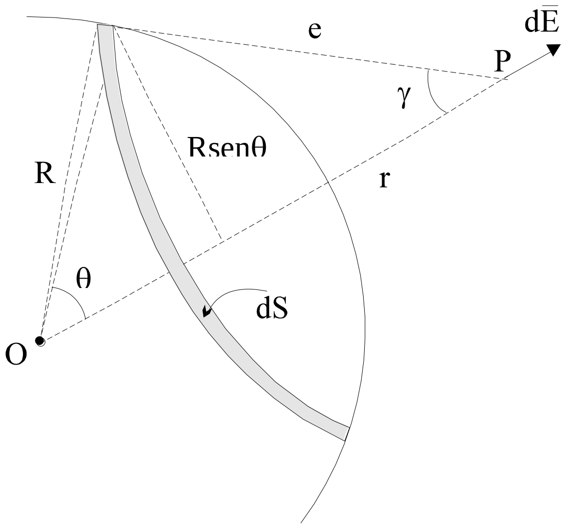
$$\boxed{\vec{E} = K \cdot \frac{q}{\left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} z \cdot \vec{u}_z}$$

Para determinar el potencial en el mismo punto bastará considerar que dV = K·dq/e y sumar todos los dq:

$V = \int_0^q K \cdot \dfrac{dq}{e} = \dfrac{K}{e} \int_0^q dq \rightarrow \boxed{V = K \dfrac{q}{e}}$ En función de z y R queda: $\boxed{V = K \dfrac{q}{\sqrt{z^2 + R^2}}}$

14. Determinad la intensidad del campo eléctrico y el potencial generados por una carga q, uniformemente distribuida en una capa esférica de radio R, en un punto P situado a una distancia r de su centro.

Revisad el ejercicio anterior y sugerid una posible estrategia para contestar éste.



Para resolver este ejercicio podemos utilizar el resultado del anterior y considerar a la capa esférica como una superficie hueca compuesta de infinitos anillos a cada uno de los cuales le corresponderá una carga dq. Para realizar esta descomposición bastará intersectar la capa esférica con planos infinitamente próximos y perpendiculares a la recta que une el centro de la esfera con el punto en el cual queremos hallar la intensidad del campo eléctrico $\vec{E}$. Cada uno de los anillos, generará una intensidad $d\vec{E}$ que, de acuerdo con la figura adjunta (en la que hemos supuesto que q es positiva) se podrá expresar como:

$d\vec{E} = K \cdot \dfrac{dq}{e^2} \cos\gamma \cdot \vec{u}_r$ donde dq será la carga de la superficie dS del anillo, la cual podremos expresar en función de la densidad de carga como $dq = \sigma \cdot dS$ siendo $\sigma = q/S = q/4\pi R^2$ y $dS = 2\pi\,(R\text{sen}\theta)\cdot R \cdot d\theta$.

Para calcular la intensidad del campo creado por la distribución esférica de carga en el punto P situado a una distancia r del centro O, podemos sumar todos los $d\vec{E}$ correspondientes a los infinitos anillos que integran la superficie esférica de radio R.

Calculad $\vec{E}$ *en un punto P situado a una distancia* $r \geq R$ *del centro de la esfera.*

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_0^{\pi} K \cdot \frac{dq}{e^2} \cos\gamma \cdot \vec{u}_r = \int_0^{\pi} K \cdot \frac{\sigma 2\pi R^2}{e^2} \text{sen}\theta \cdot \cos\gamma \cdot \vec{u}_r \cdot d\theta$$

En la integral anterior tenemos tres variables: e, θ, γ, que están relacionadas y para poder resolver hemos de expresarlas en función de una sola. Conviene hacerlo en función de “e” cuyos límites de integración corresponden a r-R (para θ = 0) y r+R (para θ = π rad).

Sugerid un procedimiento que nos permite relacionar θ *y* γ *con* e.

Aplicando el teorema del coseno en la figura tenemos: $e^2 = r^2 + R^2 + 2\, r\, R \cos\theta$ (1).
También por el teorema del coseno: $R^2 = e^2 + r^2 - 2\, e\, r \cos\gamma$ (2).

Derivando la ecuación (1): $2\, e\, de = 2\, r\, R\, \text{sen}\theta\, d\theta$ y despejando: $\text{sen}\theta\, d\theta = e \cdot de / r \cdot R$

Despejando cosγ de la ecuación (2): $\cos\gamma = (e^2 + r^2 - R^2)2e\, r$, y sustituyendo:

$$\vec{E} = \int_0^{\pi} K\frac{\sigma 2\pi R^2}{e^2}\text{sen}\theta\cdot\cos\gamma\cdot\vec{u}_r\cdot d\theta = \frac{K\sigma\pi R}{r^2}\int_{r-R}^{r+R}\vec{u}_r\left(1+\frac{r^2-R^2}{e^2}\right)de$$

$$\vec{E} = \frac{K\sigma\pi R}{r^2}\vec{u}_r\left[e-\frac{r^2-R^2}{e}\right]_{r-R}^{r+R} = \frac{K\sigma 4\pi R^2}{r^2}\vec{u}_r$$. Sustituyendo $\sigma = q/4\pi R^2$ queda:

$$\boxed{\vec{E} = K\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\vec{u}_r}$$

Como vemos, la superficie esférica cargada se comporta como si toda la carga q estuviese situada en el centro de la misma.

¿Cómo podríamos ahora calcular la intensidad del campo en un punto P situado a una distancia $r < R$ del centro de la esfera? Sugerid un procedimiento y llevadlo a cabo.

Bastaría con cambiar los límites de integración ya que en el caso propuesto es fácil ver en la figura que la distancia "e" variaría desde R-r hasta r+R. *Podemos comprobar que al sustituir se obtiene* $\vec{E} = 0$. Es decir, que la intensidad del campo eléctrico en cualquier punto situado en el interior de una esfera hueca cargada, es nula.

En un ejercicio posterior veremos cómo es posible llegar a estos mismos resultados de una forma mucho más sencilla mediante la aplicación del teorema de Gauss.

Sugerid y llevad a cabo un procedimiento para determinar el potencial del campo eléctrico generado por la capa esférica en cada uno de los dos puntos anteriores.

Para obtener el potencial podemos utilizar un procedimiento análogo al que hemos seguido para el campo eléctrico, es decir, consideraremos en primer lugar el potencial en un punto P debido a un anillo de carga infinitesimal y después sumaremos todas las contribuciones debidas a los infinitos anillos de este tipo que forman la capa esférica.

El potencial correspondiente a uno de los anillos de carga dq en un punto P será:

$$dV = K\cdot\frac{dq}{e}$$

de forma que el que se debe a toda la esfera se podrá obtener como $V = \int K\frac{dq}{e}$

Se trata ahora de *resolver esta integral.*

Para ello, hemos de reducir las dos variables a una sola. Como ya hemos visto, $dq = \sigma\cdot dS$ siendo $\sigma = q/S = q/4\pi R^2$ y $dS = 2\pi\,(R\text{sen}\theta)\cdot R\cdot d\theta$. Con lo que para un punto P exterior a la capa esférica nos quedará:

$$V = \int K\frac{dq}{e} = \int_0^{\pi} K\frac{\sigma\cdot 2\pi R^2 \text{sen}\theta\cdot d\theta}{e} = K\sigma 2\pi R^2\int_0^{\pi}\frac{\text{sen}\theta d\theta}{e}$$

Teniendo en cuenta que senθ dθ = e·de/r·R, y que e varía entre r-R y r+R:

$$V = K\sigma 2\pi R^2\int_0^{\pi}\frac{\text{sen}\theta d\theta}{e} = K\sigma 2\pi R^2\int_{r-R}^{r+R}\frac{de}{r\cdot R} = \frac{Kq}{2rR}\cdot[e]_{r-R}^{r+R} \text{ de donde } \boxed{V = K\cdot\frac{q}{r}}$$

El resultado muestra que el potencial es el mismo que correspondería a una carga q situada en el centro de la esfera. En el caso de que el punto P estuviese situado sobre la esfera, bastaría sustituir, en la expresión anterior, r por el radio de la misma R.

Calculad V para el caso de un punto situado en el interior de la esfera (r < R).

El procedimiento será el mismo, pero los límites de la integral cambiarán siendo en este caso desde R-r hasta R+r, con lo que *sustituyendo e integrando en la misma expresión anterior,* obtenemos que el potencial en cualquier punto interior de la esfera es:

$$\boxed{V = K\cdot\frac{q}{R}}$$

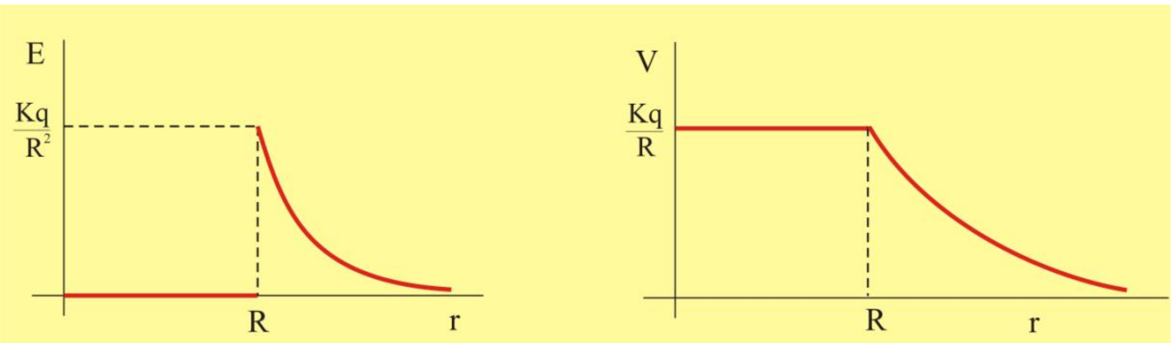
Los resultados anteriores nos indican que:

a) En todo el volumen de la esfera conductora el potencial es el mismo y coincide con el que existe en su superficie.

b) La superficie de la esfera es una superficie equipotencial.

Estas conclusiones tienen una gran importancia ya que se dan en todos los conductores cargados y en equilibrio (aunque no sean esféricos ni huecos). Se trata, por otra parte, de conclusiones que se pueden explicar de forma cualitativa ya que si en el propio conductor hubiesen dos puntos a diferente potencial, las cargas se desplazarían por acción del campo que existiría entre esos puntos.

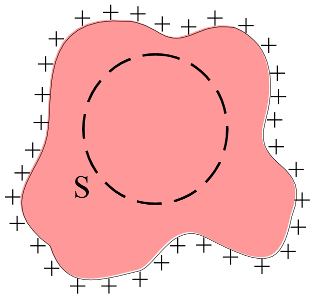
Para terminar, podemos "visualizar" estas conclusiones representando de forma cualitativa el módulo de la intensidad del campo eléctrico y el potencial, en función de la distancia r desde el centro de la esfera hasta el punto donde queramos evaluarlos:



15. Determinad la intensidad del campo eléctrico en el interior y en la superficie de un conductor cargado y en equilibrio.

Al introducir cargas en un conductor éstas se repelerán entre sí y, como pueden moverse libremente, se alejarán unas de otras hasta que se alcance una situación estable en la que ya no se moverán (equilibrio). Ello se traduce en que las distancias relativas entre las cargas deberán ser las mayores posibles y para que esto suceda tendrán que situarse necesariamente en la superficie del conductor.

Para evaluar la intensidad del campo eléctrico en un punto del interior del conductor utilizaremos el teorema de Gauss aplicándolo a una superficie cerrada cualquiera en el interior del conductor. Según dicho teorema el flujo ϕ del campo eléctrico a través de una superficie cerrada cualquiera S es directamente proporcional a la carga total existente en el interior de dicha superficie.



Se cumplirá que: $\phi = \int \vec{E} \bullet d\vec{S} = 4\pi Kq$ y como no puede haber carga en su interior (ya que toda se distribuye en la superficie), tendremos que: $\phi = \int \vec{E} \bullet d\vec{S} = 0$, y la única posibilidad de que esta integral valga 0, cualquiera que sea la superficie interior elegida, es que $\vec{E} = 0$.

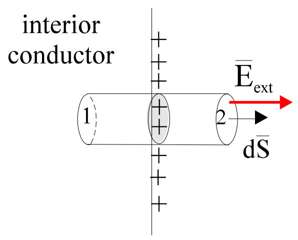
Esta propiedad explica que cuando se desea que un campo eléctrico no actúe sobre un determinado objeto, se recurra a encerrar a éste dentro de una caja metálica.

Podemos proceder ahora a determinar $\vec{E}$ en la superficie del conductor cargado y en equilibrio, planteándonos en primer lugar *qué dirección podría tener* $\vec{E}$ *en cualquier punto de la superficie del conductor.*

Como las cargas se encuentran en la superficie y en reposo, necesariamente $\vec{E}$, si es que existe, tendrá que ser perpendicular a la superficie, ya que, de lo contrario, su componente tangencial (según la superficie) haría que sobre las cargas situadas en ese punto el campo ejerciese una fuerza que provocaría su desplazamiento, pero, ya hemos dicho que se había alcanzado el equilibrio (las cargas permanecen en reposo).

Visto ya que $\vec{E}$ debe ser perpendicular a la superficie del conductor, *nos falta determinar su valor, aplicando el teorema de Gauss.*

Para ello escogeremos una superficie imaginaria cilíndrica de tamaño infinitesimal cuya generatriz sea perpendicular a la superficie del conductor y cuyas bases queden una en el interior y otra en el exterior del mismo. Este cilindro englobará una carga dq que corresponde a la carga que el conductor tiene en la superficie dS, intersección del cilindro con la superficie del conductor.



El flujo a través de la superficie del cilindro infinitesimal considerado será, según el teorema de Gauss: $d\phi = 4\pi$ K dq. Éste flujo puede ser evaluado descomponiéndolo en la suma de los flujos a través de las superficies de las bases interior (1) y exterior (2) del cilindro y de su superficie lateral:

$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_L = 4\pi$ K dq. Si evaluamos $d\phi_1$ y $d\phi_2$ tendremos:

$d\phi_1 = \vec{E}_{int} \bullet d\vec{S} = 0$ porque tal y como hemos visto $\vec{E}_{int} = 0$.
$d\phi_L = \vec{E}_{int} \bullet d\vec{S}_{Lint} + \vec{E}_{ext} \bullet d\vec{S}_{Lext} = 0 + E_{ext} \cdot dS_{Lext} \cdot \cos 90^o = 0$, y sustituyendo:
$d\phi_2 = \vec{E}_{ext} \bullet d\vec{S}_2 = 4\pi\, K\, dq$.

Efectuando el producto escalar y poniendo dq en función de la densidad de carga superficial, obtenemos finalmente:

$E_{ext} \cdot dS_2 \cdot \cos 0^o = 4\pi\, K\, dq \rightarrow E_{ext} \cdot dS_2 = 4\pi\, K\, \sigma\, dS$ y como $dS_2 = dS$: $\boxed{E_{ext} = 4\pi\, K\, \sigma}$

Como podemos ver, la intensidad del campo eléctrico en la superficie de un conductor cargado y en equilibrio es directamente proporcional a la densidad de carga. Si el conductor fuera esférico, la densidad de carga en todos sus puntos sería constante y, por tanto, la intensidad de campo eléctrico en cualquiera de ellos la misma.

¿Qué ocurriría si el conductor tuviese algún extremo acabado en punta?

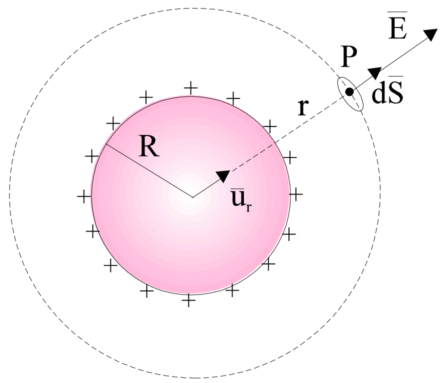
Como sabemos, las cargas tienden a separarse lo más posible unas de otras, por ello se acumularían especialmente en las puntas, produciéndose allí una gran densidad de carga y, en consecuencia, un campo eléctrico muy intenso, que llega a ionizar el aire que rodea a la punta, lo cual provoca que el conductor se descargue rápidamente. En este efecto se basan precisamente los pararrayos que no son sino conductores acabados en una o varias puntas y conectados a tierra por el otro extremo. Análogamente ocurre con las pequeñas varillas metálicas acabadas en punta que los aviones llevan en las alas, por las que se escapa la carga electrostática acumulada en el fuselaje a causa del rozamiento con el aire, que, de otra forma, podrían producir descargas eléctricas muy peligrosas. También explica que sea peligroso colocarse en días de tormenta debajo de postes o árboles, por los que es más probable que vayan las descargas.

16. Determinad por aplicación del teorema de Gauss, la intensidad del campo eléctrico creado por una esfera conductora de radio R, cargada con una carga q.

Al cargar un conductor sabemos que las cargas se distribuyen por su superficie de forma que la distancia relativa entre ellas sea lo mayor posible. En nuestro caso, por la simetría de la superficie esférica, se distribuirán uniformemente por toda ella (densidad de carga constante en todos los puntos). El problema consiste, pues, en determinar la intensidad del campo eléctrico generado por una carga uniformemente distribuida en una superficie esférica, problema que ya hemos resuelto, pero que ahora vamos a volver a resolver, mucho más rápidamente, utilizando el teorema de Gauss.

El teorema de Gauss es útil para calcular la intensidad del campo eléctrico en aquellos casos en los que la distribución de cargas que genera el campo presenta una cierta simetría, de forma que conozcamos la dirección de $\vec{E}$ en todos los puntos y su módulo sea constante a lo largo de algunas superficies sencillas. Éste es precisamente el caso que se nos plantea en el problema ya que por la simetría existente la dirección de $\vec{E}$ será radial y su módulo tendrá que ser el mismo en todos los puntos que se encuentren a la misma distancia del centro de la esfera.

En primer lugar procederemos a calcular $\vec{E}$ en un punto situado a una distancia $r \geq R$. Para ello hemos de tomar una superficie esférica que pase por este punto y que sea concéntrica con la esfera conductora. Aplicando el teorema de Gauss a esta superficie:



$$\phi = \oint \vec{E} \bullet d\vec{S} = 4\pi Kq \rightarrow \oint E \cdot dS \cdot \cos 0^o = 4\pi Kq$$

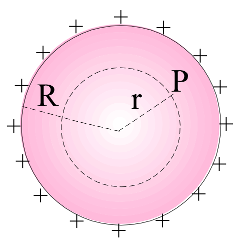
en donde el círculo de la integral significa que S es una superficie cerrada y que la integral se extiende a toda ella. Como E es constante, nos queda:

$$E \cdot S = 4\pi\, K\, q \rightarrow E \cdot 4\pi R^2 = 4\pi\, K\, q \rightarrow E = K\frac{q}{r^2} \text{ y vectorialmente: } \boxed{\vec{E} = K\frac{q}{r^2}\vec{u}_r}$$

En el caso de que el punto se encuentre sobre la propia superficie, bastará hacer $r = R$ para calcular la intensidad del campo correspondiente.

Utilizad ahora el teorema de Gauss para calcular E en el interior de la esfera.

Para un punto situado a una distancia $r < R$ del centro de la esfera, tomamos de nuevo una superficie esférica que pase por dicho punto y que sea concéntrica con la esfera conductora. Aplicando el teorema de Gauss a esta superficie:



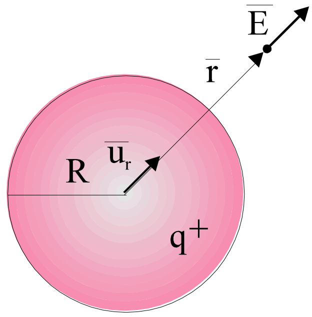
$$\phi = \oint \vec{E} \bullet d\vec{S} = 0$$

ya que no encierra carga alguna, y para que ésta integral sea nula, es necesario que la intensidad $E = 0$.

Vemos, pues, que los resultados son los mismos que los obtenidos anteriormente mediante la aplicación directa de la ley de Coulomb y que el proceso resulta ser mucho más breve y sencillo.

17. Sabiendo que el aire se hace conductor (se ioniza), cuando se encuentra en un campo eléctrico cuya intensidad sea igual o mayor de $3\cdot10^6$ V/m, determinad:

a) Máxima carga que podrá almacenar un conductor esférico de radio R en el aire.
b) Potencial máximo que podrá alcanzar.



Como ya se ha visto, al cargar un conductor esférico , la carga se distribuye uniformemente por toda su superficie y su comportamiento para un punto P exterior al mismo es equivalente a que si toda la carga estuviese situada en su centro, de modo que la intensidad del campo eléctrico en P se puede calcular mediante la expresión:

$$\vec{E} = K\frac{q}{r^2}\,\vec{u}_r$$

De acuerdo con la expresión anterior, los puntos en los que el campo eléctrico generado por la esfera alcanzará su máxima intensidad serán precisamente los de la superficie, en los que el módulo de la intensidad será: $E = K\frac{q}{R^2}$

Si imponemos la condición de que E valga $3\cdot10^6$ V/m (en realidad debería ser un infinitésimo menor), obtendremos el valor de la máxima carga que podrá adquirir la esfera despejando q de la expresión anterior:

$q_{max} = E\cdot R^2/K = 3\cdot10^6 \cdot R^2/9\cdot10^9 = 10^{-3} \cdot R^2/3$

Así, una esfera conductora de 1 m de radio, podría (en las condiciones expresadas en el enunciado) acumular como máximo una carga de $3'33 \cdot 10^{-4}$ C . A partir de ese valor, si le suministráramos más carga el aire que rodea a la esfera se ionizaría y ésta se descargaría.

Este efecto tiene gran importancia en los generadores de Van der Graaf ya que en ellos se va acumulando carga en una esfera conductora y aunque, en principio, se podría almacenar en ellos cualquier carga, la realidad es que la cantidad de carga se halla limitada por el efecto de la ionización del aire que rodea a la esfera.

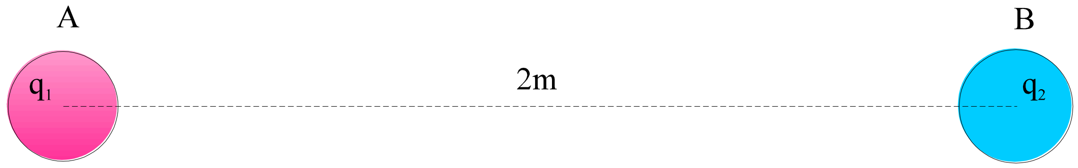
En cuanto al potencial electrostático V en un punto dado situado a una distancia mayor o igual que el radio de la esfera, sabemos que éste viene dado por la expresión:

$$V = K\cdot\frac{q}{r}$$

de modo que para obtener el valor máximo del potencial en la superficie de la esfera, haremos r = R (radio de la esfera) y sustituiremos q por su valor máximo:

$V_{max} = K\cdot\frac{q_{max}}{R} = 9\cdot10^9\cdot\frac{10^{-3}\cdot R^2}{3R} = 3\cdot10^6\cdot R$. Para $R = 1$ m $\rightarrow V = 3\cdot10^6$ V

18. Dos conductores esféricos A y B de 10 cm de radio cada uno, están separados una distancia de 2 m y con las cargas $q_1 = 3\cdot10^{-8}$ C y $q_2 = -6\cdot10^{-8}$ C respectivamente. Determinad el potencial en cada uno de los conductores (suponed que la distancia entre las esferas es lo suficientemente grande, comparada con el radio, para que no afecte a la distribución de las cargas en su superficie).



Si, como se dice en el enunciado, la distancia entre las esferas es lo suficientemente grande como para despreciar los efectos de inducción, podremos considerar que cada una de ellas se comporta como una carga puntual.

El potencial de cualquiera de las esferas se podrá determinar sumando el debido a su propia carga más el que se debe a la carga de la otra esfera. Así:

$$V_A = V_{A1} + V_{A2} = K\cdot\frac{q_1}{R_A} + K\cdot\frac{q_2}{r_{AB}} = 9\cdot10^9\,\frac{3\cdot10^{-8}}{0'1} + 9\cdot10^9\,\frac{(-6\cdot10^{-8})}{2} = 2430 \text{ V}$$

$$V_B = V_{B2} + V_{B1} = K\cdot\frac{q_2}{R_B} + K\cdot\frac{q_1}{r_{AB}} = 9\cdot10^9\,\frac{3\cdot10^{-8}}{2} + 9\cdot10^9\,\frac{(-6\cdot10^{-8})}{0'1} = -5625 \text{ V}$$

¿Qué ocurriría si conectásemos ambas esferas mediante un hilo conductor?

Al ser el potencial de la esfera A mayor que el de la esfera B, se produciría un movimiento de cargas (corriente eléctrica) de forma que la carga positiva de A disminuiría mientras que la de B aumentaría (pasando electrones desde la B hacia la A) hasta que los potenciales de ambas se igualasen. Cómo conseguir mantener constante una diferencia de potencial entre dos puntos y aprovechar la energía cinética del movimiento de cargas que se puede dar entre ellos, son problemas que se abordan en el estudio de la corriente eléctrica.

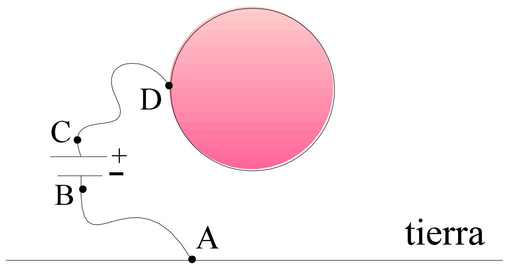
¿Es posible que un objeto esté cargado eléctricamente y el potencial a que se encuentre sea 0?

De acuerdo con lo que hemos visto en este ejercicio sí que es posible ya que para ello bastaría con situar un segundo objeto también cargado a una cierta distancia del primero, de manera que la suma del potencial debido a la propia carga del primero más el que se debería a la carga del segundo, diese 0. Así, por ejemplo, *se puede comprobar* que si en este mismo ejercicio la esfera B tuviese una carga $q_2 = -60\cdot10^{-8}$ C, el potencial de la esfera A (cargada con $q_1 = 3\cdot10^{-8}$ C) sería 0.

19. Determinad lo que sucederá cuando una esfera conductora de 10 cm de radio se conecte al polo positivo de un generador que suministra una diferencia de potencial de 900 V, estando el polo negativo conectado a tierra.

El punto A, al ser de la superficie de la Tierra, se encontrará en todo instante a potencial 0. El punto B, en principio, estará a un potencial desconocido pero inferior en 900 V al punto C ya que $V_C - V_B = 900$ V.

El punto D, inicialmente, se encuentra a potencial 0 ya que la esfera está descargada y no hay en la proximidad ninguna otra carga.



Conectamos, en primer lugar, A con B mediante un conductor. Como entre sus extremos hay una diferencia de potencial, se producirá una corriente que durará hasta que el potencial en B y en A sea el mismo. Como el del punto A, por ser la superficie de la Tierra, vale en toda situación 0, el punto B alcanzará el potencial 0. En estas condiciones el potencial del punto C será de 900 V y si conectamos mediante un conductor con la esfera, tendremos entre sus extremos una diferencia de potencial de 900 V ya que en el punto D el potencial es 0. Se producirá entonces una corriente de forma que, a medida que la esfera vaya adquiriendo carga positiva, el potencial en D irá creciendo hasta que valga 900 V. En ese momento cesará la corriente y dispondremos de una esfera conductora cargada a potencial de 900 V. La carga adquirida por la esfera será:

$$\mathrm{V} = K \cdot \frac{q}{r} \rightarrow \mathrm{q} = \frac{\mathrm{V \cdot r}}{\mathrm{K}} = \frac{900 \cdot 0'1}{9 \cdot 10^9} = 10^{-8}\ \mathrm{C} = 10\ \mathrm{nC}$$

20. Determinad la capacidad de un conductor esférico de radio R.

Dado un conductor cualquiera, se puede comprobar que al conectarlo a distintos potenciales V_1, V_2, V_3 ... adquiere distintas cargas q_1, q_2, q_3 ... tal y como se desprende del ejercicio anterior. Experimentalmente se observa que en ese caso, el cociente entre la carga adquirida y el potencial es siempre un valor constante característico del conductor en cuestión. A la magnitud q/V se le denomina capacidad C del conductor, puesto que su valor nos da idea de la carga que puede almacenar (para cada potencial determinado).

En el caso de que el conductor sea esférico podemos calcular su capacidad sin necesidad de recurrir a medidas experimentales ya que, como sabemos, el potencial de una esfera conductora de radio R cargada con una carga q es:

$V = K \cdot \dfrac{q}{R}$ y su capacidad será, por tanto, C = q/V = R/K

Vemos que cuanto mayor sea el radio de la esfera mayor será su capacidad. De hecho la capacidad de un conductor esta relacionada con la forma del mismo. Así, por ejemplo, si aplastásemos poco a poco a una esfera conductora, podríamos comprobar cómo su capacidad iría cambiando.

21. ¿Cómo podríamos aumentar la capacidad de un conductor?

En ocasiones resulta técnicamente conveniente almacenar mucha carga eléctrica y para ello se utilizan los conductores. Podremos conseguir almacenar cargas elevadas, en principio, de dos formas:

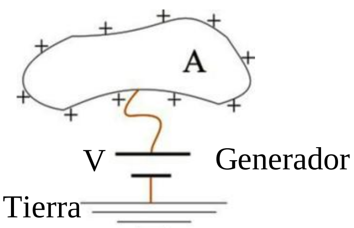
a) Con conductores muy grandes (por ejemplo, esferas de un gran radio).
b) Con conductores pequeños pero a elevadísimos potenciales.

Ninguna de las dos opciones resulta muy adecuada ya que la primera exigiría en la mayoría de los casos demasiado espacio y la segunda porque, como ya hemos visto, si se eleva demasiado el potencial, el aire o cualquier otro material dieléctrico que rodee al objeto, se haría conductor y éste se descargaría.

¿Cómo podría aumentarse la capacidad de un conductor sin estos inconvenientes?

Esto puede conseguirse aproximando a un conductor cargado (cuya capacidad queremos aumentar) otro conductor con carga de signo opuesto. Para comprenderlo podemos imaginar el siguiente proceso:

1º) Cargamos el conductor A conectándolo a un generador entre cuyas placas existe una diferencia de potencial de valor V, tal y como se muestra en la figura adjunta.



2º) Si ahora lo desconectamos del generador, el conductor habrá adquirido una carga q a un potencial V, de modo que su capacidad será C = q/V.

3º) Situamos en las proximidades del conductor A, otro conductor B con carga negativa.

El potencial eléctrico en el conductor A será la suma de su propio potencial más el que la carga que el otro conductor cree en él (que será negativo), es decir: $V' = V + V_{AB}$ y al ser V_{AB} negativo, tendremos que $V' < V$, lo que significa que el conductor A tiene la misma carga q pero con menos potencial, es decir, que su nueva capacidad, mientras no retiremos el conductor B, será $C' = q/V'$ (mayor que la anterior).

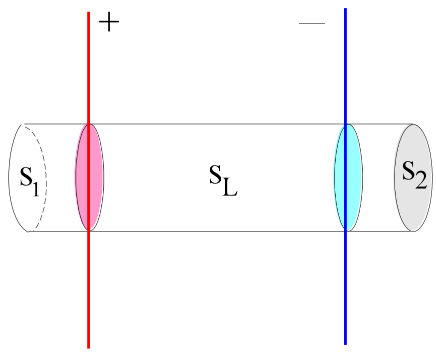
4º) Si ahora conectamos el conductor A de nuevo al generador, al ser $V' < V$, pasarán más cargas hasta que el conductor se encuentre de nuevo a potencial V. En esta situación el conductor tiene el mismo potencial que al principio pero con más carga (q') y su capacidad será $C' = q'/V$.

Claro está, que cuanto más influya el conductor B, mayor será el aumento que se producirá en la capacidad de A. La influencia mutua de los dos conductores dependerá de su forma y de su situación. Los casos más favorables se producen cuando un conductor encierra al otro y cuando los conductores son superficies planas paralelas y separadas por una distancia muy pequeña. En estos casos se dice que ambos conductores constituyen un condensador.

22. Determinad la intensidad del campo eléctrico creado por dos placas conductoras paralelas y de superficies planas, con cargas iguales pero de distinto signo, en un punto situado entre las mismas.

Entre las placas existirá un campo eléctrico debido a una y otra distribución de cargas, por lo que en primer lugar conviene que nos planteemos *qué características tendrá ese campo.*

En principio, cabe pensar que la dirección del vector $\vec{E}$ en la superficie de cualquiera de las placas tendrá que ser perpendicular (de otra forma las cargas no estarían en equilibrio). Para comprobar si esta hipótesis es cierta, podemos utilizar el teorema de Gauss aplicándolo al cilindro de la figura, <u>cuyas bases quedan en el interior de cada una de las placas</u>[3]:



$\phi_T = 4\pi K q$ siendo q la carga total encerrada en el cilindro.

y como la carga existente en la intersección del cilindro con cada placa es la misma pero de signo contrario, q = 0. Por tanto, $\phi_T = 0$ y si descomponemos este flujo, considerando las bases del cilindro y la superficie lateral:

$\phi_T = \phi_1 + \phi_2 + \phi_L = 0$

[3] Atención, las superficies de las placas son planas, pero las propias placas tienen un cierto grosor, de forma que tanto S_1 como S_2 figura que se hallan en el interior de cada placa. Las líneas roja y azul del dibujo, representan solo las caras enfrentadas de cada placa (vistas de canto).

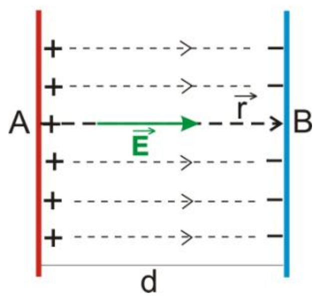
Como ϕ_1 y ϕ_2 son nulos porque se hallan en el interior del conductor y allí la intensidad del campo es 0, hemos de concluir que:

$\phi_L = \oint \vec{E} \bullet d\vec{S} = 0$, y como ni $\vec{E}$ ni $d\vec{S}$ son nulos, necesariamente han de ser perpendiculares y, por tanto, el vector intensidad del campo eléctrico tendrá que ser perpendicular a las placas del condensador y dirigido de la positiva hacia la negativa.

En estas condiciones las líneas del campo entre las placas serán paralelas, lo que, como ya vimos, significa que en todos los puntos el módulo de $\vec{E}$ será el mismo, es decir, se trata de un campo eléctrico uniforme.

¿De qué factores dependerá E? ¿Cómo podríamos hallarlo?

Si llamamos V_{AB} a la diferencia de potencial existente entre las placas positiva (A) y negativa (B), de forma que $V_{AB} = V_A - V_B > 0$ y d a la distancia a que se encuentran separadas, podemos pensar que cuanto mayor sea V_{AB} y menor la distancia que las separa, más intenso deberá ser el campo existente entre dichas placas.



Para determinar E podemos utilizar la expresión $\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E} \bullet d\vec{r} = -(V_B - V_A)$ aplicándola al trayecto de la figura.

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E} \bullet d\vec{r} = \int_0^d E \cdot dr = E \cdot d = -(V_B - V_A) = V_{AB} \;\rightarrow\; E = \frac{V_{AB}}{d}$$

23. Dos bolitas conductoras idénticas y de 2 gramos de masa cada una, se suspenden de sendos hilos de 1 metro sujetos de un mismo punto del techo. Si al suministrarles la misma carga se repelen hasta que los hilos formen un ángulo de 60º, ¿qué valor tiene su carga?

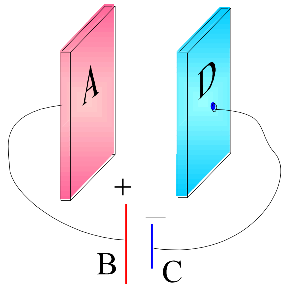
sol: $q = 1'13 \cdot 10^{-6}$ C

24. Dada una carga de 10^{-5} C uniformemente distribuida sobre una superficie esférica de radio 50 cm. Determinad:

a) Intensidad del campo y potencial en un punto de su superficie.
b) Idem en un punto P situado a 1 m del centro de la esfera.

sol: a) $E_S = 3'6 \cdot 10^5$ N/C, $V_S = 1'8 \cdot 10^5$ V ; b) $E_P = 9 \cdot 10^4$ N/C, $V_P = 9 \cdot 10^4$ V

25. Sea un condensador plano vertical cargado a una diferencia de potencial de 5000 V. Entre sus placas, separadas 20 cm, se sitúa un péndulo eléctrico cuya esfera metálica tiene 1 mm de radio y una densidad de 5 g/cm^3. Determinad el ángulo que formará el péndulo si la esfera del mismo se cargó a 2000 V.



Como hemos visto, un condensador es un dispositivo formado por dos partes metálicas (llamadas armaduras) que están separadas por un aislante. En nuestro caso las partes metálicas son dos placas de superficies planas y paralelas como se indica en la figura.

¿Qué es lo que sucede cuando dos láminas conductoras, iguales, descargadas y paralelas, se conectan a los extremos de un generador?

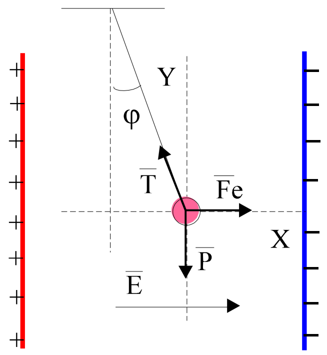
Al estar las láminas inicialmente descargadas, el potencial en ellas será nulo, de modo que por los hilos conductores circularán cargas hasta que el potencial en A sea igual que el del polo positivo B del generador (y el potencial en D igual que el de C), es decir, hasta que la diferencia de potencial entre las láminas sea la misma que entre los extremos del generador, siendo la carga adquirida por las láminas igual y de signo contrario (A positiva y D negativa). Las cargas suministradas por el generador a cada lámina se distribuirán por su superficie alejándose lo más posible unas de otras (ya que se repelen y las láminas son conductoras) hasta alcanzar una situación de equilibrio (reposo).

Entre las láminas del condensador cargado existirá, un campo eléctrico creado por las distribuciones de carga existentes en ellas. La intensidad de dicho campo ha de ser perpendicular a las láminas (sentido desde la positiva a la negativa) y su módulo vale $E = V_{AB}/d$ siendo V_{AB} la diferencia de potencial existente entre las láminas ($V_A - V_B$) y d la distancia a que se hallan separadas.

En el problema se nos dice que entre las láminas de un condensador plano se introduce un péndulo cuya esfera se halla cargada eléctricamente.

¿Qué le ocurrirá a la esfera?

Para comprender lo que le sucede, conviene comenzar por plantearse qué fuerzas actuarán sobre ella. Al encontrarse en el seno de un campo eléctrico y estar cargada, sobre la esfera, además del peso $\vec{P}$ y de la tensión $\vec{T}$ del hilo, actuará una tercera fuerza que será la fuerza electrostática $\vec{F}_e$ ejercida por el campo. Al actuar $\vec{F}_e$ la esfera perderá la situación de equilibrio en la que se encontraba (hilo vertical y tensión igual al peso) y pasará a otra en la que se cumplirá que:



$$\vec{F}_e + \vec{P} + \vec{T} = 0$$

Como podemos ver en la figura, el hilo del péndulo se desviará un cierto ángulo φ respecto de la vertical. Podemos plantearnos ahora *de qué dependerá dicho ángulo y cómo podríamos hallarlo.*

Cabe esperar que cuanto mayor sea la carga q de la esfera, mayor la intensidad del campo eléctrico entre las láminas y menor el peso, más grande sea el valor de φ. Para determinarlo podemos aplicar la ecuación anterior expresando cada uno de los vectores en función de sus componentes escalares y despejando φ. De esta forma tenemos:

$\vec{F}_e = q\cdot\vec{E} = q\cdot(E, 0) = (qE, 0)$

$\vec{P} = (0, -P) = (0, -mg)$

$\vec{T} = (T_x, T_y) = \left[T\cdot\cos(90+\varphi), T\cos\varphi\right] = (-T\,sen\ \varphi, T\cos\varphi)$

Sustituyendo en: $\vec{F}_e + \vec{P} + \vec{T} = 0 \rightarrow (qE, 0) + (0, -mg) + (-T\,sen\ \varphi, T\cos\varphi) = 0$

La ecuación vectorial obtenida puede descomponerse en dos escalares:

$qE - T\,sen\ \varphi = 0 \quad \rightarrow T\,sen\ \varphi = qE$

$T\cos\varphi - mg = 0 \rightarrow T\cos\varphi = mg$

y dividiendo entre si ambas ecuaciones obtenemos: $\boxed{tg\varphi = \dfrac{qE}{mg}}$

Podemos ahora, *analizar este primer resultado*, comprobando que contempla las hipótesis iniciales siendo fácil ver, por ejemplo, que cuanto mayor sea la carga q mayor será el ángulo φ (siempre a igualdad de los restantes factores), o que si el campo gravitatorio fuese nulo tg φ sería ∞, lo cual corresponde a un ángulo de 90º y que si no hubiese campo eléctrico tg φ sería 0 (lo que corresponde a un ángulo de 0º o hilo en la vertical).

Para calcular el valor de φ hemos de *poner E en función de los datos que se nos dan y averiguar el valor de q y de la masa de la esfera conductora*.

El valor E viene dado, en este caso, por: $E = V_{AB}/d = 5000/0'2 = 2'5 \cdot 10^4$ V/m

Como sabemos que la esfera se cargó a 2000 V, a partir de $V = K\cdot\dfrac{q}{R}$, podemos despejar q, de modo que: $q = \dfrac{V\cdot R}{K} = \dfrac{2000\cdot 10^{-3}}{9\cdot 10^9} = 2'22\cdot 10^{-10}$ C

En cuanto a la masa, como conocemos la densidad basta hacer m = ρ·V siendo V el volumen de la esferita y ρ su densidad, de manera que:

$$m = 5000\cdot\frac{4}{3}\pi^3(10^{-3})^3 = 2'1\cdot 10^{-5}\ \text{kg}$$

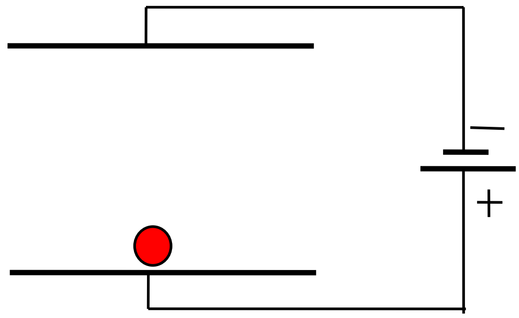
Sustituyendo los valores numéricos hallados, en la expresión de $tg\ \varphi = \dfrac{qE}{mg}$

obtenemos finalmente que $tg\ \varphi = 2'642\cdot 10^{-2} \rightarrow \varphi = 1'5º$

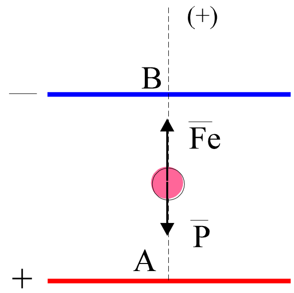
26. Determinad el valor de la diferencia de potencial que debemos aplicar a dos láminas planas, paralelas separadas 20 cm y situadas horizontalmente para que una partícula de 1 mg de masa y con una carga de 10 nC quede en suspensión entre ellas.

sol: 200 V

27. La esfera de la figura tiene una masa de 2 mg. Al dejarla en libertad en la lámina inferior asciende y llega a la superior al cabo de 0'4 s. Si la diferencia de potencial aplicada entre las láminas es de 10^3 V y la distancia entre ellas es de 20 cm, ¿qué carga tiene la esfera?



Al dejar la esfera encima de la lámina cargada positivamente, sobre ella actúan dos fuerzas: una, $\vec{F}_e$, debida al campo eléctrico existente entre las láminas y otra el peso, $\vec{P}$, debida al campo gravitatorio terrestre. Si la esfera, al dejarla en libertad asciende, significa que la fuerza electrostática tiene un valor mayor que el de la fuerza peso. En esas condiciones la esfera describirá una trayectoria rectilínea conocida.



¿Cómo podríamos calcular el valor de la carga q de la esfera?

Es evidente que del valor que tenga q va a depender la fuerza electrostática que actúe sobre la esfera ya que, como sabemos, $\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$, de forma que si conociésemos F_e y E tendríamos determinada la carga q haciendo $q = F_e/E$.

La intensidad del campo E entre las armaduras del condensador se puede calcular mediante la expresión: $E = V_{AB}/d$, siendo V_{AB} la diferencia de potencial entre sus placas y d la distancia entre las mismas. En cuanto a Fe, dado que la trayectoria que sigue la esferita es conocida, podemos aplicar un tratamiento escalar para su obtención.

Sugerid y llevad a cabo un procedimiento para calcular el valor Fe de la fuerza electrostática que se ejerce sobre la esfera durante su movimiento.

Como la trayectoria es rectilínea no habrá componente normal de la aceleración y por tanto, si tomamos como sentido positivo el del movimiento, la ecuación fundamental de la dinámica aplicada a la esfera se podrá enunciar como:

$F_{res\,t} = m \cdot a_t \rightarrow F_e - P = m \cdot a_t \rightarrow F_e = mg + m \cdot a_t$

Como vemos hemos de *calcular la aceleración tangencial con que se mueve la esfera* si queremos obtener el valor de F_e. Como el movimiento de la esfera es rectilíneo y uniformemente acelerado, podemos utilizar las ecuaciones de dicho movimiento, tomando como origen de espacios y de tiempos el punto de la lámina positiva donde se deja la esferita y el instante en que ello ocurre (y como sentido positivo el del movimiento):

$t_0 = 0$; $v_0 = 0$; $e_0 = 0$.

$v = a_t \cdot t$
$e = a_t \cdot t^2/2$

De la ecuación de e podemos obtener la aceleración si consideramos el instante en que la esfera llega a la otra placa, con lo que $a_t = 2d/t^2 = 2·0'2/0'4^2 = 2'5\ m/s^2$

Sustituyendo ahora en la expresión de q, obtenemos:

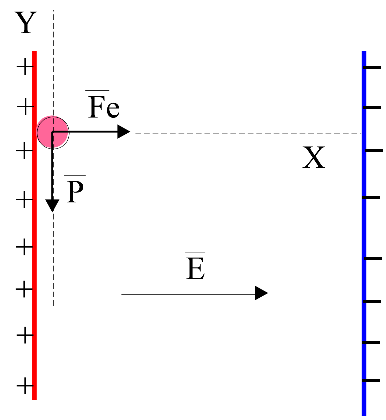
$$q = \frac{F_e}{E} = \frac{(mg + ma_t)\cdot d}{V_{AB}} = \frac{2\cdot 10^{-6}(10 + 2'5)\cdot 0'2}{10^3} = 5'26 \cdot 10^{-9}\ C = 5'26\ nC$$

28. Se conectan dos láminas planas y paralelas a una diferencia de potencial de 10^6 V. A continuación se deja en libertad, junto a la lámina positiva, una partícula de 0’1 mg de masa y carga 10 nC. Se pide:

a) La rapidez con que llegará a la lámina negativa sabiendo que el efecto de la fuerza peso resulta despreciable.
b) Energía cinética con que llega a la lámina expresada en eV.

Comenzaremos por realizar un análisis cualitativo de la situación planteada:

Al dejar una partícula cargada positivamente junto a la lámina positiva, estará sometida a la acción de dos fuerzas: la fuerza electrostática , $\vec{F}_e$ y el peso $\vec{P}$, que le provocarán un movimiento de trayectoria curva, en principio, desconocida y que podremos estudiar si tomamos un sistema referencial cartesiano y utilizamos un tratamiento vectorial, para deducir las características del movimiento y poder dar así respuesta a lo que se nos pregunta.

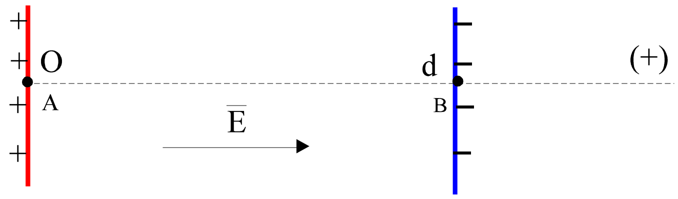


La aceleración con que se mueve la partícula cargada será:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{res}}{m} = \frac{\vec{F}_e + \vec{P}}{m} = \frac{(qE, 0) + (0, -mg)}{m} = \left(\frac{qE}{m}, -g\right)$$

Suele ser habitual, como ocurre en nuestro caso, que el valor de la fuerza electrostática sea mucho mayor que el peso, de forma que podamos despreciar el efecto de esta última. Con esta aproximación el problema se simplifica puesto que si se tiene en cuenta sólo la fuerza electrostática, la partícula describirá un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado, moviéndose desde la lámina positiva hacia la negativa, que podremos estudiar aplicando un tratamiento escalar. En ese caso la aceleración será:

$a = \dfrac{F_e}{m} = \dfrac{qE}{m}$ y considerando que $t_0 = 0$; $v_0 = 0$ y $e_0 = 0 \rightarrow v = a\cdot t$ y $e = at^2/2$



En el problema hemos de calcular la rapidez con que llegará la partícula a la lámina negativa. *Reflexionad sobre los factores que pueden influir en dicha rapidez y sugerid una posible estrategia para determinarla.*

Cabe esperar que dicha rapidez sea tanto mayor cuanto mayor sea la carga de la partícula y la intensidad del campo eléctrico donde se encuentra, así como cuanto menor sea el valor de su masa, ya que entonces se moverá con una aceleración más grande y, por tanto, adquirirá, en un tiempo dado, una rapidez mayor.

Un posible método para obtener la rapidez que se nos pide consiste en utilizar la ecuación: $v = a\cdot t$, determinando previamente el instante t’ en que la partícula alcanza la otra lámina. Para ello hemos de darnos cuenta que en ese instante $e = d$.

$$d = \frac{1}{2}at'^2 \rightarrow t' = \sqrt{\frac{2d}{a}} \rightarrow v = a\cdot t' = \sqrt{2ad} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$$

El resultado obtenido confirma las hipótesis que realizamos anteriormente respecto a los factores que influirían en la rapidez y cómo lo harían. Pero en él figura además la distancia d entre las láminas del condensador mostrando, al parecer, que cuanto mayor sea dicha distancia con mayor rapidez llegará la partícula cargada a la otra placa. Sin embargo, la dependencia de v con esta variable es preciso matizarla ya que lo que hemos dicho sólo es cierto a igualdad de los restantes factores y, como ya sabemos, en el caso de un condensador de láminas planas y paralelas, el campo eléctrico entre ellas es prácticamente uniforme y vale: $E = V_{AB}/d$, de modo que si d aumenta (manteniendo constante la diferencia de potencial), la E disminuirá en la misma proporción.

Sustituyendo $E = V_{AB}/d$ en la expresión anterior, nos queda:

$$v = \sqrt{\frac{2qV_{AB}}{m}} = 14'14 \text{ m/s}$$

que como, vemos, nos muestra que la rapidez buscada no depende de la distancia existente entre las dos láminas.

Sugerid y llevad a cabo otra estrategia para obtener la rapidez que se demanda.

El problema podría resolverse de una forma más breve mediante consideraciones de trabajo y energía.

En efecto, si designamos como estado A el correspondiente a cuando se abandona la partícula cargada sobre la lámina positiva y como estado B cuando ésta llega a la lámina negativa, podemos aplicar entre dichos estados la ecuación que relaciona el trabajo realizado por la fuerza resultante con la variación producida en la energía cinética y de ahí tratar de obtener la rapidez v_B.

Como la única fuerza a considerar es la electrostática (que además es conservativa), podemos escribir que:

$$W_{res\,A}^{\;B} = \Delta E_{c\,A}^{\;B} \rightarrow W_{Fe\,A}^{\;B} = Ec_B - Ec_A \rightarrow -\Delta Ep_e = Ec_B - Ec_A$$

Si ahora expresamos la variación de energía potencial electrostática en función de la diferencia de potencial, nos queda que:

$-\Delta Ep = -q\cdot\Delta V = Ec_B - Ec_A$ y como $Ec_A = 0$ y $-\Delta V = V_{AB}$, $q\cdot V_{AB} = Ec_B$

$q\cdot V_{AB} = \dfrac{mv_B^2}{2}$ y despejando v_B obtenemos finalmente: $\boxed{v_B = \sqrt{\dfrac{2q\cdot V_{AB}}{m}}}$.

La energía cinética con que la partícula positiva llega a la lámina negativa se puede determinar pues, como $Ec_B = q\cdot V_{AB}$.

Vemos que el valor de dicha energía depende exclusivamente de la carga de la partícula y de la diferencia de potencial existente entre las placas, de modo que cuanto más grandes sean ambos factores con mayor energía cinética llegará la partícula. El dispositivo estudiado (láminas conductoras conectadas a una diferencia de potencial elevada), constituye la base de los aceleradores lineales de partículas, que se utilizan para dotar a diversas partículas cargadas, de una gran energía cinética, con lo que se pueden utilizar como proyectiles con los que romper los núcleos atómicos e investigar así la estructura íntima de la materia.

Sustituyendo valores: $Ec_B = q \cdot V_{AB} = 10 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{6} = 10^{-2}$ J

En el problema se nos pide también que expresemos la energía cinética en “electrón-voltios” (eV). Se trata de una unidad muy utilizada en física de partículas, que significa la energía cinética que adquiere un electrón por la acción exclusiva de un campo eléctrico, cuando se desplaza de un punto a otro entre los que existe una diferencia de potencial de 1 V. (Nótese que en este caso V_{AB} = -1V ya que el electrón, por ser una carga negativa, es desplazado por el campo hacia potenciales crecientes). Para determinar su equivalencia en julios basta con aplicar la expresión, ya manejada anteriormente:

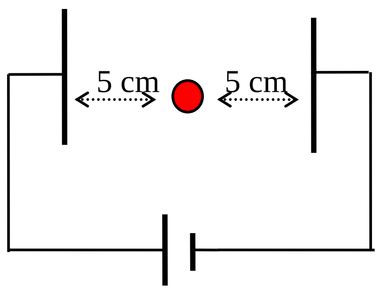
$$W_{res\,A}^{\ \ B} = \Delta E_{c\,A}^{\ B} \rightarrow W_{Fe\,A}^{\ \ B} = Ec_B = q \cdot V_{AB}$$

Sustituyendo q por la carga del electrón $q_e = -1'6 \cdot 10^{-19}$ C y V_{AB} por −1 voltio, nos queda:

$1 \text{ eV} = -1'6 \cdot 10^{-19} \cdot (-1) = 1'6 \cdot 10^{-19}$ J

En nuestro caso como $Ec_B = 10^{-2}$ J, tendremos: $Ec_B = 10^{-2}/1'6 \cdot 10^{-19} = 6'25 \cdot 10^{16}$ eV

29. Una esfera conductora de 10 μg de masa y 1 mm de radio se carga conectándola a un potencial de -9000 V. Si se deja en el punto medio entre dos láminas verticales separadas 10 cm y conectadas a una diferencia de potencial V, determinad:



a) Valor de V si sabemos que llega hasta la lámina correspondiente con rapidez de 10 m/s (se desprecia el efecto de la fuerza peso).
b) Energía cinética con la que llega a la lámina en eV.

sol: a) V =1000 V; Ec = $3'1.10^{12}$ eV

30. Un haz de electrones penetra en el espacio comprendido entre las placas de un condensador plano, paralelamente a éstas, con una rapidez v. Si entre las placas se aplica una diferencia de potencial V se observa que, a la salida, la trayectoria forma un ángulo de 20^0 con la dirección inicial .

a) ¿Cuál será la desviación si se duplica la rapidez inicial?
b) ¿Y si dejando la misma rapidez inicial se duplica la diferencia de potencial aplicada? (Se desprecia el efecto del peso).

sol: a) $\varphi = 5'2^0$, b) $\varphi' = 36^0$.

9. MOVIMIENTO ONDULATORIO

1. Razonad cómo se propaga una onda longitudinal a lo largo del conjunto de péndulos de acero de la figura.

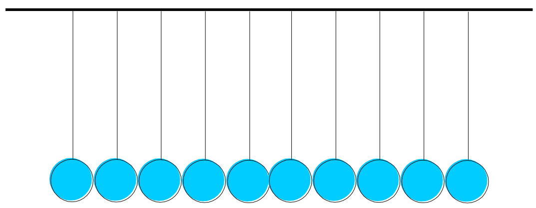
Supongamos, en primer lugar, que tenemos un único péndulo. Si lo separamos ligeramente de su estado "natural" estamos introduciendo una "perturbación". Ésta acción lleva consigo el suministro de una energía que quedará, en principio, acumulada en la propia perturbación. Si soltamos el péndulo, desde un ángulo pequeño, oscilará con un movimiento armónico simple y por tanto su rapidez en cualquier instante se podrá expresar mediante la ecuación v = Awcos(wt) (siendo A la amplitud de oscilación, w =2π/T y T el periodo).

El valor de la energía E asociada a una partícula que realiza este tipo de movimiento, permanece constante y puede ser evaluado en cualquier posición como la suma de la energía cinética y la potencial. En particular, cuando pase por la posición de equilibrio su energía potencial será nula y su energía cinética máxima, de modo que podemos escribir:

$$E = Ec_{max} = \frac{1}{2}mv^2_{max} = \frac{1}{2}m \cdot A^2 w^2 = \frac{1}{2}m \cdot A^2 4\pi^2 \cdot \upsilon^2 \rightarrow E = 2\pi^2 \cdot m \cdot \upsilon^2 \cdot A^2$$

en donde υ es la frecuencia de la oscilación (υ =1/T). En ausencia de fuerzas de fricción, esta energía permanecería indefinidamente en el péndulo.

Si realizamos el mismo proceso con el primero de los péndulos del conjunto representado en la figura adjunta, al soltarlo colisionará con el siguiente. *¿Qué ocurrirá entonces con la energía?*



Como se trata de un choque elástico y directo entre dos cuerpos de la misma masa, intercambiarán sus velocidades, de modo que el péndulo 1 quedará en reposo y el 2 colisionará con el 3 con la misma velocidad con que el 1 lo hizo con él. Este proceso se repetirá con todos los péndulos. Vemos pues, que cada péndulo transmitirá íntegramente la energía al siguiente, permaneciendo en reposo en la posición que ocupaba originalmente.

A los fenómenos físicos de este tipo, en los que se produce un transporte de energía sin que exista un transporte de materia, se les da el nombre de movimientos ondulatorios.

¿Qué ocurriría si en lugar de desplazar el péndulo 1 en la dirección de la fila de péndulos lo hiciéramos perpendicularmente al plano del papel?

Veríamos que permanecería oscilando sin interaccionar con el resto, es decir, que la perturbación (energía) queda localizada (no se propaga). En los casos en que esto ocurre se dice que el medio no es elástico frente a la perturbación introducida.

¿Qué condiciones son necesarias para que se produzca un movimiento ondulatorio en un medio material?

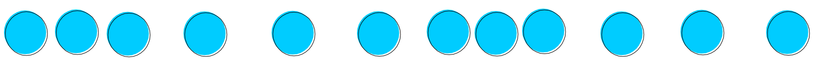
Podemos resumirlas diciendo que es preciso introducir una perturbación (energía) y que el medio sea elástico para dicha perturbación.

Conviene tener en cuenta que, en general, los medios no son "perfectamente elásticos" y por esta causa, la perturbación se va amortiguando a medida que avanza (va disminuyendo su amplitud). En nuestro ejemplo, bastaría con separar ligeramente los péndulos para apreciar que tras la colisión no quedarían en reposo y, por tanto, que no se ha transmitido íntegramente la energía de uno a otro. Cuanto más separados estén, menos elástico será el medio y más se amortiguará la perturbación.

Si realizásemos la experiencia propuesta con los péndulos ligeramente separados unos de otros, no veríamos lo que sucede con cada uno en particular debido a la rapidez del fenómeno, pero sí que tendríamos una "sensación visual" que nos permitiría apreciar una compresión que parecería desplazarse de izquierda a derecha (suponiendo que sólo introducimos una perturbación en el primer péndulo).

¿Qué deberíamos hacer para conseguir que el conjunto de los péndulos estuviera recorrido por una serie sucesiva de perturbaciones?

Tendríamos que ir introduciendo en el primer péndulo la misma energía por unidad de tiempo, que la que se está propagando. En ese caso visualizaríamos compresiones y enrarecimientos que se desplazarían hacia la derecha (equivalentes, respectivamente, a las crestas y valles de las ondas transversales).

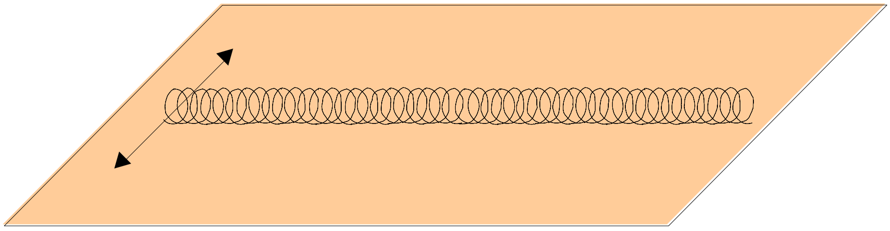


El fenómeno descrito sucederá siempre que la perturbación tenga la misma dirección que la de propagación de la onda y se le da el nombre de "onda longitudinal"

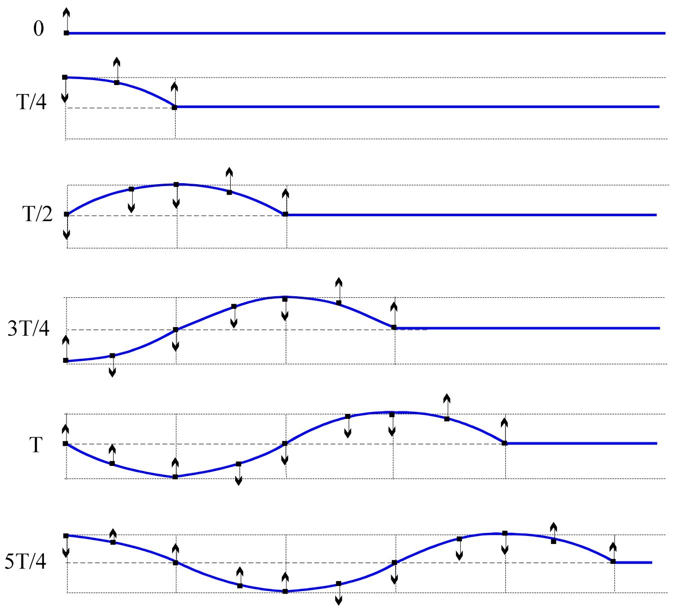
2. Obtened la ecuación que representa el avance de un movimiento armónico simple (onda armónica) por un resorte que se encuentra sobre un plano horizontal.

Tomemos un muelle elástico (también podría valer una cuerda) y situémoslo sobre un plano horizontal con el que presente un rozamiento despreciable.

Si aplicamos en uno de sus extremos un movimiento armónico simple cuya dirección se encuentre sobre el plano y sea perpendicular al muelle (ver figura adjunta), veremos que la perturbación no queda localizada en el punto en el que se ha introducido (foco) sino que viaja a lo largo del resorte.



Conviene diferenciar bien entre lo que es el efecto visual de la propagación y el movimiento que realmente se propaga. Para ello nada mejor que tomar una serie de instantáneas en las que se pueda apreciar la posición de todos los puntos que constituyen el resorte vistos desde arriba (para simplificar, consideraremos que el medio es perfectamente elástico y que, por tanto, no hay amortiguamiento).



En la figura, las flechas indican el sentido en que va a desplazarse el punto considerado (lo que nos ayudará a hacernos una idea de cómo va a evolucionar el conjunto). De la observación de cómo se mueven los puntos del medio y cómo se propaga la perturbación, podemos concluir que:

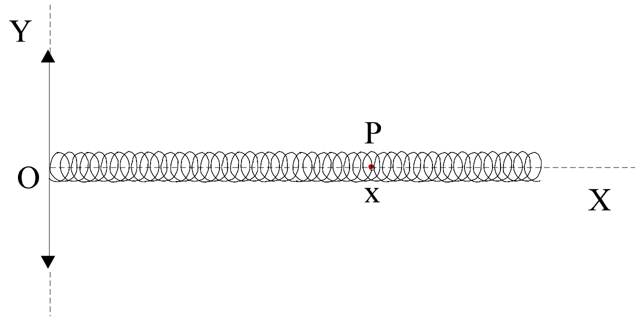
a) Se aprecian una serie sucesiva de crestas y de valles que avanzan por el resorte.

b) En el tiempo de un periodo T, la perturbación avanza una longitud que abarca una cresta y un valle. Dicha longitud (medida sobre la recta, **no** sobre el muelle), recibe el nombre de longitud de onda y se representa por λ.

c) Si coloreásemos varios puntos del resorte para concentrar en ellos nuestra atención, dejaríamos de ver las crestas y los valles, para apreciar que dichos puntos describen exactamente el mismo movimiento armónico simple que el foco, pero con un cierto retraso.

Para poder estudiar el fenómeno con mayor profundidad nos interesará cuantificarlo. Con este fin, trataremos de expresar matemáticamente el movimiento armónico simple que se propaga por el resorte (medio elástico). Se trata de obtener una ecuación que nos permita conocer el valor de la perturbación en un punto P cualquiera del resorte, en cualquier instante t (ecuación de propagación de una onda armónica).

Si tomamos unos ejes como los de la figura adjunta y consideramos que se introduce en el foco (situado en el punto O) un movimiento armónico simple de amplitud A y frecuencia υ, la ecuación que determinará el movimiento de este punto será:



$Y_F = A\text{sen}2\pi\upsilon t$.

En la ecuación anterior t es el tiempo que indica un cronómetro que se puso en marcha en el momento en que el punto O (en este caso el foco) inició el ascenso, de modo que sustituyendo t por el valor correspondiente a un instante dado, obtendremos el valor de la elongación del foco Y_F en ese preciso instante.

¿Cuál será la ecuación correspondiente a un punto P situado a una distancia x del foco?

Si tenemos en cuenta que la perturbación que se inició en el foco en el instante 0, tarda un cierto tiempo t' en llegar al punto P, es lógico pensar que en cualquier instante t posterior a t' el punto P llevará vibrando (t-t') s y en consecuencia la ecuación que determinará su movimiento será:

$Y_P = A\text{sen}2\pi\upsilon\,(t-t')$

Como la perturbación se propaga con movimiento uniforme, podemos escribir que la rapidez con que lo hace viene dada por $v = x/t'$ y sustituyendo en la ecuación anterior:

$Y_P = A\text{sen}2\pi\upsilon\,(t-x/v)$

Si ahora tenemos en cuenta que el periodo T y la frecuencia ν son inversamente proporcionales ($\upsilon = 1/T$), obtenemos que: $Y_P = A\text{sen}2\pi\,(t/T-x/vT)$

La expresión obtenida corresponde a la ecuación del movimiento ondulatorio analizado. En ella se denomina fase φ a $2\pi\,(t/T-x/vT)$, es decir, al ángulo del cual se calcula el seno y que irá expresado en radianes.

La función obtenida es periódica, ya que se trata del producto de una constante (A) por una función periódica (sen φ). Si la analizamos con más detenimiento podemos *compro-*

bar que es doblemente periódica y que los valores de "Y" *se repiten en el tiempo (para un valor de x determinado) y en el espacio (para un instante dado).*

a) En el tiempo. Si nos situamos en un punto P cualquiera del medio por donde se propaga la onda (fijamos el valor de x) y dejamos transcurrir el tiempo, veremos que para que en dos instantes dados t_1 y t_2 la elongación Y_P tome idéntico valor, se debe cumplir que:

$$\text{sen}2\pi\,(t_1/T - x/vT) = \text{sen}2\pi\,(t_2/T - x/vT)$$

Esta igualdad se cumplirá siempre que los ángulos se diferencien en un número entero de veces 2π radianes. Por tanto:

$$2\pi\,(t_2/T - x/vT) - 2\pi\,(t_1/T - x/vT) = n\cdot 2\pi$$ (donde n es un número entero cualquiera).

Simplificando: $t_2 - t_1 = nT$. Consecuentemente, el menor intervalo de tiempo para el cual se repetirá el estado de vibración del punto P será precisamente cada periodo T (n = 1).

b) En el espacio. Si en un instante determinado t (fijamos el valor de t), evaluamos la perturbación en distintos puntos del medio por el que se realiza la propagación (como si tomásemos una fotografía), veremos que hay una serie de puntos que se encuentran en idéntico estado de vibración. Si nos fijamos en dos de ellos (dados por x_1 y x_2) podremos escribir que para que la elongación Y_P de cada uno tome idéntico valor, se debe cumplir que:

$$\text{sen}2\pi\,(t/T - x_1/vT) = \text{sen}2\pi\,(t/T - x_2/vT)$$

Esta igualdad se cumplirá siempre que:

$$2\pi\,(t/T - x_1/vT) - 2\pi\,(t/T - x_2/vT) = n\cdot 2\pi$$ (siendo n un entero cualquiera).

Simplificando: $(x_2/vT) - (x_2\ vT) = n$, y despejando obtenemos que $x_2 - x_1 = n\cdot vT$, de modo que la distancia existente entre dos puntos consecutivos del medio que se encuentren en el mismo estado de vibración se obtendrá haciendo n = 1 en la expresión anterior. A dicha distancia se le denomina longitud de onda λ, y vale $\lambda = vT$.

¿Cómo variaría la expresión que nos da el valor de la perturbación en un punto cualquiera P del medio si al poner el cronómetro en marcha, la perturbación en el foco (x = 0) no hubiera sido nula?

Basta considerar que, en este caso, al existir una fase inicial (φ_0), la ecuación se transformará en:

$$Y_P = A\cdot\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

en la que, como podemos ver, cuando t = 0 y x = 0, obtenemos que $Y = A$ sen φ_0 (estado de vibración del foco en el instante inicial). En el caso particular de que φ_0 sea 0 la expresión se convierte de nuevo en la anterior.

3. Un sonido de una frecuencia de 200 Hz se desplaza por un cierto medio sólido a 3000 m/s y en el aire lo hace a 340 m/s. Determinad la longitud de onda que tendrá la onda sonora en cada uno de estos medios.

sol: En el sólido: λ_s = 15 m y en el aire λ_a = 1’7 m.

4. Determinad la longitud de onda que presenta en el aire una onda electromagnética de 100 Hz sabiendo que se propaga a 300.000 km/s. ¿Y en el agua, donde se propaga a 225.000 km/s?

sol: En el aire, $\lambda = 3\cdot10^6$ m . En el agua, $\lambda = 2'25\cdot10^6$ m.

5. Sabiendo que la función ψ de una onda viene dada en metros para t en segundos y “x” y “d” en metros. Determinad las características de los movimientos ondulatorios cuyas ecuaciones de propagación son:

a) $\psi = 2 \text{ sen } 2\pi\,(t/0'01 - x/30)$
b) $\psi = 0'03 \text{ sen } 2\pi\,(60t - 2d)$
c) $\psi = \text{sen } 2\pi\,(t/2 + x/20)$
d) $Y = 0'01 \text{ sen } (x - t/2)$

La ecuación general que representa la propagación de una onda plana armónica longitudinal cuya dirección de propagación coincide con el eje OX de coordenadas es de la forma:

$$\psi = \text{Asen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

en la que Ψ representa el valor de la perturbación en un punto cualquiera del medio (si la onda fuese plana y transversal se representaría por “Y”). También puede suceder que, si la dirección de propagación no coincide con OX, figure “d” en lugar de x.

Cada onda plana armónica está caracterizada por unos valores de A (amplitud), T (periodo), λ (longitud de onda) y φ_0 (fase inicial), no siendo necesario explicitar los valores de la frecuencia υ ni de la velocidad de propagación de la onda v, puesto que están relacionados con los anteriores mediante las expresiones $\upsilon = 1/T$ y $v = \lambda/T$. Si nos dan los valores de las magnitudes citadas, no tenemos más que sustituirlos en la expresión de Ψ para obtener la ecuación de propagación correspondiente a dicha onda plana armónica.

¿Cómo deberíamos proceder si lo que conocemos es la ecuación de propagación y queremos determinar los valores de las magnitudes características?

Es razonable pensar, que tendremos que comparar la ecuación dato con la expresión general e identificar los coeficientes. *Apliquemos este procedimiento en los casos en que se nos plantea en el enunciado de este ejercicio*.

a) $\psi = 2 \text{ sen } 2\pi\,(t/0'01 - x/30)$. Identificando coeficientes tenemos:

A = 2 m (ya que ψ va en m y la función sen no tiene unidades).
T = 0'01 s (porque t va en segundos y el ángulo debe ir en radianes).
λ = 30 m (porque x va en m y el ángulo debe ir en radianes).
$\varphi_0 = 0$ (en la ecuación no figura ninguna fase inicial).

Se trata, pues, de una onda plana armónica que se desplaza según OX (+) de forma que en el instante t = 0 el punto que se encuentra en x = 0 tiene fase 0. Sus magnitudes características son:

A = 2m, T = 0'01 s, $\upsilon = 1/T = 100$ Hz, $\lambda = 30$ m y se propaga con $v = \lambda/T = 3000$ m/s.

b) $\psi = 0'03 \text{ sen } 2\pi\,(60t - 2d)$.

Se trata de una onda plana armónica que se desplaza en una cierta dirección de forma que a una distancia d = 0 del punto tomado como origen de distancia (que suele ser el foco) en t = 0 tiene fase 0. Identificando coeficientes vemos que:

A = 0'03 m; $1/T = 60 \rightarrow T = 1/60$ s; $\upsilon = 1/T = 60$ Hz; $1/\lambda = 2 \rightarrow \lambda = 0'5$ m; $v = \lambda/T = 30$ m/s

Otra posibilidad es poner la ecuación dada en el enunciado en la forma:

$$\psi = 0'03 \,\text{sen}\, 2\pi\left(\frac{t}{1/60} - \frac{d}{1/2}\right)$$

e identificar los coeficientes directamente.

c) $\psi = \text{sen } 2\pi\,(t/2 + x/20)$.

Esta expresión presenta una novedad respecto de las dos anteriores y es que la x lleva signo positivo. *¿Cómo se interpreta esto?* Si nos fijamos veremos que en estas condiciones aquellos puntos que tengan mayor valor de x tendrán también una fase mayor, es decir, comenzaron a vibrar antes, lo que significa que la perturbación está viajando hacia valores de x decrecientes, o lo que es lo mismo, según OX (-).

Identificando coeficientes: A = 1 m, T = 2 s, $\upsilon = 0'5$ Hz, $\lambda = 20$ m , $v = 10$ m/s, $\varphi_0 = 0$.

d) $Y = 0'01 \text{sen}\,(x - t/2)$

En esta expresión apreciamos dos variaciones respecto a la general:

En primer lugar, ψ ha sido sustituida por "Y", lo que significará que se trata de una onda armónica plana transversal de forma que la perturbación que se propaga tiene la dirección de OY.

En segundo lugar, en la fase figuran cambiadas de signo la x y la t. Si consideramos la relación trigonométrica sen φ = sen (-φ +π), veremos que la ecuación anterior puede expresarse como:

$$Y = 0'01\text{sen}\left[\left(\frac{t}{2} - x\right) + \pi\right]$$

Por tanto, se trata de una onda armónica plana transversal que viaja según OX (+) de forma que en el instante t = 0, el punto x = 0 tiene una fase de π rad. La expresión anterior se puede escribir de forma coincidente con la general como:

$$Y = 0'01\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{4\pi} - \frac{x}{2\pi}\right) + \pi\right]$$ con la que resulta muy sencillo identificar coeficientes:

A = 0’01 m, T = 4π s, υ = 1/4π Hz, λ = 2π m , v = 0’5 m/s, φ_0 = π rad.

6. La ecuación de propagación de una onda es: ψ =3’5 sen (0’3x - πt + 0’2), (ψ en mm si t en s y x en m), representa la propagación de una onda plana armónica. Expresad de tantas formas como sepáis la ecuación de este movimiento y señalad cuáles son sus características.

Anteriormente hemos visto que la ecuación

$$\psi = A\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

nos sirve para representar una onda armónica plana que se propaga en un medio sin absorción. La ecuación que se nos da en el enunciado no presenta la misma forma. No obstante no se trata de un error ya que una ecuación de este tipo puede ser expresada mediante otras formas distintas pero todas ellas equivalentes. Para comprobarlo, vamos a *escribir la ecuación del enunciado de tres formas diferentes haciendo uso de las conocidas relaciones trigonométricas:*

a) sen φ = sen (-φ + π)
b) sen φ = cos (φ - π/2)
c) cos φ = cos (-φ)

Aplicando las relaciones anteriores la ecuación que se nos da en el enunciado de este ejercicio, ψ =3’5sen (0’3x-πt +0’2), se puede expresar de tres formas distintas:

a) ψ = 3’5sen (πt- 0’3x-0’2+π) = $3'5\text{sen}\left[\pi t - 0'3x + (\pi - 0'2)\right]$
b) ψ = 3’5cos (0’3x-πt +0’2-π/2) = $3'5\cos\left[0'3x - \pi t + (0'2 - \pi/2)\right]$
c) ψ = $3'5\cos\left[0'3x - \pi t + (0'2 - \pi/2)\right] = 3'5\cos\left[\pi t - 0'3x + (\pi/2 - 0'2)\right]$

Si consideramos la primera de ellas, veremos que se presenta en la forma en que habitualmente trabajamos:

$$\psi = \text{Asen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

En efecto, $\psi = 3'5\text{sen}\left[\pi t - 0'3x + (\pi - 0'2)\right]$ y comparando con la ecuación general:

A = 3’5 mm; $2\pi/T = \pi \rightarrow T = 2$ s $\rightarrow \upsilon = 0'5$ Hz; $2\pi/\lambda = 0'3 \rightarrow \lambda = 20'9$ m; $v = \lambda/T = 10'5$ m/s

En cuanto a la fase inicial, $\varphi_0 = \pi - 0'2 = 2'9$ rad. Se trata pues de una onda armónica plana que se desplaza según OX (+) con una amplitud de 3’5 m, una frecuencia de 0’5 Hz y una longitud de onda de 20’9 m, a una velocidad de 10’5 m/s.

7. ¿Qué características tiene una onda cuya ecuación de propagación viene dada por: Y= 2 cos2π (500t - 0’5x) (donde x e Y van en m y t en s)?

sol: Onda plana transversal que se propaga hacia OX (+), A = 2 m, $\upsilon = 500$ Hz
$\lambda = 2$ m, $\varphi_0 = \pi/2$ rad (si tomamos como ecuación de la onda la función seno)

8. Una emisora de radio emite una onda electromagnética cuyo campo eléctrico viene dado por la ecuación: $E(x,t) = 10^{-3}\cos(\pi x - .... t)$. Completa la ecuación sabiendo que la velocidad con que se propaga la onda es $c = 3\cdot10^8$ m/s.

sol: $E(x,t) = 10^{-3}\cos(\pi x - 3\pi 10^8 t)$

9. Obtened la frecuencia y la longitud de onda del campo eléctrico definido por la ecuación: $E(x,t) = 10^{-3}\cos(200x - 5\cdot10^{10} t)$, donde x se mide en m y t en s. ¿Cuál es el índice de refracción del medio? ($c = 3\cdot10^8$ m/s).

sol: $\upsilon = 7'95\cdot10^9$ Hz; $\lambda = 0'031$ m; n =1’2

10. Dada una onda armónica plana de amplitud A = 0’2 m y frecuencia υ = 0’5 Hz que se propaga con rapidez v = 0’25 m/s en un medio dado, se pide:

a) Ecuación de la perturbación en un punto P situado a 3 metros del foco sabiendo que el cronómetro se puso en marcha al iniciarse la perturbación en el foco.
b) Valor de la perturbación en P en los instantes 5, 13 y 15’5 (todos ellos en segundos).

Si hacemos coincidir la dirección de propagación con OX(+) y el origen con el foco, la ecuación de la onda será de la forma:

$$\psi = \text{Asen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

Esta ecuación quedará perfectamente definida cuando conozcamos los valores de A, T, λ y φ_0, los cuales podemos *averiguar con los datos que se nos dan en el enunciado.*

A = 0’2 m; υ = 0’5 Hz $\rightarrow$T= 1/υ = 2s; v = 0’25 m/s $\rightarrow \lambda$ = v ·T= 0’5 m

Para t = 0, en x = 0 la fase es φ_0 = 0, luego la ecuación para cualquier punto será:

$$\psi = 0'2\,\text{sen}2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{0'5}\right)$$

y si ahora particularizamos para el punto P que se encuentra en x = 3 m:

$$\psi_P = 0'2\text{sen}2\pi\left(\frac{t}{2} - 6\right)$$

Podemos ahora *proceder a calcular el valor de la perturbación en el punto P en los instantes demandados* 5 s, 13 s y 15’5 s.

Para ello basta sustituir los valores de t correspondientes en la expresión anterior:

Para t = 5 s: $\psi_P = 0'2\text{sen}2\pi(2'5 - 6)$.

Como vemos la diferencia dentro del paréntesis es negativa *¿Cómo se interpreta esto?* El tiempo que tarda la perturbación en llegar desde el foco a un punto P situado a 3 m de distancia del mismo es t’ = x/v = 12 s, es decir, mayor de 5 s. Por tanto no debemos de seguir operando porque al no haber llegado todavía la perturbación al punto P, éste se encontrará en reposo en la posición de equilibrio, es decir: Ψ_P = 0.

Para t = 13 s: $\psi_P = 0'2\text{sen}2\pi(6'5 - 6) = 0$.

Como el periodo vale T = 2 s y la perturbación emplea en llegar 12 s al punto P, concluimos que dicho punto, en el instante t =13 s, se encuentra en la posición de equilibrio, después de haber realizado medio ciclo.

Para t = 15’5 s:

$\psi_P = 0'2\text{sen}2\pi(7'75 - 6)$ = 0’2sen3’5 π = 0’2sen (2π + 1’5π) = 0’2sen1’5π

Por tanto, en el instante t = 15’5 s tendremos Ψ_P = - 0’2 m y el punto P habrá realizado 3/4 de ciclo.

¿Cuál sería la elongación del punto P en el instante t = 17’5 s?

Sin realizar ningún cálculo podemos decir que será la misma que acabamos de calcular para t = 15’5 s, ya que al ser el periodo T = 2s, cada 2 s se repetirá el estado de vibración.

11. Determinad la diferencia de fase que habrá en un mismo instante entre dos puntos dados de un medio por el que se propaga una onda, sabiendo que se encuentran a distancias de 10 m y 16 m del foco, que la velocidad de propagación de la onda es de 300 m/s y su periodo T = 0’04 s.

Como en el enunciado no se especifica nada al respecto, consideraremos el caso sencillo de una onda armónica plana que se propaga según el eje OX(+) con el foco en el origen, de modo que la ecuación que nos da el valor de la perturbación en cualquier punto e instante será:

$$\psi = \mathrm{Asen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

Como ya hemos indicado en ejercicios anteriores, la fase es el ángulo expresado en radianes, que siendo función de t y de x determina el valor de Ψ de un punto en un instante dado.

Si consideramos los puntos P (x_P = 10 m) y Q (x_Q = 16 m), la perturbación en cada uno de ellos viene dada por:

$$\Psi_P = \mathrm{Asen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_P}{\lambda}\right) + \varphi_0\right] \quad \text{y} \quad \Psi_Q = \mathrm{Asen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_Q}{\lambda}\right) + \varphi_0\right] \text{ respectivamente.}$$

En un instante cualquiera, la fase correspondiente a cada uno de esos puntos será:

$$\varphi_P = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_P}{\lambda}\right) + \varphi_0 \text{ para el punto P, y } \quad \varphi_Q = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_Q}{\lambda}\right) + \varphi_0 \text{ para el Q.}$$

Para evaluar la diferencia de fase existente entre ambos, tendremos que expresarla como $\Delta\varphi = \varphi_P - \varphi_Q$ ya que al estar Q más alejado, comenzará a moverse más tarde y su fase en un mismo instante será menor que la de P.

Sustituyendo obtenemos que:

$$\varphi_P - \varphi_Q = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_P}{\lambda}\right) + \varphi_0 - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_Q}{\lambda}\right) - \varphi_0 \rightarrow \boxed{\varphi_P - \varphi_Q = \frac{2\pi}{\lambda}(x_Q - x_P)}$$

Si analizamos el resultado anterior, nos daremos cuenta de que la diferencia de fase depende de la diferencia de distancias entre los puntos y el foco así como del valor de la longitud de onda. Cuando dos puntos se encuentran en idéntico estado de vibración se dice que están en concordancia de fase. Ello exige que en cada instante el valor de la perturbación en cada uno de esos dos puntos sea el mismo, para lo cual se debe de cumplir que:

$\varphi_P - \varphi_Q = n \cdot 2\pi$ (siendo n un número entero).

Si introducimos esta condición en la ecuación obtenida, nos queda:

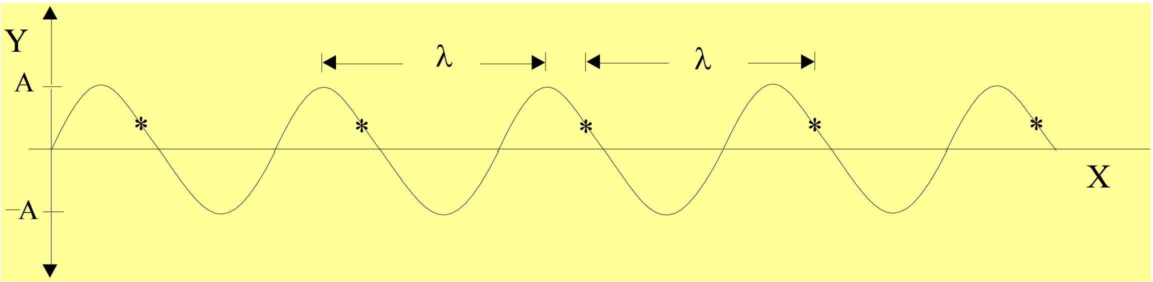
$\frac{2\pi}{\lambda}(x_Q - x_P) = n \cdot 2\pi$, y despejando: $x_Q - x_P = n \cdot \lambda$

Así pues:

Para que dos puntos situados sobre el mismo eje OX en el que se halla el foco se encuentren en fase, la distancia existente entre ellos ha de ser igual a un número entero de veces la longitud de onda.

La conclusión es lógica pues, como ya vimos en un ejercicio anterior, la longitud de onda se puede interpretar como la distancia existente entre dos puntos consecutivos que se hallan en idéntico estado de vibración (y, por tanto en fase).

Así, por ejemplo, todos los puntos señalados con un * en la figura siguiente, se encuentran en fase ya que para cualquier pareja de ellos la distancia que los separa es $n \cdot \lambda$



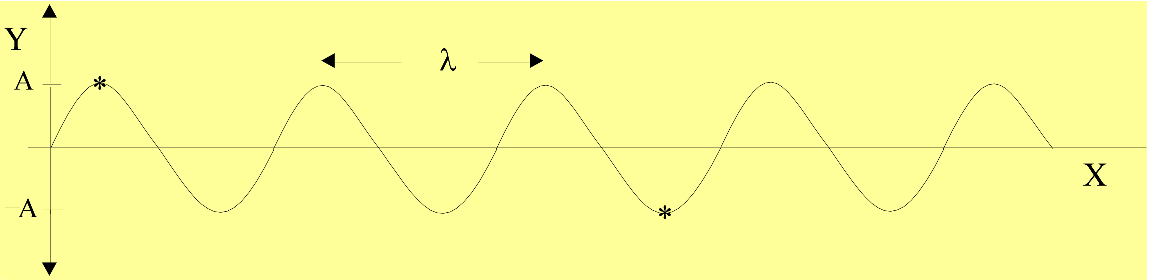
Podemos, proseguir con este análisis y plantearnos ahora *qué deberá ocurrir para que dos puntos se encuentren en oposición de fase* (es decir que en cada instante la elongación o valor de la perturbación sea el mismo pero con distinto signo).

Para que dos puntos se encuentren en oposición de fase, la diferencia de fase existente entre ellos deberá de ser igual a un número impar de veces π rad. De ese modo sen φ para cada uno será igual y opuesto y lo mismo ocurrirá con el valor de la perturbación Ψ en todo momento. Así pues, si introducimos esta condición en la ecuación anteriormente obtenida para la diferencia de fase entre dos puntos, nos queda que:

$\frac{2\pi}{\lambda}(x_Q - x_P) = (2n+1) \cdot \pi$, y despejando: $x_Q - x_P = (2n+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$

Por tanto: Para que dos puntos se encuentren en oposición de fase, la diferencia de distancias al foco deberá ser igual a un número impar de semilongitudes de onda.

En la figura siguiente los puntos señalados con * se encuentran en oposición de fase, ya que la distancia entre ellos es de $5\lambda/2$.



En el ejercicio que nos ocupa, para calcular el valor de la diferencia de fase, necesitamos saber primero el de la longitud de onda:

$\lambda = v \cdot T = 300 \cdot 0'04 = 12$ m, de modo que: $\varphi_P - \varphi_Q = \dfrac{2\pi}{\lambda}(x_Q - x_P) = \dfrac{2\pi}{12}(16-10) = \pi$ rad

Al ser la diferencia de fase un número impar de veces π, cuando la perturbación alcance el máximo valor en uno de los puntos, tomará el valor mínimo en el otro. Conviene darse cuenta también de que la distancia entre los puntos P y Q es una semilongitud de onda, coherentemente con los razonamientos anteriores.

12. Una onda cuya frecuencia es de 500 Hz tiene una velocidad de propagación, en un cierto medio, de 350 m/s. ¿Qué distancia hay entre dos puntos de ese medio que en un instante dado tienen una diferencia de fase de 60^0?

sol: $\Delta d = 0'117$ m

13. Una onda está representada por la ecuación: $Y = 2 \cos 2\pi (t/4 + x/160)$ (donde x e Y van en cm y t en s). Determinad:

a) Características de la onda.
b) Diferencia de fase para dos posiciones de la misma partícula cuando el intervalo de tiempo transcurrido sea de 2 s.
c) Diferencia de fase en el mismo instante entre dos partículas separadas entre si 120 cm en la dirección de avance de la onda.

sol: a) Onda plana transversal que se mueve hacia x decreciente A= 2 cm; T= 4s; λ=160 cm; $v = 0'4$ m/s; b) $\Delta\varphi = \pi$ rad; c) $\Delta\varphi = 3\pi/2$ rad.

14. Una onda sonora de una frecuencia de 486 Hz se propaga en el aire con amplitud constante de 0'25 mm. Sabiendo que su longitud de onda es de 70 cm, calculad la velocidad de propagación de la onda y la velocidad de las partículas del medio.

Como se nos indica en el enunciado que la onda se propaga con una amplitud constante, debemos considerar que se trata de una onda armónica plana que avanza en un medio en el que la absorción es despreciable.

Tomando la propagación según OX(+) y el origen en un punto en el que la fase sea nula en el instante inicial, la ecuación será:

$$\psi = \mathrm{Asen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

Su velocidad de propagación será en la misma dirección y sentido que OX(+) y su módulo valdrá: $v = \lambda/T = \lambda\cdot\upsilon = 0'7\cdot 486 = 340'2$ m/s (velocidad de propagación del sonido en el aire).

La velocidad con que se propaga una onda mecánica por un medio dado, no es lo mismo que la velocidad con que vibran las partículas que transmiten la perturbación. *¿Cómo podríamos conocer esta última?*

Hemos de pensar que lo que se propaga es una perturbación armónica de modo que las partículas del medio describen un movimiento armónico simple y, en consecuencia, vibrarán sobre su trayectoria con la velocidad que corresponda a dicho movimiento. Ésta tendrá la misma dirección y sentido que la de propagación de la perturbación en el caso de las ondas longitudinales, como el sonido en el aire, o perpendicular a ella (ondas transversales). Sabemos que para una partícula que describe un movimiento armónico simple, la rapidez con que vibra en cualquier instante viene dada por:

$$v = d\Psi/dt = \mathrm{Aw}\cdot\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Este resultado muestra que las partículas del medio vibran con una rapidez que varía sinusoidalmente entre $v_{max} = +Aw$ y $v_{min} = -Aw$.

En nuestro caso:

$$v = \mathrm{Aw}\cdot\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 0'25\cdot 10^{-3}\cdot\frac{2\pi}{1/486}\cdot\cos 2\pi\left(\frac{t}{1/486} - \frac{x}{0'7}\right)$$

de donde resulta: $v = 0'763 \cos[2\pi(486t - 1'43\,x)]$

15. Una onda longitudinal plana y armónica, se propaga según OX^+ con una rapidez de 2400 m/s, siendo su longitud de onda 18 cm. En el punto x = 0 la elongación es máxima en el instante 24 μs y vale 0'1 mm. Hallad:

a) La ecuación que describe la propagación de la onda.
b) La elongación y la velocidad del punto de coordenada 1 m en el instante 10^{-3} s.

sol: a) $\psi = 10^{-4}$ sen $[2\pi(t/7'5\cdot 10^{-5} - x/0'18) - 0'44$; b) $\Psi = -9'5\cdot 10^{-5}$ m; $v = -2'19$ m/s

16. La ecuación de una onda es Y(x,t) = 2 sen (πt + πx/80) donde x e Y se expresan en cm y t en s. Determinad:

a) Características de la onda.
b) Elongación, velocidad y aceleración del punto situado en x =160 cm para t = 5 s.
c) Diferencia de fase entre dos puntos separados 120 cm en un mismo instante.

sol: a) Onda plana transversal moviéndose hacia x decreciente, A=2 cm, υ= 0’5 Hz, T=2 s, λ= 160 cm, v = 80 cm/s; b) Y= 0, v = -2π cm/s, a = 0; c) $\Delta\varphi = 1'5\pi$ rad.

17. Una onda armónica longitudinal se propaga a lo largo de un resorte horizontal en el sentido negativo de OX, siendo 20 cm la distancia entre dos puntos sucesivos que están en fase. El foco emisor vibra con una frecuencia de 25 Hz y una amplitud de 3 cm. Determinad:

a) Ecuación de propagación sabiendo que el foco emisor se encuentra en el origen de coordenadas y que en el instante 0'1 s su elongación es nula y su rapidez positiva.
b) Velocidad y aceleración máximas de cualquier partícula del resorte.

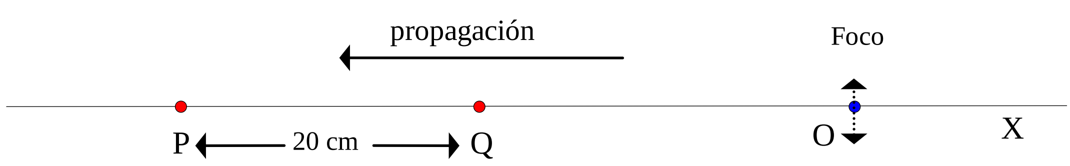
Al tratarse de una onda armónica plana que viaja según OX(-), la ecuación de propagación se puede expresar de forma general como:

$$\psi = \mathrm{A} \cdot \mathrm{sen}\left[2\pi\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}} + \frac{\mathrm{x}}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

para determinar la ecuación correspondiente a nuestro caso concreto necesitamos conocer los valores de A, T, υ, λ y φ_0 .

En el enunciado nos dan directamente la amplitud A = 0’03 m y la frecuencia υ = 25 Hz. El periodo podemos obtenerlo fácilmente como T = 1/υ = 0’04 s. Nos falta conocer la longitud de onda λ y la fase inicial φ_0. *¿Cómo podríamos calcular el valor de cada una de estas dos magnitudes?*

La longitud de onda se puede conocer de forma inmediata si recordamos que la distancia entre dos puntos consecutivos que se encuentren en concordancia de fase ha de ser precisamente igual a la longitud de onda, por tanto, λ = 0’2 m.



En efecto, si calculamos la diferencia de fase entre dos puntos P y Q separados 20 cm entre sí, tal y como se expresa en la figura de arriba, obtenemos que:

$$\varphi_Q - \varphi_P = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x_Q}{\lambda}\right) + \varphi_0 - 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x_P}{\lambda}\right) - \varphi_0 \rightarrow \quad \varphi_Q - \varphi_P = \frac{2\pi}{\lambda}(x_Q - x_P)$$

Fijémonos que en este caso, el punto Q tendrá una fase mayor que el P porque es alcanzado antes por la perturbación. Si despejamos λ de la ecuación anterior:

$$\lambda = 2\pi \frac{(x_Q - x_P)}{\varphi_Q - \varphi_P} .$$

Si, como se nos dice, se trata de dos puntos consecutivos y en fase, la diferencia de fase entre ambos deberá de valer 2π rad. Además, $x_Q - x_P = 0'2$ m (adviértase que tanto x_P como x_Q son negativos). Por tanto, sustituyendo en la expresión anterior nos queda que, tal y como habíamos previsto:

$$\lambda = 2\pi \frac{0'2}{2\pi} = 0'2 \text{ m}$$

Para la determinación de la fase inicial φ_0, debemos considerar que en el instante t = 0'1 s el foco, que se encuentra en x = 0, presenta elongación nula $\psi = 0$ y rapidez positiva. Sustituyendo estas características en la ecuación de la onda tenemos:

$$0 = 0'03 \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{0'1}{0'04} + 0\right) + \varphi_0\right] \rightarrow \text{sen}\,(5\pi + \varphi_0) = 0$$

Para calcular φ_0 quitaremos de la fase el número entero de veces 2π rad que exista, ya que se tratará de ciclos completos y no influirán en el valor del sen, por tanto:

$\text{sen}\,(5\pi + \varphi_0) = \text{sen}\,(\pi + \varphi_0) = 0 \rightarrow (\pi + \varphi_0) = \text{arcsen}\ 0$

El arcsen 0 puede ser 0 rad (en cuyo caso φ_0 valdría $-\pi$ rad) o bien π rad (en cuyo caso φ_0 valdría 0 rad). *¿En cuál de las dos situaciones nos encontramos en este ejercicio?*

Como se nos dice que la rapidez del foco en ese instante es positiva y sabemos que el valor de ésta se puede evaluar en general como:

$v_F = d\psi_F/dt = Aw \cos\,(wt + \varphi_0) = Aw \cos\,(\pi + \varphi_0)$

podemos ver que para que dicho valor sea positivo φ_0 tiene que ser $-\pi$ rad ya que si fuese 0 (la otra posibilidad), la rapidez del foco en ese instante (0'1 s) sería negativa ($\cos\pi = -1$).
Así pues $\lambda = 0'2$ m y $\varphi_0 = -\pi$ rad. Añadiendo estos datos a los ya conocidos, podemos expresar la ecuación de este movimiento ondulatorio como:

$$\psi = A \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right] = 0'03 \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{0'04} + \frac{x}{0'2}\right) - \pi\right]$$

¿Cómo podemos calcular la rapidez y la aceleración de cualquier partícula del resorte?

Si conocemos Ψ, resulta sencillo obtener v y a de cualquier partícula ya que no tenemos sino que derivar Ψ respecto de t. En efecto:

$$v = d\Psi/dt = 0'03 \cdot \frac{2\pi}{0'04} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{0'04} + \frac{x}{0'2}\right) - \pi\right] \rightarrow v_{max} = 0'03\ (2\pi/0'04) = 4'71 \text{ m/s}$$

$$a = dv/dt = -0'03 \cdot \left(\frac{2\pi}{0'04}\right)^2 \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{0'04} + \frac{x}{0'2}\right) - \pi\right] \rightarrow a_{max} = -0'03\ (2\pi/0'04)^2 = -740 \text{ m/s}^2$$

18. Hallad la ecuación de propagación de un movimiento ondulatorio armónico de 2 mm de amplitud y 400 Hz de frecuencia, que se propaga a lo largo del OX (+) con una velocidad de 840 m/s. Calculad también la velocidad con que vibra un punto que dista 5 m del foco, 0'01 s después de comenzar la vibración del foco.

sol: $\Psi = 2\text{sen}\left[2\pi\,(400t - x/2'1)\right]$; v = -3'67 m/s

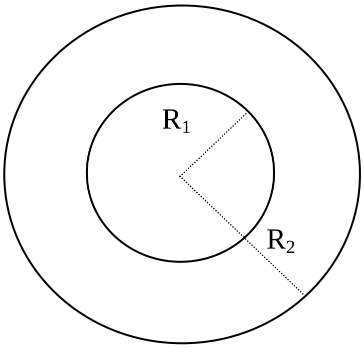
19. Determinad la ecuación de propagación de una onda esférica en un medio en el que la absorción sea despreciable.

Hasta ahora hemos estado trabajando con la ecuación de propagación de una onda armónica plana que se propaga en un medio sin absorción. Esto nos ha permitido considerar en todos los casos que la amplitud, que determina la energía con se propaga una onda de una frecuencia dada, permanecía invariable.

¿Qué cabe esperar que ocurra en el caso de que la perturbación tenga un frente de onda esférico?

Este caso se dará cuando al introducir la perturbación en un punto dado de un medio, dicho medio sea homogéneo e isótropo, lo que hará que la velocidad con que propaga la onda sea la misma en todas direcciones. Conforme se propaga la perturbación por el medio, la misma cantidad de energía ha de repartirse cada vez entre más puntos y, en consecuencia, la energía que corresponderá a cada punto del medio será también cada vez menor y, por tanto, su amplitud de vibración también lo será.

¿Cómo variará la amplitud con la distancia al foco?



Para responder a esta cuestión podemos razonar considerando el frente de onda en un cierto instante t_1, con un radio R_1. Si designamos por m_1 la suma de todas las masas de las partículas que lo integran, la energía de dicho frente será:

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 w^2 A_1^2 \rightarrow E_1 = \frac{1}{2} m_1 4\pi^2 \upsilon^2 A_1^2$$

en donde A_1 será la amplitud de vibración de cada uno de los puntos de ese frente.

Al cabo de cierto tiempo, en el instante t_2 , el frente se encontrará a una distancia R_2 del foco abarcando a más puntos del medio, de forma que su energía vendrá dada ahora por:

$$E_2 = \frac{1}{2} m_2 w^2 A_2^2 \rightarrow E_2 = \frac{1}{2} m_2 4\pi^2 \upsilon^2 A_2^2$$

en donde A_2 será la amplitud de vibración de cada uno de los puntos de ese frente y m_2 la suma de todas sus masas, pero como la energía del frente 2 ha de ser la misma que la que había en el frente 1 (admitiendo que no haya absorción), tendremos que:

$$E_1 = E_2 \rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{A_2^2}{A_1^2}$$

Como $m_2 > m_1$ la ecuación anterior ya nos muestra que $A_2 < A_1$, pero si queremos averiguar qué relación concreta existe entre ambas amplitudes tendremos que *hallar la relación existente entre dichas masas.*

La densidad superficial, en cada una de las esferas vendrá dada por:

$\sigma_1 = \dfrac{m_1}{4\pi R_1^2}$ y $\sigma_2 = \dfrac{m_2}{4\pi R_2^2}$, pero como el medio es homogéneo ambas serán iguales y:

$\dfrac{m_1}{R_1^2} = \dfrac{m_2}{R_2^2}$ luego $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{R_1^2}{R_2^2}$ y sustituyendo: $\dfrac{R_1^2}{R_2^2} = \dfrac{A_2^2}{A_1^2} \rightarrow \dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{A_2}{A_1} \rightarrow \boxed{A_2 = A_1 \dfrac{R_1}{R_2}}$

El resultado obtenido muestra cómo va disminuyendo la amplitud conforme el frente de onda esférico va avanzando (aumentando su radio). Esta disminución de la amplitud, debida a que la energía que transporta el frente de onda se reparte cada vez entre más puntos, recibe el nombre de **atenuación** y no hay que confundirla con el fenómeno de **absorción** que provoca también una disminución de la amplitud pero que se debe a la existencia de rozamiento y otros factores que podemos globalizar diciendo que el medio no es en realidad perfectamente elástico y que aquí, para simplificar, hemos ignorado.

Si la amplitud no es constante sino que va disminuyendo, ¿cómo habrá que expresar la ecuación del movimiento ondulatorio para el caso que estamos analizando?

Una posibilidad es comparar la amplitud A a una cierta distancia R del centro del foco, con la amplitud A_0 a una distancia determinada del foco (que por comodidad tomaremos igual a 1 m). En estas condiciones y teniendo en cuenta la expresión anterior, obtenemos:

$$A = A_0\left(\frac{1}{R_2}\right) = \frac{A_0}{R}$$

y sustituyendo en la ecuación de propagación:

$\psi = \frac{A_0}{R} \cdot \mathrm{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$ donde R será la distancia entre el frente de onda y el foco.

20. Un foco emite sonido en un medio homogéneo e isótropo (frente de onda esférico) con una potencia de 100 W. ¿Cuál es la intensidad de la onda a una distancia de 10 m del foco? (Supóngase que no hay absorción).

El foco emite con una cierta potencia P que mide la energía que lanza al espacio por unidad de tiempo. Si suponemos que no se producen pérdidas en el medio, dicha energía atravesará cualquier superficie cerrada imaginaria que contenga al foco que la emite. No obstante, aunque dicha energía por unidad de tiempo sea siempre la misma, conforme nos alejemos del foco se hallará cada vez más repartida (al ir aumentando la superficie cerrada a atravesar). Para cuantificar este fenómeno se introduce una nueva magnitud, que se denomina **intensidad** del movimiento ondulatorio I en un punto, y que se define como una magnitud cuyo valor coincide con la cantidad de energía que cada unidad de tiempo atraviesa una superficie unidad colocada en dicho punto perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda.

En nuestro caso, al ser el medio homogéneo e isótropo, los frentes de onda serán esféricos. Toda la energía que emita el foco por unidad de tiempo (o potencia) será la misma que atravesará cualquier superficie esférica con centro en el foco (sea cual sea su radio) en la unidad de tiempo. De acuerdo con lo anterior, la intensidad del sonido emitido por el foco en un punto cualquiera situado en una superficie esférica de radio R con centro en dicho foco, se podrá expresar como:

$$I = P_{foco}/S_{esfera} = P_{foco}/4\pi R^2$$

La expresión obtenida muestra que la intensidad disminuirá con el cuadrado de la distancia al foco (siempre en ausencia de absorción). Para calcular el valor de la intensidad bastará sustituir los datos del enunciado en la expresión anterior:

$$I = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{100}{4\pi \cdot 10^2} = 0'08\frac{W}{m^2}$$

21. Un foco sonoro emite con una potencia de 20 W. Calculad la intensidad en dos puntos situados a 10 m y 20 m del foco. ¿Cuál será la relación entre las amplitudes? (Supóngase que no existe absorción del medio).

sol: $I_1 = 0'016\ W/m^2$; $I_2 = 0'004\ W/m^2$; $A_1 = 2\ A_2$

22. Una onda sonora armónica que tiene una amplitud de 2 mm y una frecuencia de 400 Hz, se propaga a lo largo del eje X con una velocidad de 340 m/s, y se sabe que en el punto x = 0 alcanza su máxima velocidad positiva en el instante t = 0. Su intensidad en un punto P es de 2'7 W/m². Determinad:

a) La elongación y la velocidad de la vibración del punto que dista 5 m del origen en el instante t = 0'1 s.
b) Si se duplica la frecuencia dejando la amplitud constante, ¿cuáles serán las nuevas longitud de onda e intensidad?

Como se trata de una onda armónica plana que se propaga según OX(+), las expresiones generales de la elongación Ψ y de la rapidez v de vibración serán:

$$\psi = A \cdot \mathrm{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right] \quad \text{y} \quad v = Aw \cdot \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right] \text{ respectivamente.}$$

Si queremos conocer estas ecuaciones para el caso que nos ocupa, tendremos que averiguar los valores que presentan la amplitud A, el periodo T, la longitud de onda λ, la frecuencia angular w y la fase inicial φ_0. Del enunciado sabemos que:

A = 2 mm, $\upsilon = 400$ Hz $\rightarrow T = 1/\upsilon = 1/400$ s, $w = 2\pi\upsilon = 800\pi$ rad/s,
$v = 340$ m/s $\rightarrow \lambda = v \cdot T = 340 \cdot 1/400 = 0'85$ m

Nos falta conocer el valor de la fase inicial. *¿Cómo podríamos determinar éste?* Como el valor de la fase inicial es una constante, bastará conocer la elongación y la rapidez en un punto cualquiera del medio, en un instante dado, para poder determinar φ_0 .

Sabemos que en el instante t = 0, el punto x = 0 tiene su rapidez máxima y positiva. En dicho instante los valores de Ψ y de v en el punto considerado serán:

$\Psi = A \cdot \mathrm{sen}\ \varphi_0$ y $v = Aw \cdot \cos \varphi_0$ y como $v = v_{max} = Aw \rightarrow \cos \varphi_0 = 1$, es decir $\varphi_0 = 0$

Ahora que ya conocemos las características necesarias del movimiento, podemos determinar las ecuaciones de la elongación y de la rapidez para cualquier punto del medio:

$$\psi = A \cdot \mathrm{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right] = 2 \cdot 10^{-3} \mathrm{sen}\, 2\pi\left(400t - \frac{x}{0'85}\right)$$
$$v = Aw \cdot \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right] = 5'03 \cdot \cos 2\pi\left(400t - \frac{x}{0'85}\right)$$

Para calcular la elongación y la rapidez en el punto x = 5 m en el instante t = 0’1s, bastará con sustituir en las ecuaciones anteriores estos valores de x y de t, de modo que:

$$\psi = 2\cdot 10^{-3}\,\text{sen}\,2\pi\left(400\cdot 0'1-\frac{5}{0'85}\right) = 2\cdot 10^{-3}\,\text{sen}\,2\pi\,(34'12) = 1'35\cdot 10^{-3}\text{ m}$$

$$v = 5'03\cdot\cos 2\pi\left(400\cdot 0'1-\frac{5}{0'85}\right) = 3'72\text{ m/s}$$

¿Qué es lo que ocurre con la longitud de onda y con la intensidad de la onda si se duplica la frecuencia?

La velocidad con que se propaga una onda depende de la naturaleza de dicha onda y del medio en el que lo hace, por tanto el hecho de duplicar la frecuencia no va a alterar la velocidad de propagación, de modo que la longitud de onda será:

$\lambda = v/\upsilon = 340/800 = 0'425$ m, es decir, se reduce a la mitad.

En cuanto a la intensidad, si tenemos en cuenta que la energía de una partícula de masa m que describe un movimiento vibratorio armónico simple es

$$E = \frac{1}{2}m(2\pi)^2\nu^2A^2$$

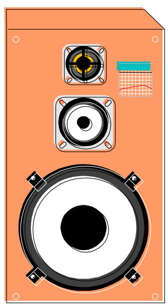
como en este caso aumenta la frecuencia al doble, cada una de las partículas del medio dispondrá del cuádruple de energía que antes y la intensidad en el mismo punto también será el cuádruple:

$I' = 4I = 4\cdot 2'7 = 10'8\text{ W/m}^2$.

23. El Sol posee una potencia emisiva de $2'7\cdot 10^{20}$ MW. ¿Qué intensidad luminosa recibimos en la Tierra que dista del Sol $1'5\cdot 10^{11}$ m. (Considérese que no existe absorción en ningún punto del medio).

sol: $I = 955\text{ W/m}^2$

9-24. Un altavoz emite un sonido con una potencia de 40 W. Determinad:



a) La intensidad a 10 metros del altavoz.
b) Nivel de intensidad que producirá en el punto anterior sabiendo que la intensidad umbral es de 10^{-12} W/m^2.

Para resolver este ejercicio podemos considerar que el medio en el que se encuentra el altavoz es homogéneo e isótropo, por lo que la propagación se realizará por ondas esféricas desde el altavoz o foco.

Para calcular el valor de la intensidad sonora en un punto situado a 10 m del altavoz bastará con sustituir en la expresión correspondiente y operar:

$I = P_{foco}/4\pi R^2 = 40/4\pi\cdot 102 = 0'0318\ W/m^2$

En general la potencia sonora de la mayor parte de los focos corrientes son extraordinariamente bajas. A título de ejemplo, podemos decir que con la energía sonora emitida en un concierto o por unas motos a escape libre durante una hora, apenas tendríamos suficiente para preparar un par de tacitas de café. Sin embargo ello no impide que, debido a la extraordinaria sensibilidad del oído para captar vibraciones, la emisión de esa energía nos afecte especialmente debido a la sensación sonora que nos produce (incluso aún estando bastante alejados de la fuente).

A primera vista podría pensarse que la intensidad física con que nos llega un sonido es directamente proporcional a la sensación sonora que nos produce en el oído. Pero si esto fuese así, dos focos sonoros idénticos (doble intensidad en cada punto que uno solo) actuando simultáneamente deberían producirnos una sensación fisiológica doble que uno solo y, sin embargo, no es eso lo que ocurre. En realidad, se comprueba experimentalmente que la sensación que nos produce un sonido varía con la intensidad pero no de forma lineal sino logarítmica. Por esta razón se define una nueva magnitud denominada **nivel de intensidad** (S) que varía con el logaritmo decimal de la intensidad, tal y como se aprecia en la expresión siguiente:

$$S - S_0 = \log I/I_0$$

donde S representa el nivel de intensidad que nos produce un sonido de una intensidad I, y S_0 el que nos produce otro de intensidad I_0.

Si designamos por I_u la **intensidad umbral** o mínima intensidad sonora que es capaz de detectar el oído humano (cuyo valor es de 10^{-12} W/m^2 para una frecuencia de 1000 Hz), la expresión anterior se podrá escribir como:

$$S = \log I/I_u$$

ya que si I_u es la intensidad umbral, le corresponderá un valor de $S_u = 0$, lo cual no quiere decir que no haya sonido sino que simplemente, no somos capaces de detectarlo con nuestro oído. En general a la intensidad umbral se le designa como I_0 y al nivel de intensidad umbral como S_0, pero con objeto de evitar confusiones (ved ejercicio 26) hemos preferido designarlos respectivamente como I_u y S_u.

La unidad de medida de S recibe el nombre de Bel y de acuerdo con la expresión anterior, será el nivel de intensidad provocado por una intensidad 10 veces superior a la umbral.

Habitualmente se utiliza un submúltiplo del Bel (el decibel o decibelio, dB) de modo que si queremos trabajar con ésta última unidad hemos de modificar la expresión y escribir:

$$S = 10\cdot \log I/I_u$$

que aplicada a nuestro caso nos conduce a $S = 10\cdot \log I/I_u = 10\cdot \log 0'0318/10^{-12} = 105$ dB

Conviene tener en cuenta que la sensación fisiológica que produce un sonido depende, además de la intensidad, de su frecuencia. Tanto es así que para frecuencias inferiores a 20 Hz (infrasonidos) y superiores a 16000 Hz (ultrasonidos) sea cual sea su intensidad, no son detectados por las personas. A título de ejemplo, señalaremos que mientras que un sonido de 1000 Hz comienza a percibirse a partir de un nivel de intensidad de 0 dB, otro sonido de 100 Hz no podrá ser apreciado hasta que su nivel de intensidad no llegue a los 30 dB.

Una cuestión interesante podría ser *averiguar a qué distancia nos tendríamos que alejar de una fuente sonora para dejar de oírla.*

Teniendo en cuenta que $I = P_{foco}/4\pi R^2$ y sustituyendo en la expresión de S, obtenemos:

$S = 10\cdot \log I/I_u = 20\cdot \log R_u/R$

En la ecuación obtenida R_u es la distancia al foco para que la intensidad sea la umbral (es decir S = 0) y por tanto, la distancia que hemos de hallar.

$\log R_u/R = S/20 \rightarrow R_u = R\cdot 10^{\frac{S}{20}}$

Esta expresión resulta ser en nuestro caso $R_u = 10\cdot 10^{\frac{105}{20}}$ = 1.778.279 m = 1778'279 km

Naturalmente, la distancia a la que dejamos de oír el altavoz es muchísimo más pequeña que la evaluada, ya que en su cálculo no hemos tenido en cuenta el fenómeno de absorción que inevitablemente se produce en el aire.

25. ¿A qué distancia de un foco sonoro que emite con una potencia de 50 W debemos situarnos para que nos produzca un nivel de intensidad de 80 dB? (Ignorar la absorción que se produce en el medio de propagación).

sol: A una distancia de 199'5 m.

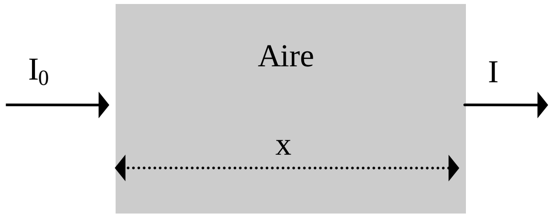
26. Una onda sonora plana se propaga en el aire, apreciándose que tras recorrer 1 km su nivel de intensidad disminuye en 7 dB. ¿Cuál es el coeficiente de absorción del aire?

En primer lugar conviene tener en cuenta que al tratarse de una onda plana, la disminución de intensidad (de amplitud) será debida a la absorción del medio (que se produce a causa del rozamiento, viscosidad y otros factores que hacen que éste no sea perfectamente elástico).

¿De qué magnitudes cabe esperar que dependa la amortiguación que sufre una onda por absorción cuando atraviesa un medio dado?

Un factor que debe influir es el espesor x del material de que esté hecho el medio que tenga que atravesar, de forma que cuanto mayor sea x más tendrá que reducirse su intensidad. Otro será la naturaleza del material, a través de un parámetro β (distinto para cada sustancia) que se denomina coeficiente de absorción. Finalmente, también puede influir la intensidad I_0 con que llegue la onda, de modo que, en principio, podemos pensar que cuanto mayor sea I_0, a igualdad de los restantes factores, mayor tendrá que ser la intensidad que tendrá la onda después de recorrer una cierta distancia x en un medio dado.

Experimentalmente se comprueba que cuando una onda plana atraviesa un medio de espesor x, su intensidad disminuye exponencialmente en la forma:



$$\boxed{I = I_0 \cdot e^{-\beta x}}$$

Expresión que recoge adecuadamente las hipótesis anteriores.

Consideraremos pues que la perturbación tiene en un punto dado del medio (aire) una intensidad I_0 y que, tras recorrer 1 km en ese mismo medio, su intensidad pasará a ser I (7 dB menor que I_0). Tomando logaritmos neperianos en la igualdad anterior obtenemos que:

$\ln I/I_0 = -\beta x$ y despejando $\beta = -\dfrac{1}{x} \cdot \ln \dfrac{I}{I_0}$

¿Cómo conocer la relación entre las intensidades?

Si recordamos que $S = 10 \cdot \log I/I_u$ (I_u corresponde a la intensidad umbral) y como nos indican en el enunciado que el nivel de intensidad disminuye en 7 dB, si llamamos I_1 a la intensidad antes de recorrer 1 km en el aire e I_2 a la intensidad después de recorrer el citado km, podremos hacer:

$S_1 = 10 \cdot \log I_1/I_u$ y $S_2 = 10 \cdot \log I_2/I_u$ y restando: $S_2 - S_1 = 10 \cdot \log I_2/I_1$ de donde:

$-7 = 10 \cdot \log I_2/I_1$ y de aqui $\log I_2/I_1 = -0'7$ de donde $I_2/I_1 = 10^{-0'7} = 0'200$

y sustituyendo en la expresión del coeficiente de absorción β, obtenemos finalmente:

$\beta = -\dfrac{1}{10^3} \cdot \ln 0'2 = 1'6 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^{-1}$

27. El espesor de semiabsorción de un cierto material es 30 cm. ¿Qué espesor deberemos situar para que al ser atravesado por una onda plana armónica su intensidad se reduzca de 0’8 W/m^2 a 0’3 W/m^2?

El **espesor de semiabsorción** de una sustancia nos indica el espesor “d” de la misma que es necesario para que al ser atravesado por una onda, la intensidad de esta se reduzca a la mitad.

En este ejercicio se nos pide que calculemos el espesor de un cierto material que habrá que interponer frente a una onda para que su intensidad al atravesarlo se reduzca en una cantidad dada.

¿Cuál puede ser el interés de este problema?

Una aplicación importante es, por ejemplo, la utilización de materiales adecuados para el aislamiento acústico de viviendas, habitáculos de vehículos, etc.

Sabemos que para una onda plana al atravesar un medio de espesor x, se produce una variación en su intensidad que viene dada por la expresión:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta x}$$

Sin embargo en ella no figura para nada el espesor de semiabsorción “d” o espesor de material que la onda ha de atravesar para que su intensidad se reduzca a la mitad

¿Cómo podríamos relacionar β con d?

Si en la expresión anterior hacemos $I = I_0/2$ el valor de x coincidirá con d, por tanto:

$I_0/2 = I_0 \cdot e^{-\beta x}$ y tomando logarítmos neperianos: $-\ln 2 = -\beta d \rightarrow d = 0'693/\beta$

Como en este caso conocemos d, tendremos que: $\beta = 0'693/d = 0'693/0'3 = 2'31\ m^{-1}$
y sustituyendo en la expresión que da la intensidad emergente:

$I = I_0 \cdot e^{-\beta x} \rightarrow 0'3 = 0'8 \cdot e^{-3'31x} \rightarrow \ln 0'375 = -2'31x \rightarrow x = 0'42\ m$

Así pues deberemos de utilizar un espesor de 42 cm del material dado en el enunciado para conseguir reducir la intensidad de la onda de $0'8\ W/m^2$ a $0'3\ W/m^2$.

28. ¿Cuál es el coeficiente de absorción del agua del mar si un buceador comprueba que a 10 m de profundidad la luminosidad ha decrecido al 13% de la existente en la superficie?

sol: $\beta = 0'2\ m^{-1}$

29. Si una onda atraviesa un espesor de pared de 10 cm, su intensidad se reduce de 6 pW/cm^2 a $0'5\ pW/cm^2$. Hallad el coeficiente de absorción del material de que está hecha la pared.

sol: $\beta = 0'248\ cm^{-1}$

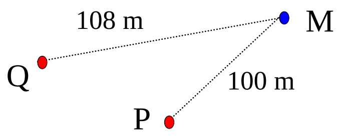
30. Una onda penetra en un medio cuyo coeficiente de absorción es 0’4 cm^{-1}. ¿Qué espesor recorrerá para que su intensidad se reduzca a la cuarta parte?

sol: x = 3’47 cm

31. Dos ondas planas que se propagan a 400 m/s pasan por los puntos P y Q de la figura en dirección a M. Si la perturbación en cada uno de los puntos se puede representar por las funciones:

$\Psi_P = 4 \text{ sen } 200\pi \text{ t}$

$\Psi_Q = 3 \text{ sen } 200\pi \text{ t}$



(Ψ se expresa en cm cuando t se mide en s) ¿Cuál sería el valor de la perturbación en el punto M? ¿Y si Q estuviese a 102 m de él?

Para resolver el problema, antes de comenzar a operar conviene detenerse en *analizar el tipo de perturbaciones que se están propagando y ver cuáles son sus características.*

La perturbación dada por: $\Psi_P = 4 \text{ sen } (200\pi \text{ t})$ tiene una amplitud de 4 cm, su frecuencia es de 100 Hz, el periodo 0’01 s, la longitud de onda es de 4m y se propaga con una rapidez de 400 m/s.

En cuanto a: $\Psi_Q = 3 \text{ sen } 200\pi \text{ t}$, corresponde a una onda de 3 cm de amplitud y el resto de las características iguales a la anterior. Las perturbaciones en P y en Q se encuentran, pues, en fase.

¿Cuál sería el valor de la perturbación que existiría en el punto M si cada una de las ondas avanzara sola?

Para averiguarlo tendremos que utilizar la ecuación general que nos da el valor de la perturbación en cualquier punto del medio por el que se propaga, de este modo obtenemos:

$$\psi_{MP} = 4 \cdot \text{sen}\left(200\pi t - \frac{2\pi d_P}{\lambda}\right) \quad \text{y} \quad \psi_{MQ} = 3 \cdot \text{sen}\left(200\pi t - \frac{2\pi d_Q}{\lambda}\right)$$

Como son las dos ondas las que se propagan, la perturbación en el punto M, de acuerdo con el Principio de Superposición, será la suma algebraica de ambas perturbaciones:

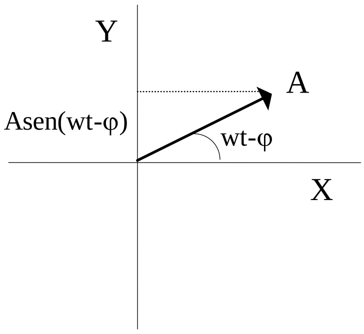
$$\Psi_M = \Psi_{MP} + \Psi_{MQ} = 4 \cdot \text{sen}\left(200\pi t - \frac{2\pi d_P}{\lambda}\right) + 3 \cdot \text{sen}\left(200\pi t - \frac{2\pi d_Q}{\lambda}\right)$$

En el punto M se producirá, pues una interferencia de las dos ondas. Podemos preguntarnos de qué dependerá que dicha interferencia sea constructiva (se refuercen los efectos de ambas perturbaciones) o destructiva (se opongan). A título de hipótesis cabe pensar que, como la longitud de onda es la misma, si la diferencia entre las distancias d_P y d_Q desde cada foco al punto M es un múltiplo entero de dicha longitud de onda, se producirá una concordancia de fase y los efectos se reforzarían al máximo.

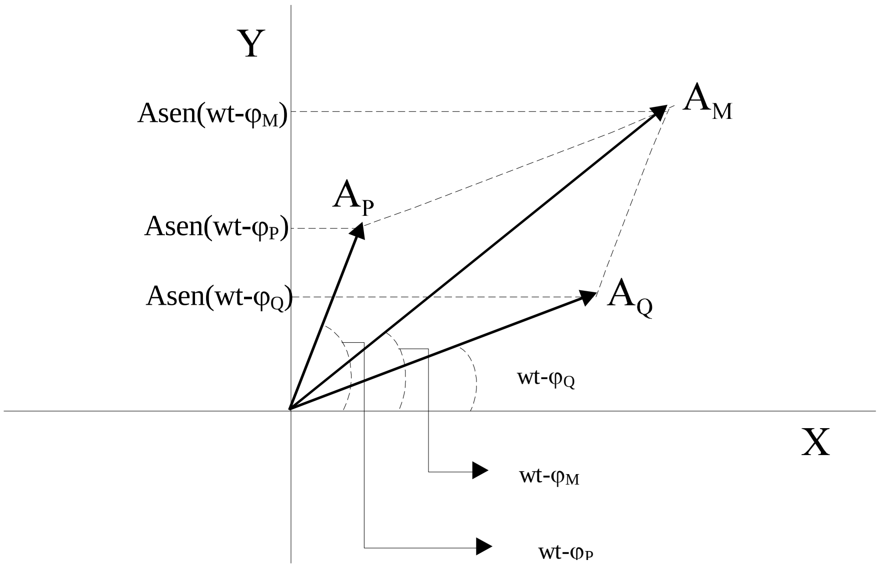
Para obtener Ψ_M necesitamos sumar las expresiones anteriores. Para ello vamos a recurrir al método vectorial, pero antes, para mayor comodidad, expresemos las funciones como:

$$\Psi_M = \Psi_{MP} + \Psi_{MQ} = A_P \cdot \mathrm{sen}(\mathrm{wt} - \varphi_P) + A_Q \cdot \mathrm{sen}(\mathrm{wt} - \varphi_Q)$$

En donde $\varphi = 2\pi d/\lambda$. Toda función del tipo A sen (wt - φ) se puede representar en unos ejes de coordenadas XY mediante un vector de módulo A, que gira con movimiento circular uniforme en sentido contrario a las agujas del reloj, de manera que en cada instante forma con el eje X un ángulo que vale (wt - φ) y su proyección sobre el eje Y nos proporciona el valor de la función sinusoidal que representa.



En nuestro caso, si representamos las dos funciones en un mismo sistema de coordenadas podemos comprobar que si sumamos los dos vectores, al proyectar el vector suma sobre el eje Y, nos da en todo instante la suma de ambas funciones.



La perturbación en M será pues: $\Psi_M = A_M$ sen (wt - φ_M).

¿Cómo podemos conocer A_M *y* φ_M *?*

Aplicando el teorema del coseno en la figura anterior sabemos que:

$$A_M^2 = A_P^2 + A_Q^2 + 2A_P A_Q \cos(\varphi_Q - \varphi_P)\,.$$

Por otra parte, de la misma figura se obtiene también que:

$$\mathrm{tg}(wt - \varphi_M) = \frac{A_P \mathrm{sen}(\mathrm{wt} - \varphi_P) + A_Q \mathrm{sen}(\mathrm{wt} - \varphi_Q)}{A_P \cos(\mathrm{wt} - \varphi_P) + A_Q \cos(\mathrm{wt} - \varphi_Q)}$$ y particularizando para t = 0, teniendo

en cuenta que tg (-φ) = -tg φ, que sen (-φ) = -sen φ y que cos (-φ) = cos φ, nos queda que:

$$\mathrm{tg}\,\varphi_M = \frac{\mathrm{A_P sen}\varphi_\mathrm{P} + \mathrm{A_Q sen}\varphi_\mathrm{Q}}{\mathrm{A_P cos}\varphi_\mathrm{P} + \mathrm{A_Q cos}\varphi_\mathrm{Q}}$$ de donde podemos calcular fácilmente φ_M

Analizando los resultados obtenidos vemos que el punto M describirá un movimiento armónico simple de igual frecuencia que las perturbaciones que llegan al mismo, pero con una amplitud de vibración que dependerá de la diferencia de distancias a que dicho punto se encuentra de los focos ($\varphi = 2\pi d/\lambda$). Así, podemos ver que hay dos casos extremos:

a) Cuando cos ($\varphi_Q - \varphi_P$) = 1 → $A_M = A_P + A_Q$ (interferencia constructiva)
b) Cuando cos ($\varphi_Q - \varphi_P$) = -1 → $A_M = A_P - A_Q$ (interferencia destructiva).

¿Qué ocurrirá con la diferencia de distancias en cada uno de los casos anteriores?

a) cos ($\varphi_Q - \varphi_P$) = 1 → $\cos\frac{2\pi}{\lambda}(\mathrm{d_Q} - \mathrm{d_P}) = 1$, lo que significa que: $d_Q - d_P = n\lambda$

b) cos ($\varphi_Q - \varphi_P$) = -1 → $\cos\frac{2\pi}{\lambda}(\mathrm{d_Q} - \mathrm{d_P}) = -1$, lo que significa que: $d_Q - d_P = (2n+1)\lambda/2$

Es decir: La máxima amplitud $A_M = A_P + A_Q$ se dará cuando la diferencia de distancias sea un número entero de veces la longitud de onda, y la mínima amplitud $A_M = A_P - A_Q$ se dará cuando esta diferencia sea un número impar de semilongitudes de onda.

Concretando el resultado anterior para el caso que nos ocupa (d_P =100 m y d_Q =108 m) tendremos que:

$$\mathrm{A_M^2} = \mathrm{A_P^2} + \mathrm{A_Q^2} + 2\mathrm{A_P A_Q}\cos(\varphi_\mathrm{Q} - \varphi_\mathrm{P}) \;=\; \mathrm{A_M^2} = \mathrm{A_P^2} + \mathrm{A_Q^2} + 2\mathrm{A_P A_Q}\cdot\cos\frac{2\pi}{4}\cdot 8$$

de donde: $A_M = A_P + A_Q$ = 4 + 3 = 7 cm.

Por otra parte $$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{A_P sen}\varphi_\mathrm{P} + \mathrm{A_Q sen}\varphi_\mathrm{Q}}{\mathrm{A_P cos}\varphi_\mathrm{P} + \mathrm{A_Q cos}\varphi_\mathrm{Q}} \;=\; \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{4\mathrm{sen}50\pi + 3\mathrm{sen}54\pi}{4\cos 50\pi + 3\cos 54\pi} = 0 \rightarrow \varphi = 0.$$

Así pues, la perturbación en el punto M será: Ψ_M = 7 sen 200 π t y la interferencia producida será constructiva.

¿Qué hubiera ocurrido si Q hubiese estado a 102 m del foco?

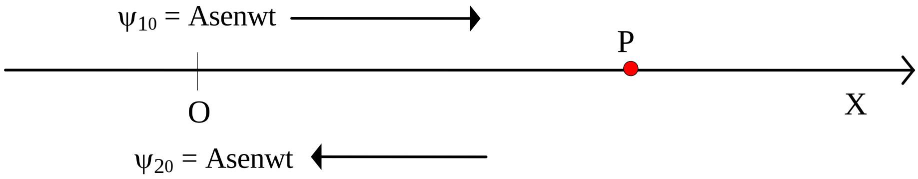
Utilizando las mismas ecuaciones que anteriormente, se llega a la conclusión que:

$A_M = A_P - A_Q$ = 4 - 3 = 1 cm, que φ = 0 y que Ψ_M = 1 sen 200 π t, siendo la interferencia destructiva. En estas condiciones si las dos ondas que concurriesen en P tuviesen la misma amplitud ocurriría que en M se produciría una zona de sombra, no apreciándose allí ninguna perturbación.

32. Sean dos ondas planas que viajan a lo largo del eje X, una según OX(+) y la otra según OX(-). Suponiendo que tienen ambas la misma amplitud y frecuencia y que cuando alcanzan el punto x = 0 se encuentran en fase, determinad el valor de la perturbación en cualquier punto del eje.

En este ejercicio se plantea un fenómeno de interferencia particularmente interesante.

En el esquema adjunto están representadas las condiciones expresadas en el enunciado.



Como en el punto x = 0 ambas ondas están en fase, la perturbación correspondiente a cada una en ese punto será la misma, es decir: $\Psi_{10} = \Psi_{20} = A\text{sen}wt$. En un punto P cualquiera del eje, las perturbaciones valdrán:

Para la onda que viaja según OX (+): $\Psi_{1P} = A \cdot \text{sen } w\,(t - t')$ ya que cuando la onda 1 llegue al punto P habrán transcurrido t' s desde que pasó por el punto x = 0, de modo que la fase del punto P (si sólo actuase esta onda) sería siempre menor, en un instante dado, que la del punto x = 0.

Para la onda que viaja según OX (-): $\Psi_{2P} = A \cdot \text{sen } w\,(t + t')$ ya que cuando la onda 2 llegue al punto x = 0, como viaja a la misma velocidad que la 1, habrán transcurrido t' s desde que pasó por el punto P, por tanto, el punto P en este caso, estará más tiempo oscilando de lo que esté el punto x = 0 (concretamente t' s más) y su fase (si sólo actuase esta onda) sería mayor que la del punto x = 0.

Teniendo en cuenta que t' = x/v, la perturbación resultante en el punto P será pues:

$$\Psi_P = \Psi_{1P} + \Psi_{2P} = A\left[\text{sen}\, w\left(t - \frac{x}{v}\right) + \text{sen}\, w\left(t + \frac{x}{v}\right)\right] \text{ de donde:}$$

$$\Psi_P = A\left[2\text{sen}\left(\frac{wt - wx/v + wt + wx/v}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{wt - wx/v - wt - wx/v}{2}\right)\right] \text{ y simplificando:}$$

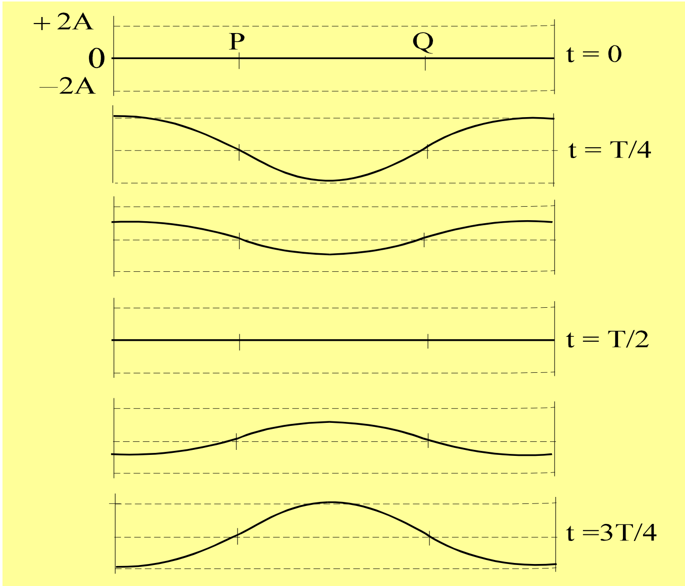
$\Psi_P = (2A \cdot \cos wx/v) \cdot \text{sen } (wt) \rightarrow \boldsymbol{\Psi_P = A' \text{ sen } (wt)}$, siendo $A' = 2A \cdot \cos (wx/v)$.

Analizando el resultado obtenido vemos que debido a la interferencia de las dos ondas:

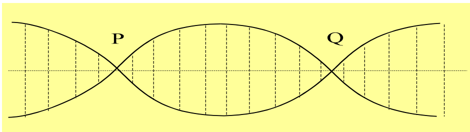
a) Todos los puntos se encuentran en fase (wt es igual para todos en cada instante).

b) Cada punto realiza el mismo movimiento armónico simple pero con distinta amplitud dependiendo de su posición, la frecuencia y de la velocidad con que se propaga la perturbación.

c) El efecto visual es una serie de nodos (A' = 0) y vientres (A' = 2A) que, a diferencia de una onda viajera, da una sensación estática y por eso a este fenómeno de interferencia se le denomina onda estacionaria. Los nodos corresponden a aquellos puntos en los que las ondas llegan en todo instante en oposición de fase y, por tanto, no vibran, mientras que los vientres corresponden a los puntos en los que llegan en concordancia de fase.



Si el periodo de vibración es pequeño, el ojo superpone las imágenes anteriores y se aprecia una figura como la siguiente:



¿Cuál será la posición de aquellos puntos en los que A' valga 0?

La amplitud A' valdrá 0 cuando cos (wx/v) = 0 es decir, cuando wx/v = (2n+1)π/2 rad (n = 0, 1, 2, ...). Como v = λ/T y w = 2π/T ello implica que x = (2n+1)· λ/4. A cada uno de estos puntos en los que en cualquier instante la amplitud es 0 se le denomina "nodo". El primer nodo (n=0) se encuentra en x=λ/4, el segundo (n=1) en x = 3λ/4, el tercero (n=2) en x = 5λ/4 y así sucesivamente, de modo que la distancia entre dos nodos consecutivos cualesquiera será λ/2.

¿Cuál será la posición de aquellos puntos en los que A' varíe entre -2A y +2A?

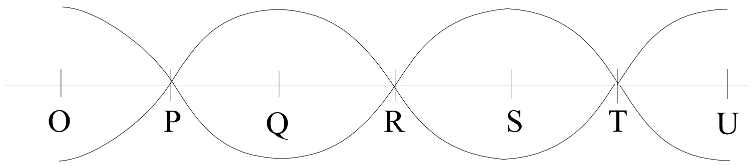
La amplitud A' valdrá ± 2A cuando cos (wx/v) = ± 1 es decir cuando wx/v = n·π rad donde n será un número entero cualquiera. Siguiendo un razonamiento análogo al del párrafo anterior, se concluye que la posición de los puntos buscados será x = n·λ/2 y a que la distancia mínima entre ellos será de λ/2.

En el resto de los puntos, A' variará entre dos extremos los cuales serán (en valor absoluto) mayores que 0 y menores que 2A.

Este tipo de ondas se dan en medios limitados, como por ejemplo en una cuerda de guitarra en la que las vibraciones se reflejan en los dos extremos de modo que se originan dos ondas moviéndose en sentido contrario. En general, las ondas estacionarias son de gran importancia en música y también en otros campos como, por ejemplo, la arquitectura ya que los edificios altos, puentes colgantes, etc., cuando vibran (viento, temblores de tierra, etc.) pueden originarlas, por lo que es necesario tener esto en cuenta en su diseño, para que puedan soportarlas y no derrumbarse.

33. ¿Cómo se pueden obtener ondas estacionarias en una cuerda por reflexión?

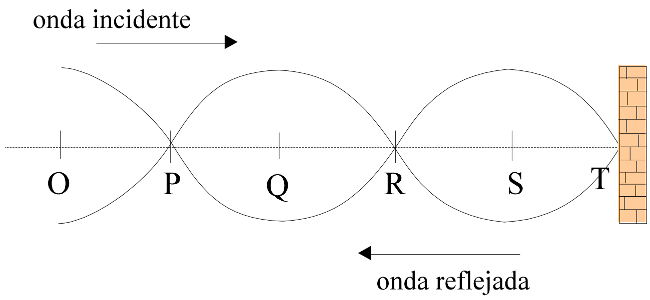
Ya hemos visto que mediante dos perturbaciones de igual frecuencia y amplitud que viajan en sentido contrario a lo largo de una misma dirección (por ejemplo una cuerda), se puede obtener una onda estacionaria.



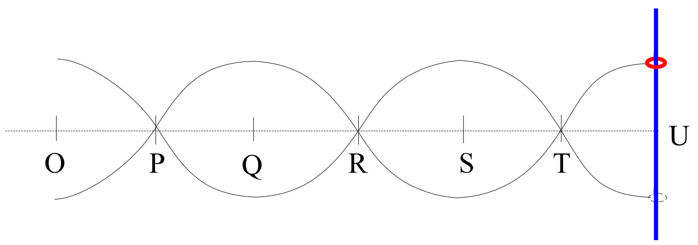
Analicemos cómo podemos conseguir una onda estacionaria con una sola onda que interfiera con ella misma tras sufrir una reflexión. Para ello seguiremos con el ejemplo de la cuerda. Como la reflexión se puede producir en un extremo fijo o libre de la cuerda, consideremos las condiciones que se deberán dar en cada caso para que se produzca la onda estacionaria:

a) Si el extremo de la cuerda se fija (por ejemplo sujetándolo a un tabique), la onda al llegar a dicho extremo se refleja cambiando su fase en π rad tal y como se puede comprobar experimentalmente si hacemos avanzar un pulso de onda por una cuerda en esas condiciones.

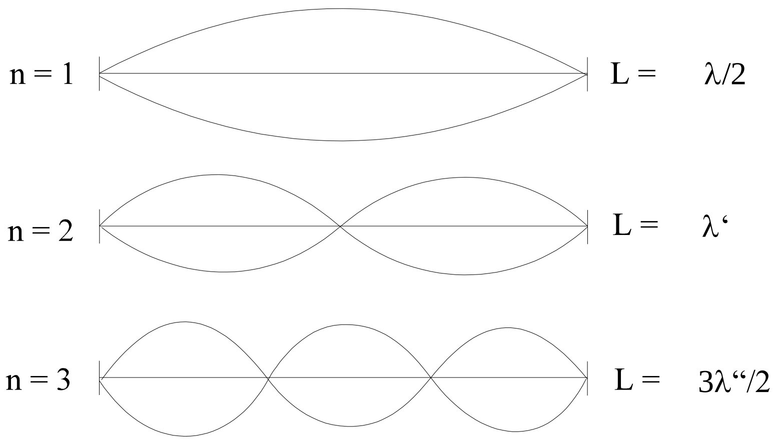
En este caso será necesario que la longitud de la cuerda sea un número impar de veces λ/4, para que la onda reflejada cumpla la condición de estar en fase con la onda que estamos introduciendo al alcanzar los puntos S, Q y O (y en oposición en los T, R y P).



b) Si el extremo de la cuerda está libre (por ejemplo mediante una anilla que puede deslizar a lo largo de un eje vertical como el que se muestra en la figura), será necesario que la longitud de la cuerda sea un número par de veces λ/4, para que la onda reflejada (que no cambia de fase al reflejarse) cumpla la condición de estar en fase con la onda que estamos introduciendo, en los puntos U, S, Q y O.



También se pueden obtener ondas estacionarias fijando la cuerda por los dos extremos e introduciendo una perturbación (pulsando la cuerda) tal y como sucede con las cuerdas de una guitarra. En este caso la perturbación se reflejará en ambos extremos y se producirán ondas estacionarias siempre que se cumpla que L = nλ/2 (n = 1, 2, 3 ...):



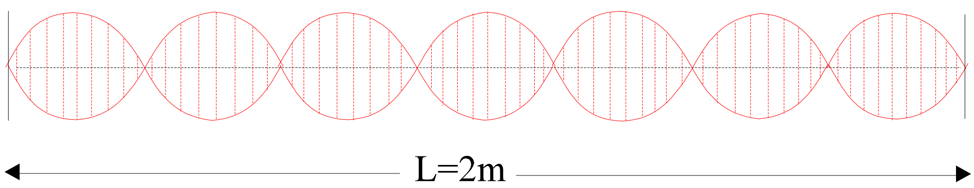
Conviene darse cuenta que en un medio limitado como el descrito, no se pueden producir ondas estacionarias de cualquier longitud de onda sino sólo aquellas que cumplan la condición de que:

$$\lambda = 2L/n$$

Podemos decir que en este caso las ondas están “**cuantizadas**”. Esto contrasta con lo que ocurre en medios no limitados, en los cuales pueden darse ondas estacionarias de cualquier longitud de onda. La importancia de este hecho es fundamental en la interpretación del comportamiento de partículas subatómicas (como el caso de los electrones en un átomo).

34. Al pulsar una cuerda de 2 m de longitud sujeta por ambos extremos, se observa que vibra apareciendo 9 nodos. Si la amplitud máxima es de 4 cm y la velocidad de propagación de la onda es de 6 m/s, obtened la ecuación que representa la onda estacionaria producida.

La ecuación que buscamos tendrá la forma: $Y = (2A\cdot\cos wx/v)$ sen wt o lo que es equivalente $Y = 2A \cos(2\pi x/\lambda)\cdot\text{sen}(2\pi t/T)$, en la que 2A = 4 cm ("A" corresponde a la amplitud de una de las ondas que por interferencia originan la onda estacionaria). Para obtener la ecuación correspondiente a nuestro caso concreto, nos falta pues *conocer la longitud de onda λ y el periodo T.*



Si nos fijamos en la figura anterior podemos apreciar que *existe una relación entre la longitud de la cuerda L, el número de nodos n y la longitud de la onda* λ que puede darse. Dicha relación ha de ser tal que L sea un múltiplo entero de $\lambda/2$ es decir, un múltiplo entero del número de vientres y como el número de vientres es el de nodos menos 1, podemos escribir que: L = (nº de nodos - 1)$\cdot$ $\lambda/2$, de modo que sustituyendo los valores correspondientes:

$2 = 8\cdot\lambda/2$ y despejando, $\lambda = 0'5$ m.

En cuanto al periodo T, si recordamos la relación $v = \lambda/T$ a partir de la misma obtenemos:

$T = \lambda/v = 0'5/6 = 1/12$ s.

Sustituyendo en la expresión general:

$Y = 2A \cos(2\pi x/\lambda)\cdot \text{sen}(2\pi t/T) \rightarrow Y = 4 \cos 4\pi x \cdot \text{sen}\ 24\pi\ t$

(en la que Y va en cm para x en m y t en s).

35. Una cuerda sujeta por ambos extremos, vibra de acuerdo con la ecuación $Y = 2 \cos(\pi x/3)\ \text{sen}\ 50\pi\ t$ (x e Y se expresan en cm cuando t se mide en s). Se pide:

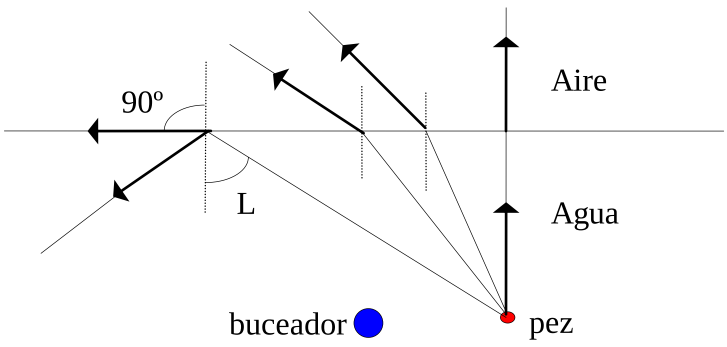
a) Amplitud y velocidad de las ondas que por interferencia dan lugar a la onda estacionaria.
b) Rapidez del punto de la cuerda situado en x = 10 cm en los instantes 1'35 s y 1'5 s.

sol: a) A = 1 cm; v = 150 cm/s. b) v = 0 y v = -153'9 cm/s respectivamente.

36. Un submarinista ve pasar un pez que se aleja de él. Al cabo de unos segundos y estando el submarinista a 10 m de profundidad, mira hacia la superficie y, de pronto, ve aparecer la imagen del mismo pez que parece estar volando fuera del agua.

Determinad la distancia horizontal que separa a ambos sabiendo que en ese momento el pez se encuentra a 7 m de profundidad.

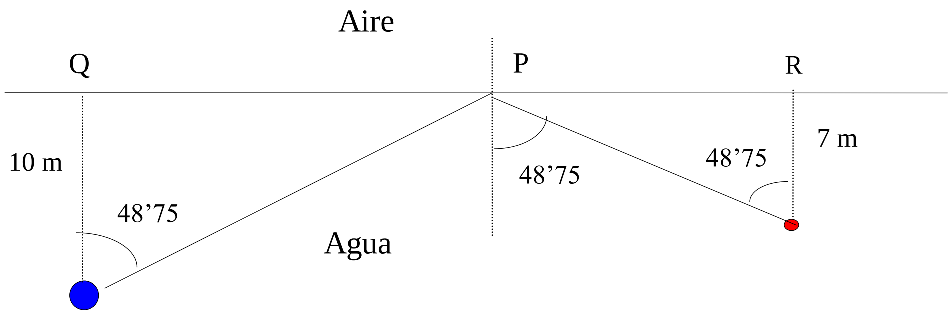
Los rayos que partan del pez hacia la superficie, por pasar de un medio de mayor índice de refracción a otro en el que dicho índice es menor, se separan de la normal. Si va aumentando el ángulo de incidencia el rayo refractado, de acuerdo con las leyes de la refracción, cada vez se separa más de la normal. En consecuencia existe un ángulo, llamado ángulo límite, al que le corresponde un ángulo de refracción de 90º. A partir de ese valor se produce una reflexión.



Este ángulo límite para el caso del agua y el aire será:

$$n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_2 \cdot \text{sen}\,\hat{r} \rightarrow 1'33 \cdot \text{sen}\,\hat{L} = 1 \cdot \text{sen}\,90^{\circ} \rightarrow \hat{L} = 48'75^{\circ}$$

La imagen del pez comenzará pues a ser apreciada por reflexión por el buceador cuando la situación sea la de la figura siguiente:



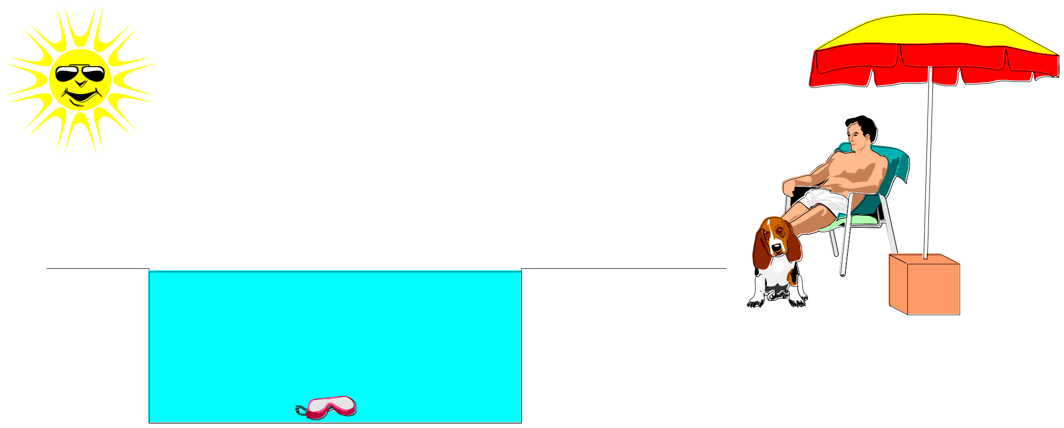
La distancia horizontal entre submarinista y pez coincide en el instante especificado anteriormente con la longitud de QR *¿Cómo podríamos calcularla?*

Analizando la figura anterior podemos darnos cuenta de que:

QR = QP + PR. Por otra parte tg 48’75º = QP/10 → QP = 11’4 m.

Además también se cumple que tg 48’75º = PR/7 → PR = 8 m, de modo que sumando las dos distancias obtenemos: QR = 11’4 + 8 = 19’4 m.

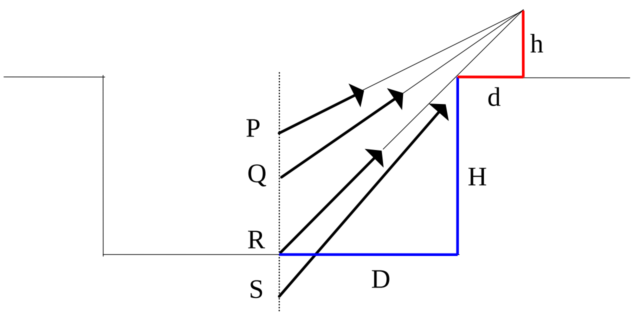
37. Determinad cuál será la máxima profundidad que puede tener una piscina completamente llena de agua, para que una persona sentada a 3'3 m del borde y cuya vista queda a una altura de 1'2 m sobre el suelo, pueda ver un objeto que se encuentra en el fondo y al centro de la piscina. (Anchura de la piscina 15 m. Índice de refracción del agua 1'33)



El objeto situado en el fondo refleja la luz en todas direcciones y esto podemos representarlo mediante rayos o líneas rectas que parten del mismo y solo si alguno de dichos rayos alcanza al ojo de la persona, ésta podrá ver el objeto. Por otra parte, como los rayos parten de un objeto sumergido en el agua, experimentarán una refracción desviándose de la normal, por lo que este hecho alterará las condiciones necesarias para la observación del objeto desde la superficie. (De hecho, el propio suelo de la piscina actúa como un objeto y como el índice de refracción del aire es menor que el del agua, el fenómeno de la refracción hace que nos parezca que éste se encuentra a menor profundidad de lo que realmente está, con el consiguiente peligro de confusión en personas que no saben nadar).

En este problema se nos pide la máxima profundidad que podría tener la piscina para que pudiera verse un objeto situado en su fondo, en determinadas condiciones. Conviene que analicemos el problema y reflexionemos en primer lugar sobre lo que ocurriría en una situación más sencilla que la planteada como sería el caso de que la piscina se encontrase totalmente vacía.

En el caso propuesto los rayos que salen del objeto no se desviarían. Podemos representar la situación mediante la figura adjunta en la que se observa que desde la posición P hasta la R se vería el objeto, pero en la posición S ya no se vería.



Cabe pensar que cuanto mayor sea la altura h desde la que se observa, mayor será la profundidad máxima H a la que sería posible ver el objeto (y que si h fuese 0 la profundidad H también lo sería). Por otra parte, cuanto mayor fuese la distancia d menor sería H, ya que al alejarnos del borde el rayo debería inclinarse más para llegar a nuestros ojos, de modo que para cuando d tienda a infinito H tenderá a 0 y viceversa. Finalmente, cuanto mayor sea la distancia D del objeto a la pared de la piscina, mayor podrá ser H.

Así pues: H = H (h, D, d), que son datos presentes en el enunciado del problema.

¿Cómo podríamos hallar H?

Si nos fijamos en la figura anterior podemos darnos cuenta que los dos triángulos que se forman son semejantes y aplicar las relaciones de proporcionalidad entre sus lados para obtener la H buscada.

En efecto, la semejanza de triángulos nos permite escribir que:

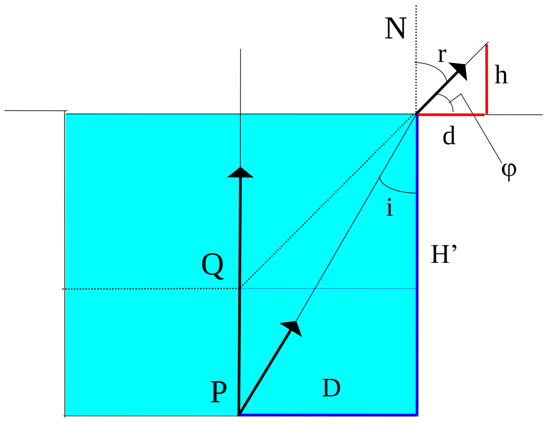
$\frac{H}{D} = \frac{h}{d}$ de modo que despejando H obtenemos que: $H = \frac{h \cdot D}{d} = \frac{1'2 \cdot 7'5}{3'3} = 2'73$ m

El resultado obtenido no solo es dimensionalmente homogéneo (L en ambos lados de la igualdad) sino que además contempla todas las hipótesis enunciadas anteriormente.

Podemos ahora ir más allá y plantearnos qué es lo que ocurrirá cuando la piscina se llene completamente de agua.

Ya hemos visto al comienzo que los rayos al pasar del agua al aire se refractan alejándose de la normal, por lo que podrán llegar al ojo del observador rayos desde puntos situados a mayor profundidad (como, por ejemplo el punto S de la figura anterior). No obstante, también aquí habrá una profundidad máxima H’>H a partir de la cual ya no se verá el objeto (que es precisamente la que nos piden en el problema).

Dicha profundidad máxima dependerá de los mismos factores h, d y D que antes, pero además influirá la diferencia en los índices de refracción entre los medios 1 (agua) y 2 (aire), de modo que, de acuerdo con la ley de la refracción ($n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_2 \cdot \text{sen}\,\hat{r}$), cuanto mayor sea n_1 y menor sea n_2, mayor será el ángulo $\hat{r}$ de refracción y, por tanto la profundidad máxima a la que se podrá ver el objeto aumentará. Naturalmente, si n_1 y n_2 fuesen iguales, H’ se debería de hacer igual a H.



¿Cómo podríamos obtener la profundidad máxima H’?

Para determinar H’ bastaría con conocer tg $\hat{i}$ ya que, como se puede ver en la figura:

$$\text{tg}\,\hat{i} = \frac{D}{H'}$$

De acuerdo con la ley de la refracción:

$$sen\,\hat{i} = \frac{n_2}{n_1} \cdot sen\,\hat{r}$$

de modo que dividiendo por $\cos\hat{i}$ tenemos: $\operatorname{tg}\hat{i} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\operatorname{sen}\hat{r}}{\cos\hat{i}}$.

Por tanto, si pudiésemos calcular $\frac{\operatorname{sen}\hat{r}}{\cos\hat{i}}$ tendríamos resuelto el problema.

De la figura anterior $\operatorname{sen}\hat{r} = \cos\phi = \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}}$; $\cos\hat{i} = \frac{H'}{\sqrt{H'^2 + D^2}}$

De modo que: $\operatorname{tg} i = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}} \cdot \frac{\sqrt{H'^2 + D^2}}{H'}$

de donde podemos obtener finalmente: $\boxed{H' = \frac{D}{n_2 \cdot d} \cdot \sqrt{h^2 n_1^2 + d^2 (n_1^2 - n_2^2)}}$

Y sustituyendo los datos: H’ = 7’5 m

Si analizamos el resultado literal que acabamos de obtener vemos en primer lugar que, efectivamente, tal y como habíamos supuesto, la profundidad es ahora mayor que la obtenida para la piscina sin agua. Por otra parte contempla todas las hipótesis, incluyendo la de que cuanto mayor fuese n_1 y menor n_2, más grande sería la profundidad permitida. Incluso, podemos ver que para el caso particular de que $n_1 = n_2$ (por ejemplo cuando se vacía la piscina), el resultado se convierte en el anterior, es decir, H’ = H.

Otro aspecto interesante es *cuál sería la profundidad aparente que una persona* diría que tiene una piscina al observar su fondo desde una cierta distancia de la orilla.

Analizando la última figura, podemos ver que dicha profundidad coincidiría con la profundidad H calculada cuando hemos supuesto que la piscina estaba vacía, que es de donde parece provenir el rayo refractado, de modo que:

$$H' = \frac{D \cdot h}{d} \cdot \frac{\sqrt{h^2 n_1^2 + d^2 (n_1^2 - n_2^2)}}{n_2 \cdot h} = H \cdot \frac{\sqrt{h^2 n_1^2 + d^2 (n_1^2 - n_2^2)}}{n_2 \cdot h}$$

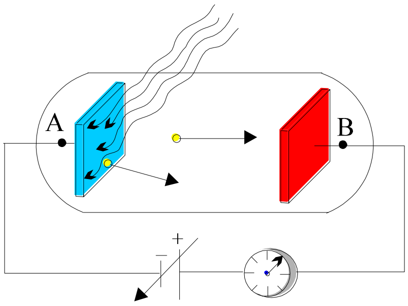
y despejando obtenemos finalmente:

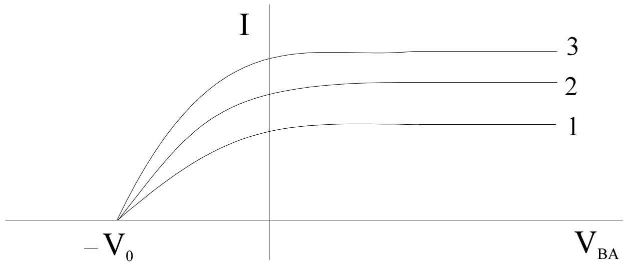
$$\boxed{H = H' \cdot \frac{n_2 \cdot h}{\sqrt{h^2 n_1^2 + d^2 (n_1^2 - n_2^2)}}}$$

Así el fondo de una piscina de 2 m de profundidad, visto desde la posición indicada, parecería estar a 0’73 m y resultar un serio peligro para quienes además de no conocer el fenómeno de la refracción tampoco supieran nadar.

10. NATURALEZA DE LA LUZ: DUALIDAD ONDA CORPÚSCULO

1. Al experimentar con una célula fotoeléctrica como la de la figura, se obtienen las gráficas de la derecha: interpretadlas.





Consideremos la gráfica 1 en la que está representada la intensidad de la corriente eléctrica, medida por el microamperímetro, que se produce cuando sobre la placa A de la célula (conectada al polo negativo de un generador) se hace incidir radiación de una cierta frecuencia. La energía radiante que incide sobre la placa negativa libera electrones de la misma. Dichos electrones son atraídos por la placa positiva (B) situada enfrente, lo que permite que se pueda cerrar el circuito y producirse una corriente eléctrica.

Si hacemos que aumente la diferencia de potencial entre las dos placas V_{BA} (siendo $V_{BA} = V_B - V_A$), se produce también un aumento del número de electrones que habiendo sido liberados de la placa A consiguen llegar a la placa B (hemos de tener en cuenta que no todos los electrones que saltan de A lo hacen en dirección a B). Sin embargo, a partir de un cierto valor, por mucho que aumentemos V_{BA} , la intensidad de corriente ya no sigue aumentando. En esta situación la intensidad del campo eléctrico existente entre las placas es tan grande que todos los electrones arrancados de A llegan a B, haciendo que la intensidad de la corriente alcance un valor máximo (**corriente de saturación**) ya que no pueden llegar a B más electrones de los que se liberan en A debido a la radiación incidente (la cual no se ha modificado).

Si invertimos la polaridad del generador la placa A será positiva y la B negativa de forma que la diferencia de potencial $V_{BA} = V_B - V_A$ será ahora un número negativo. No obstante, en la placa A sigue habiendo electrones y si la iluminamos podemos conseguir arrancar algunos de ellos. En estas condiciones el campo eléctrico existente entre las placas hace que sobre los electrones (cargas negativas) actúe una fuerza que se opone a su desplazamiento de A hacia B, ya que dichos electrones son atraídos por A y repelidos por B, de modo que únicamente aquellos que sean emitidos con la suficiente energía cinética (y en una dirección adecuada), pueden conseguir llegar a B venciendo el efecto del campo. Si seguimos disminuyendo V_{BA}, es decir, aumentando la fuerza de frenado sobre los electrones, llegaremos a un valor negativo de la diferencia de potencial ($-V_0$) a partir del cual ningún electrón alcanzará la placa B de modo que la intensidad de la corriente será nula.

Al valor absoluto V_0 de la citada diferencia de potencial, se le denomina **potencial de frenado o de detención**. (También suele representarse como V_f).

Podemos considerar que para diferencias de potencial mayores que $-V_0$ los electrones que llegan a la placa B lo hacen con una cierta energía cinética, pero que conforme nos vamos acercando a $-V_0$ dicha energía cinética disminuye hasta anularse justo cuando se alcanza $V_{BA} = -V_0$.

El valor del potencial de frenado se puede medir fácilmente con un voltímetro y nos permite *calcular la energía cinética máxima con que están siendo arrancados los electrones por la radiación incidente.* En efecto, basta aplicar la conocida relación entre el trabajo resultante y la variación de energía cinética a uno de los electrones, con lo que:

$W_{res} = \Delta Ec \rightarrow W_{Fe} = \Delta Ec$ y como la fuerza electrostática es conservativa, $W_{Fe} = -\Delta Ep$, de modo que si consideramos el desplazamiento de A a B e igualamos las expresiones anteriores nos queda que:

$-\Delta Ep_A^B = \Delta Ec_A^B$ es decir: $-(Ep_B - Ep_A) = -Ec_A$ ya que, en nuestro caso, $Ec_B = 0$.

Si ahora expresamos la variación de energía potencial electrostática en función de la diferencia de potencial entre las placas ($\Delta Ep = q \cdot \Delta V$) nos queda:

$q_e \cdot (V_B - V_A) = Ec_A$ siendo q_e la carga del electrón (negativa) y $V_B - V_A$ la diferencia de potencial entre las placas (también negativa e igual a $-V_0$). La expresión anterior se suele escribir como:

$$\boxed{E_c = q_e \cdot V_0}$$

En la que ambas magnitudes serán positivas.

Si manteniendo el mismo tipo de radiación (misma frecuencia) aumentamos la intensidad de la misma en un cierto valor, obtenemos la gráfica 2 y si repetimos el proceso la 3 (y así sucesivamente), comprobando que el único efecto que conseguimos es aumentar el número de "fotoelectrones" o electrones liberados (lo que se traduce en un aumento de la intensidad de corriente), pero que, sorprendentemente, la energía cinética con que surgen de la placa sigue siendo la misma.

El resultado anterior fue realmente sorprendente para los científicos de principios del siglo XX, porque contradice la teoría clásica (ondulatoria) de la radiación ya que, de acuerdo con ella, al aumentar la intensidad de la luz incidente se aumenta la energía que transporta el frente de onda uniformemente distribuida por el mismo, de modo que al incidir sobre la placa metálica los electrones deberían de adquirir más energía cinética. En 1905 Einstein publicó una serie de trabajos por los que consiguió el premio Nobel y en uno de los artículos daba la explicación de este problema, admitiendo que la radiación luminosa era una distribución de "cuantos de luz" (fotones) cada uno de los cuales poseía una energía proporcional a la frecuencia de dicha radiación $E = h\cdot\upsilon$.

2. En las experiencias sobre el efecto fotoeléctrico se obtiene que:

a) Para un metal dado, el efecto sólo se presenta a partir de una cierta frecuencia umbral (υ_0) de manera que si la luz utilizada es de una frecuencia menor, por muy alta que sea su intensidad no se detecta el paso de ninguna corriente.

b) Si la frecuencia de la radiación es mayor que la umbral, la intensidad de la corriente eléctrica que se produce aumenta conforme aumentamos la intensidad luminosa de la radiación utilizada (manteniendo la frecuencia constante), pero no ocurre así con la energía cinética de los electrones liberados que se mantiene constante.

c) A partir del valor umbral de la frecuencia, la energía cinética de los electrones liberados crece linealmente con la frecuencia.

Explicad los resultados anteriores, mediante la naturaleza discontinua de la radiación electromagnética propuesta por Einstein.

La luz y, en general cualquier radiación electromagnética, está formada por fotones. Cada uno de estos fotones posee una energía dada por $E = h\cdot\upsilon$ (h es una constante llamada constante de Planck y cuyo valor es $6'6\cdot10^{-34}$ J·s), de modo que el efecto fotoeléctrico se produce al chocar un fotón con un electrón, siempre que la energía del fotón sea superior a la energía mínima que se necesita comunicar al electrón para arrancarlo del metal (venciendo la atracción de los iones positivos). Dicha energía mínima recibe el nombre de **trabajo de extracción** (W_{extr}). En consecuencia, habrá una frecuencia mínima υ_0 (frecuencia umbral) a partir de la cual se conseguirá extraer electrones del metal y tal que $E_0 = h\cdot\upsilon_0 = W_{extr}$.

Las consideraciones anteriores permiten comprender el hecho de que por mucho que aumentemos la intensidad luminosa de una radiación de cierta frecuencia (lo que significa aumentar el número de fotones incidentes), si su frecuencia es inferior a la umbral, (υ_0) el efecto fotoeléctrico no se presente en ningún caso, puesto que la energía que los fotones pueden comunicar a los electrones será inferior siempre a la energía mínima necesaria para arrancarlos venciendo las fuerzas eléctricas de atracción de los restos atómicos positivos.

También explica que la energía cinética con que surgen los electrones (para radiaciones que tengan frecuencias superiores a la umbral) varíe linealmente con la frecuencia puesto que la energía de un fotón que incide sobre un electrón se destinará en parte a extraerlo del metal ($h\cdot\upsilon_0$) y el resto se comunicará al mismo como energía cinética. Este tipo de razonamientos condujeron a Einstein a establecer que la energía cinética con que surgen los electrones en el efecto fotoeléctrico viene dada por:

$$Ec = E - E_0 \rightarrow Ec = h\cdot(\upsilon - \upsilon_0)$$

En la expresión anterior $h\cdot\upsilon$ representa la energía del fotón incidente y $h\cdot\upsilon_0$ la energía mínima necesaria para arrancar el electrón (o trabajo de extracción). Conviene darse cuenta de que en ella se halla implícito el resultado que se enuncia en el apartado c) según el cual la energía cinética crece linealmente con la frecuencia (a partir de $\upsilon \geq \upsilon_0$) y que el valor de la pendiente de la recta será precisamente el de la constante h.

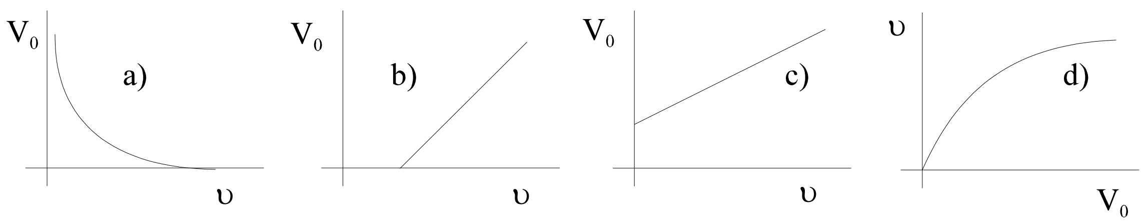
La ecuación se suele escribir como: $h \cdot \upsilon = h \cdot \upsilon_0 + \frac{1}{2} m_e \cdot v^2$

donde $m_e v^2/2$ es la energía cinética con que el electrón sale de la placa, que podemos expresar también como:

$$h \cdot \upsilon = h \cdot \upsilon_0 + q_e \cdot V_0$$

ya que, como ya hemos visto en el primer ejercicio, la energía cinética con que salen los electrones se puede medir conociendo el potencial de frenado V_0 correspondiente.

3. El potencial de frenado que elimina el efecto fotoeléctrico en función de la frecuencia (υ) de la luz incidente está dado (en valor absoluto) por una de las gráficas siguientes:



Determinad cuál de ellas es la correcta, justificando la respuesta.

Si analizamos las gráficas anteriores podemos darnos cuenta en primer lugar de que tanto la primera como la última de ellas no son posibles, porque en ambas la frecuencia de la radiación incidente aparece limitada, cuando está claro que se trata de la variable independiente y que puede tomar, en principio, cualquier valor entre 0 e infinito (ya que podemos utilizar radiaciones de la frecuencia que queramos).

En cuanto a la tercera gráfica (c), vemos que para una frecuencia nula, es decir, sin iluminar, se produciría el efecto fotoeléctrico ya que existe un potencial de frenado distinto de 0 (y por tanto una energía cinética inicial con que salen electrones), lo cual es absurdo puesto que si no hacemos incidir ninguna radiación los electrones no pueden adquirir la energía necesaria para vencer las fuerzas de atracción de los iones positivos del metal.

Finalmente, la segunda gráfica (b) nos indica que existe una frecuencia υ_0 por debajo de la cual el potencial de frenado vale 0, es decir, no se arrancan electrones y a partir de dicho valor υ_0 el potencial de frenado crece linealmente con la frecuencia. Este resultado es coherente con la ecuación de Einstein $h \cdot \upsilon = h \cdot \upsilon_0 + q_e \cdot V_0$ (ved ejercicio anterior), ya que si despejamos V_0 obtenemos:

$$V_0 = \frac{h}{q_e} \cdot (\upsilon - \upsilon_0)$$

expresión que representada gráficamente nos daría, precisamente, una recta como la de la gráfica b, cuya pendiente debería ser siempre la misma independientemente del metal utilizado en la experiencia.

De hecho, la determinación experimental de la pendiente de esta gráfica (conocida la carga del electrón) permite obtener el valor de la constante h. Millikan durante la segunda década del siglo XX obtuvo de esta forma el valor dicha constante y comprobó que era concordante con el obtenido por el físico alemán Max Planck 15 años antes por métodos muy diferentes, lo que constituyó un importante apoyo a la hipótesis corpuscular de Einstein sobre la naturaleza de la luz.

4. Calculad la energía cinética de los electrones liberados por un metal que forma parte de una célula fotoeléctrica si el potencial de frenado es de 5 V. (Carga del electrón $1'6\cdot10^{-19}$ C).

sol: Ec = 5 eV = $8\cdot10^{-19}$ J

5. Una superficie metálica emite electrones cuando sobre ella incide luz verde pero no lo hace cuando es amarilla ¿Emitirá cuando la luz incidente sea azul? ¿Y si es roja? (Justificad la respuesta).

sol: Con azul sí y con roja no.

6. Que un determinado metal presente o no efecto fotoeléctrico, al ser iluminado con una radiación de una cierta frecuencia, depende de:

a) La amplitud de la onda incidente.
b) El valor de la frecuencia.
c) Otros factores (especificar en su caso).

Señalad qué propuesta es la que se acepta como correcta razonando el porqué.

sol: Depende del valor de la frecuencia, de modo que el efecto fotoeléctrico sólo se presentará si la frecuencia de la radiación utilizada es superior a la umbral, sea cual sea el valor de la amplitud.

7. Una fuente de luz monocromática emite una radiación de longitud de onda $4'8\cdot10^{-7}$ m, con una potencia de 20 W ¿Cuántos fotones emite por segundo?

Sabemos que la luz está formada por fotones y que la energía de cada uno de ellos viene dada por la expresión $E_f = h\cdot\upsilon$ siendo h la constante de Planck y υ la frecuencia que tenga la luz en cuestión. La energía que emite una fuente luminosa por segundo coincide precisamente con el valor de la potencia de dicha fuente, por tanto cuanto mayor sea dicha potencia

P mayor será también el número de fotones que se emitan por segundo. Por otra parte, como la energía de cada fotón es h·υ, cabe pensar que, para una potencia dada, cuanto menor sea la frecuencia de la radiación, tantos más fotones se estarán emitiendo cada segundo.

¿Cómo podríamos determinar el número de fotones N emitidos por la fuente al cabo de un tiempo t?

De acuerdo con los razonamientos anteriores, podemos hallar la energía E emitida durante ese tiempo y dividirla por la energía correspondiente a uno de los fotones que forman la radiación, de este modo:

$$N = \frac{E}{E_f} = \frac{P \cdot t}{h \cdot \upsilon}$$

Hemos de ver ahora, cómo podemos *calcular la frecuencia* (no se nos da directamente en el enunciado) y finalmente *determinar el número de fotones emitidos por segundo* (que es lo que se nos pide).

Aunque no conocemos la frecuencia, sí que sabemos la longitud de onda de la radiación utilizada y como ambas magnitudes se hallan relacionadas, podemos obtener fácilmente la frecuencia. En efecto:

$\mathrm{c} = \dfrac{\lambda}{\mathrm{T}} = \lambda \cdot \upsilon$ de modo que $\upsilon = \dfrac{\mathrm{c}}{\lambda}$ siendo c la velocidad de propagación de la luz.

Consecuentemente N = $\dfrac{\mathrm{P \cdot t}}{h \cdot \upsilon} = \dfrac{\mathrm{P \cdot t} \cdot \lambda}{\mathrm{h \cdot c}}$

de donde podemos despejar el número de fotones emitidos cada segundo sin más que dividir N por t:

$\dfrac{N}{t} = \dfrac{\mathrm{P} \cdot \lambda}{\mathrm{h \cdot c}}$ y sustituyendo numéricamente $\dfrac{N}{t} = \dfrac{20 \cdot 4'87 \cdot 10^{-7}}{6'63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}$ = $4'89 \cdot 10^{19}$ fotones/s

8. La frecuencia umbral de un metal dado es de $8'5 \cdot 10^{14}$ Hz. Determinad la energía cinética máxima de los electrones emitidos cuando éste se ilumina con luz de $1'3 \cdot 10^{15}$ Hz.

sol: Ec = 1’86 eV

9. El trabajo de extracción para el aluminio es 4’2 eV. Si se ilumina una superficie de aluminio con radiación de 200 $\overset{o}{\mathrm{A}}$. Determinad:

a) Longitud de onda umbral para el aluminio.
b) Potencial de frenado necesario para detener los fotoelectrones.

Recordemos que el trabajo de extracción nos indica el valor de la mínima energía (E_0) que hay que suministrar a un electrón del metal para arrancarlo del mismo. En nuestro caso esta energía deberá ser comunicada por un fotón de la radiación incidente, de modo que $E_0 = h\cdot\upsilon_0$, por tanto:

$$W_{extr} = h\cdot\upsilon_0$$

Si conocemos el trabajo de extracción será inmediato conocer $h\cdot\upsilon_0$ y, por tanto λ_0.

En efecto: $\lambda_0 = \dfrac{c}{\upsilon_0} = \dfrac{c\cdot h}{W_{extr}}$

No obstante, antes de sustituir, hemos de expresar el W_{extr} en J:

$W_{extr} = 4'2$ eV $= 4'2\cdot 1'6\cdot 10^{-19}$ J $= 6'72\cdot 10^{-19}$ J.

de modo que sustituyendo ahora numéricamente, obtenemos:

$$\lambda_0 = \frac{3\cdot 10^8\cdot 6'63\cdot 10^{-34}}{6'72\cdot 10^{-19}} = 2'96\cdot 10^{-7}\,\text{m} = 2960\ \mathring{A}$$

Si iluminamos con luz de $\lambda = 200\ \mathring{A}$ será más energética (de acuerdo con la expresión $c = \lambda\cdot\upsilon$, a menor longitud de onda mayor frecuencia y por tanto mayor energía). En consecuencia, no sólo extraerá los electrones sino que además los dotará de cierta energía cinética Ec que podremos conocer gracias al potencial de frenado V_0 necesario.

$Ec = h\,(\upsilon - \upsilon_0) \rightarrow q_e\cdot V_0 = h\,(\upsilon - \upsilon_0)$ de donde $V_0 = \dfrac{h}{q_e}\cdot(\upsilon - \upsilon_0) = \dfrac{h\cdot c}{q_e}\cdot\left(\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda_0}\right)$
y sustituyendo: $V_0 = 57'8$ V.

10. Un metal emite fotoelectrones de energía cinética 2 eV al iluminar con luz de frecuencia $1'1\cdot 10^{15}$ Hz. Calculad la frecuencia de la luz con que hay que iluminar para que la energía máxima de los fotoelectrones sea superior, en un 25%, a la del caso anterior.

En este problema se nos indica que al irradiar un metal con fotones de una cierta frecuencia υ, se arrancan electrones con una energía cinética de 2 eV. Esto significa que el fotón incidente posee una energía $E = h\cdot\upsilon$ superior a la de extracción ($E_0 = h\cdot\upsilon_0$) en 2 eV. Si introducimos estas condiciones en la ecuación fotoeléctrica de Einstein nos queda:
$h\cdot\upsilon = h\cdot\upsilon_0 + Ec \rightarrow Ec = h\cdot\upsilon - h\cdot\upsilon_0 = h\,(\upsilon - \upsilon_0) = 2$ eV

¿Cómo podemos aumentar la energía cinética con que surgen los electrones?

Si queremos que cada electrón extraído incremente la energía cinética con que sale en un 25% habrá que iluminar el metal con una radiación de mayor frecuencia ($\upsilon' > \upsilon$), para que los fotones sean más energéticos ($E' = h\cdot\upsilon'$), cumpliéndose entonces que:

$Ec' = E' - E_0 = h\cdot\upsilon' - h\cdot\upsilon_0 = h\,(\upsilon' - \upsilon_0) = 2 + 0'25\cdot 2 = 2'50$ eV $= 2'50\cdot 1'6\cdot 10^{-19}$ J

Tenemos pues las dos expresiones siguientes:

$Ec' = h \cdot \upsilon' - h \cdot \upsilon_0$
$Ec = h \cdot \upsilon - h \cdot \upsilon_0$

y necesitamos *obtener la frecuencia* υ'. Como no sabemos el valor de la frecuencia umbral υ_0 podemos eliminarla multiplicando la segunda ecuación por -1 y sumando ambas:

$Ec' - Ec = h \cdot \upsilon' - h \cdot \upsilon$ y despejando obtenemos finalmente:

$\upsilon' = \dfrac{Ec' - Ec + h\upsilon}{h}$ y sustituyendo numéricamente: $\upsilon' = 1'22 \cdot 10^{15}$ Hz.

Si analizamos el resultado anterior, comprobaremos que es dimensionalmente homogéneo (T^{-1} en ambos lados). Además la frecuencia pedida υ'es mayor que la inicial υ (como debía de ser para aumentar la energía cinética de los fotoelectrones) y coincide con ella si imponemos la condición de que la diferencia entre las energías cinéticas sea nula.

11. Si la frecuencia umbral para la plata es 1'13 ·10^{15} Hz, ¿Cuál deberá ser la frecuencia de la radiación incidente para que la energía cinética de los fotones emitidos sea de 2'6 eV?

sol: $\upsilon = 1'75 \cdot 10^{15}$ Hz

12. Si la frecuencia umbral de una superficie metálica es 4'63·10^{14} Hz, determinad la rapidez inicial con que son emitidos los fotoelectrones al iluminar la superficie con una frecuencia de 8·10^{14} Hz (h= 6'63·10^{-34} J· s; m_e = 9'1·10^{-31} kg).

sol: $v = 7 \cdot 10^5$ m/s

13. Si los fotoelectrones del cinc exigen un trabajo de extracción de 4'3 eV, ¿Qué longitud de onda máxima será capaz de extraer electrones?

sol: $\lambda = 2890$ Å

14. El trabajo de extracción para el caso del metal sodio es de 2'3 eV.

a) ¿Cuál será la máxima longitud de onda que producirá emisión de fotoelectrones en dicho metal?

b) Si la luz incidente fuera de 2000 Å, ¿Cuál sería la energía cinética máxima de los electrones extraídos?

Si conocemos la energía que, como mínimo, debemos suministrar para conseguir arrancar un electrón del sodio, podremos saber también la frecuencia umbral o mínima necesaria para ello, la cual viene dada por la expresión:

$E_0 = h \cdot \upsilon_0 \rightarrow \upsilon_0 = E_0/h$

y como la frecuencia de una radiación está relacionada con la longitud de onda mediante $c = \lambda \cdot \upsilon$, podemos obtener fácilmente que:

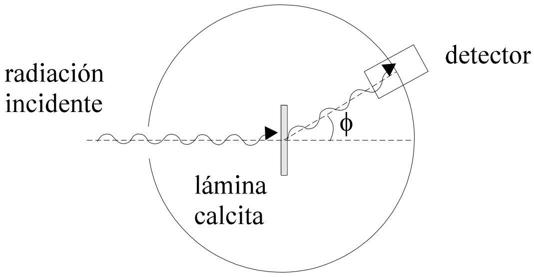
$\lambda_0 = c/\upsilon_0 = ch/E_0 = 5'4 \cdot 10^{-7}$ m

Si se hace incidir sobre el sodio una radiación de 2000 Å ($2 \cdot 10^{-7}$ m), al ser de menor longitud de onda (y por tanto más energética), sí que será capaz de arrancar electrones, pero además, el exceso de energía del fotón se invertirá en energía cinética del electrón. Ello viene expresado en la ecuación fotoeléctrica de Einstein en la forma:

$$Ec = h \cdot \upsilon - h \cdot \upsilon_0 \rightarrow Ec = h \cdot c \cdot \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) = 6'26 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3'91 \text{ eV}$$

15. Determinad la longitud de onda de la radiación emergente que se produce en el efecto Compton para un ángulo de 30^0, sabiendo que la radiación incidente es de $3 \cdot 10^{20}$ Hz (h = 6'63·10-34 J·s, masa del electrón = $9'31 \cdot 10^{-31}$ kg).

El denominado efecto Compton se produce cuando un haz de fotones llega a una fina lámina de un cristal de calcita y, tras incidir en ella, se observa que una parte del haz atraviesa la lámina sin sufrir modificación alguna y la otra se dispersa apareciendo radiación en todas direcciones (valores de ϕ entre 0º y 180º). Además se comprueba que la radiación que ha sido dispersada tiene distinta longitud de onda y, por tanto, distinta frecuencia, según sea el ángulo de desviación.



Mediante medidas experimentales Compton llegó a establecer la relación existente entre las longitudes de onda de la radiación incidente y emergente, que viene dada por la expresión:

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{m \cdot c} \cdot (1 - \cos\phi)}$$

Como veremos en el ejercicio 24, esta expresión queda justificada teóricamente al interpretar el fenómeno como un choque elástico entre los fotones incidentes y los electrones de los átomos del cristal.

En la ecuación anterior se aprecia que la variación de la longitud de onda que se produce depende del valor que tome la función $1-\cos\phi$. Dicha función alcanza su valor máximo cuando $\phi = \pi$ rad, en cuyo caso $1-\cos\phi = 1+1 = 2$ e $\Delta\lambda = 2h/mc$. Analizando la ecuación es fácil darse cuenta también que aquella radiación que atraviese la lámina sin desviarse, tendrá un $\Delta\lambda = 0$.

Para el caso que nos plantean en el que el ángulo de dispersión es ϕ = 30º, lo conocemos todo menos λ' (incógnita) y λ. Esta última podemos determinarla si la relacionamos con la frecuencia: $c = \lambda \cdot \upsilon \rightarrow \lambda = c/\upsilon$, así pues:

$$\lambda' - \frac{c}{\upsilon} = \frac{h}{m_0 \cdot c}(1 - \cos\phi) \quad \text{y sustituyendo valores:}$$

$$\lambda' = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^{20}} + \frac{6'63 \cdot 10^{34}}{9'1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8}(1 - \cos 30^o) = 1'3 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$$

Como podemos ver la longitud de onda de la radiación emergente es mayor que la de la incidente ($\lambda = c/\upsilon = 10^{-12}$ m), lo cual es coherente con que parte de la energía de la radiación incidente se transfiera a los electrones con los que se interacciona, de forma que el fotón emergente tendrá menos energía que el incidente ($\upsilon' < \upsilon$ y por tanto que $\lambda' > \lambda$).

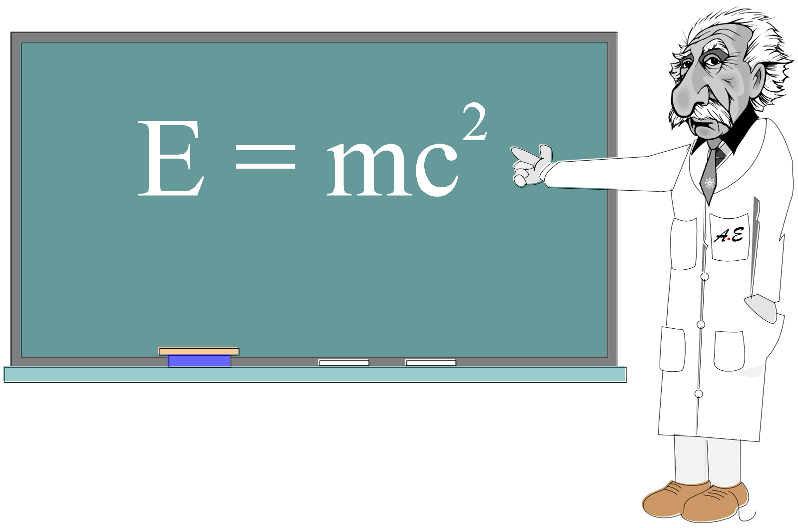
16. ¿Para qué ángulo de dispersión es máxima la transferencia de energía en el efecto Compton? ¿Cuál es la variación relativa de la longitud de onda que experimenta un haz de rayos X de λ = 7'1 nm, cuando es dispersado en dichas condiciones?

sol: 180^0; $\lambda' - \lambda / \lambda = 6'8 \cdot 10^{-4}$ m

17. Averiguad la variación de la cantidad de movimiento que sufren ciertos fotones, por efecto Compton, para que la variación máxima de su longitud de onda sea del 1%.

sol: $\Delta p = 1\%$

18. ¿Qué significado hay que atribuir a la famosa expresión de Einstein: $E = m \cdot c^2$?



En ocasiones se afirma que la expresión $E = m \cdot c^2$ significa que la masa se puede transformar en energía pura, en el sentido que es posible desmaterializar una cierta masa m y obtener a cambio una energía $m \cdot c^2$ habiéndose convertido masa (algo material) en energía (algo inmaterial).

En realidad, dicha expresión debería escribirse más propiamente como:

$$\Delta E_0 = \Delta m \cdot c^2$$

donde E_0 es la llamada **energía propia** de un cuerpo o sistema dado y representa la energía de dicho sistema en reposo, independientemente de lo que tenga alrededor.

La ecuación anterior debe interpretarse diciendo que no es posible que cambie la energía propia de un sistema sin que a la vez lo haga el valor de su masa. Ambas cosas van ligadas, de modo que todo aumento (disminución) de energía propia va acompañado siempre de un aumento (disminución) en el valor de la masa.

Con esta afirmación no se está indicando que la masa se convierta en energía sino que cuando un cuerpo pierde una cantidad de energía, también está perdiendo masa, existiendo una proporcionalidad entre ambas cantidades, que viene dada por la expresión:

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2}$$

Este razonamiento no solo es válido para aquellos fenómenos (como los radiactivos) en los que un sistema emite energía mediante determinadas radiaciones sino que se puede generalizar a cualquier proceso en el que la energía propia cambie, sea cual sea el mecanismo por el cual lo hace como, por ejemplo, al comprimir un muelle, formarse un dipolo, etc.

19. Calculad el valor de la energía cinética relativista y comprobad que para v<<c coincide con la expresión utilizada en la mecánica clásica.

Sea un objeto de masa m y energía propia E_0. Ambas cantidades m y E_o se refieren a una propiedad (masa-energía) intrínseca del objeto, que se puede determinar en un sistema de referencia inercial (SRI) en el que el objeto está en reposo. Ahora bien, en cualquier otro SRI en el que el objeto se esté moviendo con una determinada velocidad, su energía total E será la suma de E_o y la correspondiente energía cinética E_c :

$E = E_o + E_c$

De acuerdo con la mecánica relativista, sabemos que la energía total de un sistema viene dada por la expresión:

$$E = m \cdot \gamma \cdot c^2$$

Sustituyendo obtenemos: $m\gamma c^2 = mc^2 + E_c$ y despejando: $E_c = \gamma mc^2 - mc^2$

La expresión anterior es la expresión relativista de la energía cinética de un cuerpo en movimiento en un SRI dado, que podemos escribir también como:

Ec = mc^2 (γ - 1) = $mc^2 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ donde $\beta = \left(\dfrac{v}{c} \right)$

Si sustituimos en esta expresión β por v/c y suponemos que v es mucho menor que c, como se nos dice ene el enunciado, podríamos pensar que (v/c)^2 es prácticamente 0 y en consecuencia obtendríamos:

$$Ec = mc^2\ (1\text{-}1) = 0$$

La conclusión anterior es absurda puesto que si se trata de una partícula en movimiento debe tener energía cinética. *¿Dónde puede estar el error?*

En el razonamiento anterior se ha cometido el fallo de suponer que (v/c)^2 es despreciable, cuando, si bien es cierto que su valor es muy pequeño, en este cálculo, como veremos a continuación, no se puede ignorar

Si tomamos $\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ y desarrollamos este binomio, obtendremos:

$$(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\beta^2 + \frac{3}{8}\cdot\beta^4 + \ldots$$

y ahora, si consideramos que por ser v<<< c podemos despreciar a partir de β^4 (inclusive) y no a partir de β^2 (como hicimos antes), tendremos:

Ec = mc^2 $(1 + \frac{1}{2}\cdot\beta^2 - 1)$ = $\dfrac{1}{2}\mathrm{mv}^2$ que es la expresión utilizada en mecánica clásica.

20. Justificad que un fotón sea una partícula de masa nula.

Como sabemos, la radiación electromagnética está constituida por unas partículas especiales o “cuantos” llamadas fotones que se desplazan en el vacío con una rapidez c de prácticamente 300.000 km/s (en el aire es aproximadamente la misma). Cada uno de esos fotones dispone de una energía E = h·υ en donde h es una constante llamada constante de Planck (6’63·10^{-34} J·s) y υ la frecuencia de la radiación de la que forma parte el fotón en cuestión.

Por otra parte, de acuerdo con la Teoría Especial de la Relatividad, la energía de cualquier partícula libre viene dada por la expresión: E = mγc^2. Si queremos aplicarla al caso del fotón, bastará sustituir en ella v por c, con lo que:

$$\mathrm{E} = m\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{v/c})^2}}\cdot c^2 = m\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{c/c})^2}}\cdot c^2 = m\cdot\frac{1}{0}\cdot c^2 = m\cdot\infty\cdot c^2$$

Esta última expresión tiene dos soluciones:

a) $m \neq 0$ y $E = \infty$, cosa que no puede suceder ya que por otro procedimiento hemos visto que la energía de un fotón es finita y de valor $h \cdot \upsilon$.

b) $m = 0$ y E indeterminado, lo que sí puede ocurrir. ($E = m\gamma c^2 = 0 \cdot \infty \cdot c^2$ = indeterminado)

Así pues, la masa del fotón es nula y su energía no puede obtenerse con la expresión $E = m\gamma c^2$, sino como $E = h \cdot \upsilon$.

21. Determinad el valor de la cantidad de movimiento de un fotón.

Según la Teoría Especial de la Relatividad, la expresión de la cantidad de movimiento de traslación de una partícula es $p = m \cdot \gamma \cdot v$, que aplicada al caso del fotón resulta $p = 0 \cdot \infty \cdot c$ = indeterminado.

Así pues no podemos conocer la cantidad de movimiento de un fotón haciendo uso de la expresión anterior. Sin embargo, sí podemos hacerlo utilizando la expresión:

$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

La ecuación anterior expresa una ley fundamental de la dinámica relativista y nos informa de que la energía, la masa y la cantidad de movimiento de cualquier partícula o sistema en general, están interrelacionadas. Aplicándola al caso de un fotón ($m = 0$), nos queda que:

$E = p \cdot c$ con lo que: $\boxed{p = \dfrac{E}{c}}$

Para terminar, indicar tan solo que si, equivocadamente, hubiésemos utilizado $p = m \cdot v$, válida únicamente para casos en los que $v \ll c$, habríamos obtenido $p = 0 \cdot c = 0$, en franca contradicción con las experiencias que señalan inequívocamente que el fotón, aunque de masa nula, sí tiene cantidad de movimiento.

22. Un electrón de un átomo de hidrógeno pasa desde un estado cuya energía es - 0’85 eV a otro que es -10’2 eV ¿Cuánto valdrá la cantidad de movimiento del fotón emitido?

sol: $p = 5 \cdot 10^{-27}$ kg·m/s

23. En el efecto Compton se considera que el electrón sobre el que impacta el fotón incidente tiene, tras el impacto, una energía E, dada por la expresión:

$$E = \sqrt{m^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2}$$

Comprobad que dicha expresión es correcta.

Para justificar la expresión que se nos da en el enunciado, consideremos que la energía del electrón tras el impacto (lo mismo que la de cualquier otra partícula en movimiento), valdrá:

$E = m\cdot\gamma\cdot c^2 = \dfrac{m}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}\cdot c^2$ y su cantidad de movimiento será:

$$p = m\cdot\gamma\cdot v = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}\cdot v$$

Si elevamos al cuadrado estas dos expresiones, obtenemos:

$E^2 = \dfrac{m^2\cdot c^6}{c^2-v^2}$ para la energía y $p^2 = \dfrac{m^2\cdot c^2\cdot v^2}{c^2-v^2}$ para la cantidad de movimiento.

y si multiplicamos por c^2 esta última expresión y la restamos de la primera nos queda:

$$E^2 - p^2\,c^2 = \frac{m^2\cdot c^6}{c^2-v^2} - \frac{m^2\cdot c^4\cdot v^2}{c^2-v^2} = \frac{m^2c^4\cdot\left(c^2-v^2\right)}{(c^2-v^2)} = m^2\cdot c^4$$

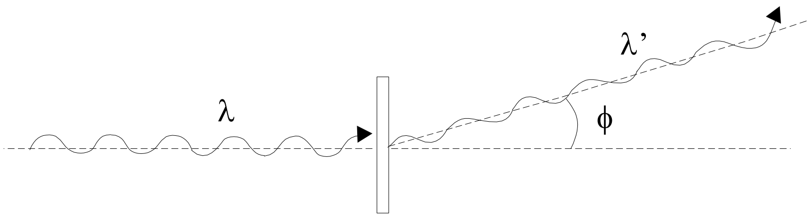
de modo que $E = \sqrt{m^2\cdot c^4 + p^2\cdot c^2}$ tal y como queríamos demostrar.

24. Deducid de forma teórica la expresión:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}\cdot(1-\cos\phi)$$

obtenida al interpretar los resultados experimentales de la experiencia de Compton.

Compton comprobó en 1923 que al hacer incidir rayos X (radiación electromagnética de elevada frecuencia) sobre un cristal de calcita, la radiación emergente sufría una cierta desviación respecto a la dirección original pero lo que resultaba más sorprendente, era que salía con una frecuencia menor que la que tenía al incidir sobre el cristal. Este último hecho era absolutamente inexplicable si se concebía la radiación como una onda (la frecuencia de una onda no cambia cuando esta pasa de un medio a otro). En cambio, se justifica fácilmente si se interpreta como un choque elástico entre dos partículas: una el fotón incidente y la otra un electrón de la corteza de los átomos presentes en la calcita. En efecto, el electrón gana energía mientras que el fotón la pierde, como la energía del fotón viene dada por $h\cdot\upsilon$, si pierde parte de la misma su frecuencia debe disminuir.

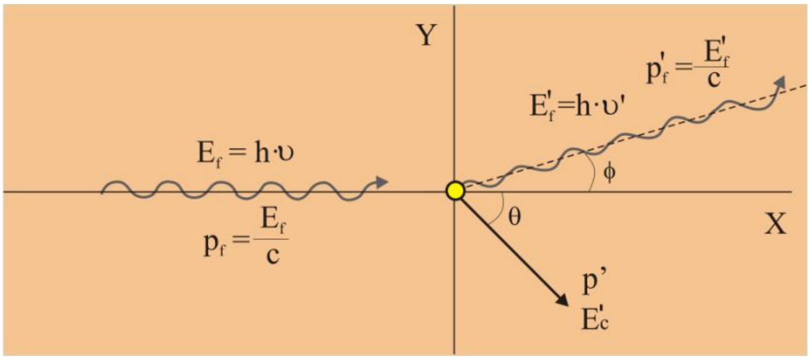


Compton constató experimentalmente que las frecuencias de la radiación incidente υ y emergente υ' estaban relacionadas a través de la expresión:

$$\frac{1}{\upsilon'} - \frac{1}{\upsilon} = \frac{h}{mc^2} \cdot (1 - \cos\phi) \text{ o lo que es equivalente: } \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} \cdot (1 - \cos\phi)$$

siendo m la masa correspondiente al electrón.

A estas mismas expresiones se puede llegar considerando el fenómeno como un choque elástico y oblicuo entre un fotón incidente y un electrón. Por tratarse de un choque, se cumplirá el principio de conservación de la cantidad de movimiento y por ser elástico se conservará también la energía cinética.



Conservación de $\vec{p}$: $\left(\frac{E_f}{c},\ 0\right) = \left(\frac{E'_f}{c}\cdot\cos\phi,\ \frac{E'_f}{c}\cdot\mathrm{sen}\phi\right) + \left(p'\cos\theta,\ -p'\mathrm{sen}\,\theta\right)$

Conservación de Ec: $E_f + E_c = E'_f + E'_c$

y suponiendo despreciable la energía cinética del electrón antes del choque:

$E_f = E'_f + E'_c$

Descomponiendo la ecuación vectorial en dos escalares, nos queda:

$$\frac{E_f}{c} = \frac{E_f'}{c}\cdot\cos\phi + p'\cos\theta \rightarrow h\cdot\upsilon = h\cdot\upsilon'\cos\phi + p'\cdot c\cos\theta \ (1)$$

$$0 = \frac{E_f'}{c}\cdot\mathrm{sen}\,\phi - p\cdot\mathrm{sen}\,\theta \rightarrow 0 = h\cdot\upsilon'\,\mathrm{sen}\phi - p'\cdot c\,\mathrm{sen}\theta \ (2)$$

y en cuanto a la energía cinética: $h\cdot\upsilon = h\cdot\upsilon' + E'_c$ (3)

Despejando en (1) y en (2):

$p'\cdot c\cos\theta = h\cdot\upsilon - h\cdot\upsilon'\cos\phi$
$p'\cdot c\,\text{sen}\theta = h\cdot\upsilon'\text{sen}\phi$

Elevando al cuadrado y sumando: $p'^2c^2 = (h\upsilon)^2 - 2\,h\upsilon\cdot h\upsilon'\cdot\cos\phi + (h\upsilon')^2$ (4)

Por otra parte, la energía del electrón (E') y su cantidad de movimiento p', están relacionados en la forma: $E'^2 = p'^2c^2 + m^2c^4$ y despejando: $p'^2c^2 = E'^2 - m^2c^4$.

Si además consideramos que $E' = E_0 + E'_c = mc^2 + E'_c$ obtenemos:

$p'^2c^2 = (mc^2 + E'_c)^2 - m^2c^4 \rightarrow p'^2c^2 = E'^2_c + 2mc^2E'_c$

Sustituyendo en la expresión anterior la E'_c dada por la ecuación (3):

$p'^2c^2 = (h\cdot f - h\cdot f')^2 + 2mc^2\,(h\cdot f - h\cdot f')$ y operando nos queda:

$p'^2c^2 = (hf)^2 - 2\,hf\cdot hf' + (hf')^2 + 2mc^2\,(hf - hf')$ (5)

Podemos ahora igualar las expresiones (4) y (5) y simplificar:

$(hf)^2 - 2\,hf\cdot hf'\cdot\cos\phi + (hf')^2 = (hf)^2 - 2\,hf\cdot hf' + (hf')^2 + 2mc^2\,(hf - hf')$

$hf\cdot hf'\cdot(1 - \cos\phi) = mc^2\,(hf - hf')$ y dividiendo por h^2c^2 obtenemos:

$\frac{1}{\lambda\lambda'}(1-\cos\phi) = \frac{m}{h}\cdot(f - f') \rightarrow \quad \frac{1}{\lambda\lambda'}(1-\cos\phi) = \frac{mc}{h}\cdot\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)$ y multiplicando en ambos miembros por $\lambda\lambda'$ y despejando obtenemos:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}\cdot(1-\cos\phi)$$

25. ¿Qué idea básica introduce De Broglie, acerca del comportamiento de la materia?

Tanto el efecto fotoeléctrico como el efecto Compton se pueden explicar, como hemos visto, asignando a la luz y a las radiaciones electromagnéticas en general un carácter discontinuo o cuantizado. Esto podría interpretarse como un apoyo fundamental a la teoría corpuscular de la luz cerrándose así una histórica polémica sobre si se trataba de una onda o estaba formada por partículas. Sin embargo, los fenómenos de interferencia y de difracción que experimenta la luz, seguían sin poder explicarse mediante la teoría corpuscular y había que hacerlo otorgándole naturaleza ondulatoria.

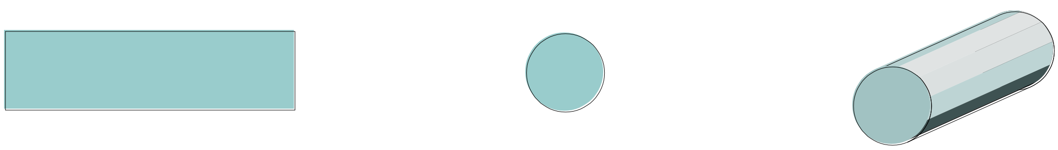
De acuerdo con todo ello hubo que admitir para los fotones un doble comportamiento onda-corpúsculo, que interpretaremos asignándoles una naturaleza "dual" de tal forma que se pondría de manifiesto uno u otro según el tipo de fenómeno en el que interviniese la radiación. El fotón aparece pues como un concepto unificador de las propiedades corpusculares y ondulatorias de la radiación electromagnética, tal y como queda reflejado en la expresión $p = h/\lambda$ que relaciona su cantidad de movimiento (carácter corpuscular) con la longitud de onda (carácter ondulatorio).

Esta situación, junto con algunos problemas físicos que en la década de 1920-30 permanecían todavía sin resolver, llevó al francés Louis De Broglie a exponer una nueva y atrevida hipótesis consistente esencialmente en extender esa doble naturaleza de onda-corpúsculo de los fotones a todos los demás objetos en movimiento ya sean tan pequeños como un electrón o tan grandes como un planeta.

De Broglie generalizó la ecuación $\lambda = h/p$, aplicable a los fotones que se mueven siempre a la velocidad de la luz, a cualquier otro objeto en movimiento. Más tarde, los científicos americanos Davisson y Germer, verificaron la hipótesis de De Broglie al obtener fotografías que mostraban que los electrones también experimentaban el fenómeno de la difracción (típicamente ondulatorio) y obtener a partir de las mismas la longitud de onda asociada, comprobando que coincidía con el valor predicho por la relación anterior ($\lambda = h/p$).

Así pues, la idea básica que se introdujo en la física a partir de la hipótesis de De Broglie fue que todos los objetos materiales y no solamente el fotón, poseían una doble naturaleza ondulatoria-corpuscular.

La idea de la dualidad onda-corpúsculo planteaba no obstante nuevas interrogantes, como, por ejemplo, en qué podían consistir las ondas asociadas a los objetos. Conviene señalar que se han dado varias interpretaciones erróneas. Una de las más frecuentes consiste en imaginar fotones y electrones como partículas clásicas que se mueven acompañadas de una onda, cuando en realidad partícula y onda son la misma cosa, es decir, el concepto clásico de partícula material y de onda no existe. Todos los sistemas físicos tienen potencialmente los dos comportamientos de modo que, según el tipo de fenómeno que estemos analizando podremos apreciar el ondulatorio o el corpuscular. A diferencia de lo establecido en la Mecánica Clásica, estos comportamientos no son excluyentes sino complementarios. Es algo así como si sólo nos mostrasen un cilindro en dos posiciones tales que en unos casos nos pareciese un rectángulo y en otros un círculo, aunque sabemos que en realidad no es lo uno ni lo otro ni tampoco la simple suma de ambas cosas.



26. Los electrones de un microscopio electrónico son acelerados con una diferencia de potencial de 12 kV ¿Cuál será su longitud de onda asociada?

Si tenemos en cuenta la naturaleza ondulatorio-corpuscular de la materia y, en consecuencia de los electrones, la longitud de onda correspondiente a los mismos será de acuerdo con la ecuación introducida por De Broglie:

$$\lambda = h/p$$

de modo que para conocer λ bastará con determinar la cantidad de movimiento p.

¿Cómo podemos obtener la cantidad de movimiento correspondiente a uno de los electrones que se indican en el enunciado del problema?

Si consideramos la definición de cantidad de movimiento de una partícula p = mv, necesitaremos conocer qué rapidez adquiere un electrón al ser acelerado bajo la acción del campo eléctrico. Como se desplaza entre dos puntos cuya diferencia de potencial es 12 kV, bastará aplicar el principio de conservación de la energía al movimiento del electrón entre dichos puntos para conocer la rapidez que alcanza.

La energía cinética que adquiere el electrón será $E_c = q_e \cdot \Delta V$ (donde, como ya justificamos en el capítulo de campo eléctrico, tanto q_e como ΔV son valores absolutos) y considerando que la velocidad que adquiere el electrón es mucho menor que c:

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = q_e \cdot \Delta V \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 q_e \Delta V}{m_e}}$$

Si al sustituir los datos se obtiene un valor de "v" comparable a "c", deberemos utilizar la expresión relativista para Ec y para p. (Si hallamos v, veremos que no es nuestro caso).

Como p = mv tendremos que $p = \sqrt{2 q_e m_e \Delta V}$, con lo que: $\lambda = h/p = \dfrac{h}{\sqrt{2 q_e m_e \Delta V}}$

Démonos cuenta que la longitud de onda dependerá de la diferencia de potencial a que sea sometido el electrón. Si las ΔV son elevadas conseguiremos longitudes de onda muy pequeñas. En nuestro caso:

$$\lambda = \frac{6'63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 1'6 \cdot 10^{-19} \cdot 9'1 \cdot 10^{-31} \cdot 12 \cdot 10^{3}}} = 1'12 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m} = 0'112\ \mathrm{\mathring{A}}$$

¿Qué ventajas puede suponer el hecho de poder utilizar longitudes de onda muy cortas en un microscopio de este tipo?

En primer lugar conviene señalar que la máxima resolución de un microscopio es del orden de la longitud de onda que se utilice para poder ver los objetos. Esto hace que un microscopio convencional tenga limitada su resolución por el mínimo valor de la longitud de onda a que es sensible el ojo humano (unos 4000 Å). Para objetos menores de este tamaño, al ser éste comparable a la longitud de onda utilizada, se producen efectos de difracción y dan una imagen borrosa.

En la década de 1930 se construyeron unos nuevos microscopios en los que la “iluminación” del objeto se lleva a cabo mediante un haz de electrones. Estos haces pueden tener una longitud de onda efectiva de unos 0’04 Å, con lo que se pueden examinar objetos tan pequeños como los virus, cuya estructura en un microscopio normal permanecería oculta debido a la difracción. La imagen producida por el haz de electrones se observa finalmente en una pantalla fluorescente o se fotografía.

27. Calculad la longitud de onda asociada a un electrón que se desplaza con una rapidez de c/25.

sol: $\lambda = 6 \cdot 10^{-11}$ m

28. ¿Cuál será la longitud de onda asociada a un automóvil de 2000 kg, que se desplaza a 144 km/h?

sol: $\lambda = 8'29 \cdot 10^{-39}$ m

29. Determinad el cociente entre las longitudes de onda asociadas a un neutrón y a un electrón de igual energía cinética. ($m_n = 1'675 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_e = 9'11 \cdot 10^{-31}$ kg).

sol: $\lambda_n / \lambda_e = 2'33 \cdot 10^{-2}$

30. Comparad la longitud de onda asociada a un electrón, un fotón y un neutrón, si todos ellos tienen una energía cinética de 1 MeV.

Se trata de un ejercicio de aplicación en el que se ha de obtener el valor de la longitud de onda correspondiente a distintas partículas (o más precisamente "cuantones"). En todos los casos deberemos utilizar la expresión de De Broglie:

$$\lambda = h/p$$

Nos bastará conocer la cantidad de movimiento p de cada una de las partículas para poder determinar el valor de la longitud de onda λ:

Para el fotón: p = E/c

y sustituyendo: λ = $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{\frac{E}{c}} = \dfrac{h \cdot c}{E} = \dfrac{6'63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{10^{6} \cdot 1'6 \cdot 10^{-19}} = 1'24 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}$

Para el electrón y el neutrón la cantidad de movimiento se puede obtener mediante el producto $m \cdot \gamma \cdot v$, en el que v habrá de calcularse a partir de la energía cinética de cada uno de ellos teniendo en cuenta la expresión relativista de la misma:

$$\mathrm{Ec} = \mathrm{E} - \mathrm{E}_0 = \mathrm{m} \cdot \gamma \cdot \mathrm{c}^2 - \mathrm{m} \cdot \mathrm{c}^2 = \mathrm{m} \cdot \mathrm{c}^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (\mathrm{v/c})^2}} - 1 \right)$$

y despejando: $\mathrm{v} = c \cdot \sqrt{1 - \dfrac{1}{\left(\dfrac{\mathrm{E_c}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{c}^2} + 1 \right)^2}}$

Sustituyendo para el electrón los valores correspondientes de Ec = 1 MeV y de su masa m = $9'1\cdot10^{-31}$ kg, nos queda: v = 0’94·c (cercana a la de la luz) de modo que:

$$p = m\cdot\gamma\cdot v = \frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\cdot 0'94\cdot c = \frac{9'1\cdot 10^{-31}}{\sqrt{1-(0'94)^2}}\cdot 0'94\cdot c = 7'55\cdot10^{-22}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Sustituyendo en $\lambda = h/p$ llegamos a $\lambda = 6'63\cdot19^{-34}/7'55\cdot10^{-22} = 8'78\cdot10^{-13}$ m

Mediante las mismas expresiones pero utilizando ahora los valores correspondientes al neutrón, cuya masa es de $1'675\cdot10^{-27}$ kg, obtenemos:

$v = 1'38\cdot10^{7}$ m/s, $p = 2'3\cdot10^{-20}$ kg·m/s y $\lambda = 2'88\cdot10^{-14}$ m.

¿Qué hubiera sucedido si para calcular v en el caso del electrón y del neutrón hubiésemos utilizado la expresión aproximada: $E_c = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$ *?*

Al aplicarla al electrón hubiésemos obtenido $v_e = \sqrt{\frac{2Ec}{m_e}} = 5'9\cdot10^{8}$ m/s.

Como vemos, se trata de un valor casi el doble que el de la velocidad de la luz en el vacío, lo que según la física relativista es imposible (de acuerdo con la Teoría de la Relatividad ningún objeto se puede desplazar a mayor velocidad que la de la luz). En este caso, pues, no puede ser utilizada la expresión aproximada de la energía cinética (se debe a que la rapidez con que se propaga es 0’94 c y, por tanto, nada despreciable frente a c).

En cambio, al aplicarla al neutrón (cuya masa es más de 1800 veces la del electrón), obtenemos:

$$v_n = \sqrt{\frac{2Ec}{m_{0n}}} = 1'38\cdot10^{7}\ \text{m/s}$$

que coincide con el valor anterior (al desplazarse con una rapidez mucho menor que c).

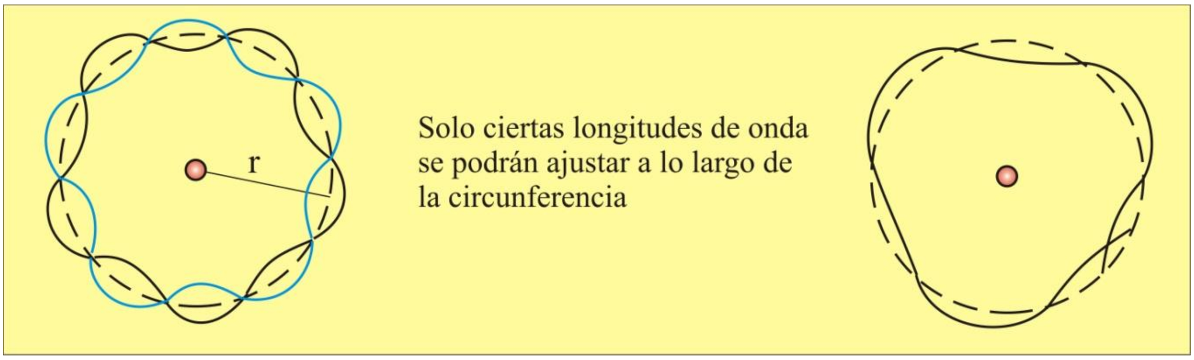
31. Determinad el valor de la longitud de onda correspondiente a:

a) La Tierra en su movimiento de traslación alrededor del Sol. (Masa aproximada de la Tierra 6·1024 kg, rapidez lineal respecto del Sol 29'8 km/s.
b) Una pelota de 150 g lanzada a 200 km/h
c) Una mota de polvo de 10^{-10} g de masa moviéndose a 1 cm/s
d) Un electrón de energía cinética igual a 49 eV (masa del electrón $9\cdot10^{-31}$ kg)

sol: a) $3'7\cdot10^{-63}$ m; b) $7'96\cdot10^{-35}$ m; c) $6'63\cdot10^{-19}$ m; d) $1'75\cdot10^{-10}$ m

32. De Broglie pensaba que la onda asociada a un electrón que describe una órbita circular debía ser una onda estacionaria (una circunferencia es un medio limitado) que se cerrara sobre sí misma (de otra manera se produciría interferencia destructiva y la onda cesaría rápidamente). De acuerdo con lo anterior ¿Qué relación matemática deberá existir entre la longitud de la órbita circular y la longitud de la onda asociada al electrón que describe dicha órbita?

Parece evidente que la circunferencia de la órbita que sigue el electrón deberá tener una longitud igual a un número entero de longitudes de onda.



Así pues las únicas ondas posibles serán aquellas que cumplan la relación: $2\pi r = n\lambda$ siendo r el radio de la órbita y n = 1, 2, 3 ...

Si en la expresión $2\pi r = n\lambda$ sustituimos $\lambda = h/mv$ no es difícil obtener que $mvr = nh/2\pi$ que es, precisamente, uno de los postulados de Bohr. Además, conviene tener en cuenta que es a partir de dicho postulado de donde se obtuvieron los radios de las órbitas permitidos, así como los valores de energía permitidos.

33. El principio de incertidumbre de Heisenberg es uno de los principios fundamentales de la mecánica cuántica. En él se dice que resulta imposible conocer en determinado instante y con toda precisión, la posición que ocupa una partícula en movimiento y su velocidad. Esta indeterminación hay que atribuirla a (señalad la propuesta correcta y explicadla):

a) El hecho de que toda medida implica, mientras se lleva a cabo, una perturbación en aquella magnitud que se mide.
b) La propia imprecisión de los instrumentos de medida utilizados.
c) Otra respuesta.

El principio de incertidumbre, de Heinserberg afirma la imposibilidad de determinar simultáneamente y con una precisión absoluta la posición y la cantidad de movimiento de una partícula determinada, como por ejemplo un electrón.

Se trata de algo contrario a los postulados de la Mecánica Clásica en donde, como sabemos, si se conocen la posición y velocidad de un objeto en un instante dado y la fuerza resultante que actúa sobre el mismo, es posible conocer con total exactitud la posición y la velocidad que dicho objeto tendrá en cualquier instante posterior y, por tanto, la trayectoria que seguirá.

El principio de incertidumbre es una consecuencia de la dualidad onda-corpúsculo de la materia. En efecto, dicha dualidad conlleva una cierta deslocalización de todos los objetos en movimiento (aunque sea apreciable sólo en partículas submicroscópicas como, por ejemplo, los electrones), que nos impide hablar de trayectorias perfectamente definidas.

Heinserberg demostró que dada una partícula que se desplace a lo largo del eje OX, el producto de la imprecisión Δx con que se conozca su posición en un instante dado y la imprecisión Δp de su cantidad de movimiento ($p = m \cdot v$) en ese mismo instante, debe ser siempre mayor (o, al menos igual) que $h/2\pi$, es decir:

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq h/2\pi$$

De la ecuación anterior se desprende, que si en un instante dado conseguimos determinar la posición de una partícula en movimiento con mucha exactitud (Δx pequeñísimo), ello será a cuenta de una mayor imprecisión en la cantidad de movimiento y viceversa (para que el producto de ambos factores permanezca siempre por encima de $h/2\pi$.

Hemos de señalar que nada se opone a que podamos determinar con la precisión que queramos, la posición o la velocidad de, por ejemplo, un electrón (este principio se refiere a la determinación <u>simultánea</u> de ambas con precisión absoluta).

El principio de incertidumbre tal y como acaba de ser formulado, establece unos límites a la precisión con que podemos determinar los valores de las magnitudes **cantidad de movimiento** y **posición** de un móvil, con lo que, cabe esperar que esos límites vuelvan a aparecer cuando se midan otras magnitudes relacionadas con las anteriores. De hecho, el principio de indeterminación no solo se cumple para la cantidad de movimiento y posición sino para cualquier par de magnitudes cuyo producto tenga las mismas dimensiones que éste. Observemos que el producto anterior tiene dimensiones de energía · tiempo:

$$\text{kg} \cdot \text{m/s} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \cdot \text{m} \cdot \text{s} = \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} = \mathbf{J \cdot s}$$

Por tanto, otro par de magnitudes que cumplen dicho principio son la energía y el tiempo. Así, si la energía de un sistema se mide con una imprecisión ΔE y dicha medida se realiza durante un intervalo de tiempo Δt, se cumplirá que:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h/2\pi$$

Según la expresión anterior, la determinación simultánea de la energía y el tiempo viene afectada de un cierto límite, de tal forma que la imprecisión en el valor de la energía de un objeto es tanto mayor cuanto menor es el intervalo de tiempo considerado y viceversa. Un caso límite especialmente interesante es que, si queremos medir con absoluta precisión la energía de un sistema, será necesario utilizar un tiempo infinito.

Conviene tener presentes algunas interpretaciones erróneas que se relacionan con el Principio de Incertidumbre:

Una de ellas (probablemente la más extendida), consiste en atribuir la indeterminación en él implícita al hecho (por otra parte cierto), de que toda medida perturba aquello que se mide. Podemos pensar, por ejemplo, en una partícula de la que deseamos saber su posición y cantidad de movimiento en un cierto instante. Un modo ordinario de medir la posición de un objeto es examinarlo con un haz luminoso (enviándole fotones). Cabe pensar que si el objeto es muy grande, ni su posición ni su velocidad se verán afectadas por este hecho, pero ¿podemos afirmar lo mismo si se trata, por ejemplo, de un electrón? Sabemos que, debido al efecto de la difracción, para poder medir una distancia que nos de la posición con precisión hemos de utilizar una luz cuya longitud de onda sea inferior al tamaño de aquello que se quiere medir. Aunque en principio no hay ningún inconveniente en disponer de luz con una longitud de onda muy corta, resulta que cuanto más pequeña sea λ, mayor será la frecuencia y, por tanto, la energía de los fotones incidentes sobre el electrón, que afectarán a su cantidad de movimiento. Podríamos tratar de disminuir la perturbación utilizando una luz de longitud de onda mayor, pero en ese caso, debido a la difracción, la imprecisión en la determinación de la posición aumentaría.

El fenómeno anterior, no obstante, no debe ser identificado con el principio de incertidumbre, que se seguiría cumpliendo aún en el hipotético caso de que pudiésemos observar el movimiento de partículas sin “perturbarlo” o aunque tuviésemos instrumentos de medida totalmente precisos. No son estas las causas del límite a la precisión con que podemos conocer la trayectoria de una partícula sino la propia naturaleza dual de la materia, su carácter ondulatorio-corpuscular.

34. Determinad el límite que impone el Principio de Incertidumbre de Heisenberg a la localización de una partícula macroscópica de 1 mg de masa y 10^{-6} m de diámetro, que se desplaza a lo largo del OX con rapidez de 10 m/s, medida con una imprecisión de 10^{-3} m/s. (Considérese que la masa de la partícula se ha medido con la suficiente exactitud como para no influir en la imprecisión de la cantidad de movimiento).

Según el principio de incertidumbre el producto de las imprecisiones con que se midan para un instante dado la posición y la cantidad de movimiento de una partícula debe ser igual o mayor que $h/2\pi$:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h/2\pi \quad \text{de donde } \Delta x \geq h/2\pi \cdot \Delta p$$

Como vemos, para conocer el límite que impone este principio a la localización de la partícula, necesitamos conocer la imprecisión con que se mide la cantidad de movimiento (Δp). Ahora bien, la cantidad de movimiento no es una magnitud que se haya medido directamente, sino que se obtiene al sustituir los valores de m y de v en la expresión $p = mv$, de forma que la imprecisión en p dependerá de la imprecisión con que se midan m y v. Si, como se dice en el enunciado, la imprecisión cometida al medir la masa se puede considerar despreciable frente a la de v, tendremos que:

$\Delta p = m \cdot \Delta v = 10^{-6} \cdot 10^{-3} = 10^{-9}$ kg·m/s y sustituyendo en la expresión inicial:

$\Delta x \geq h/2\pi \cdot \Delta p \geq 6'63 \cdot 10^{-34}/2\pi \cdot 10^{-9} = 1'06 \cdot 10^{-25}$ m.

Como vemos, el límite que impone el principio de incertidumbre es totalmente irrelevante en el mundo macroscópico ya que, ni somos capaces de alcanzar tal nivel de precisión ni, por otra parte, nos interesaría. Una cuestión que podemos plantearnos es:

¿Cómo cambiaría el resultado si en lugar de la partícula considerada se tratase de un electrón que se desplaza con igual rapidez y medida con la misma imprecisión?

Un análisis superficial de la situación (una partícula que se desplaza con la misma rapidez, etc.), podría llevarnos a contestar que el resultado debería ser del mismo orden. Sin embargo, es preciso tener en cuenta que la masa de un electrón es de $9'1\cdot10^{-31}$ kg lo que hace que al sustituir en la expresión que nos da la imprecisión con que vendrá afectada su posición, obtengamos:

$$\Delta x \geq h/2\pi\cdot\Delta p \geq \frac{6'63\cdot10^{-34}}{2\pi\cdot9'1\cdot10^{-31}\cdot10^{-3}} = 0'12 \text{ m}$$

Es fácil comprender que el límite impuesto por el principio de incertidumbre es muy importante en este caso ya que tendríamos el electrón (que se considera como si fuera prácticamente puntual) deslocalizado en una longitud de 12 cm.

35. Un láser cuya longitud de onda es 630 nm emite un pulso de duración 10 ns. Hallad la imprecisión mínima de la frecuencia del pulso.

$\Delta E\cdot\Delta t \geq \dfrac{h}{2\pi} \;\rightarrow\; \Delta E \geq \dfrac{h}{2\pi\cdot\Delta t}$. Por otra parte, E = h · f $\rightarrow$ ΔE = h · Δf $\rightarrow$ $\Delta f = \dfrac{\Delta E}{h}$

Sustituyendo: $\Delta f = \dfrac{\Delta E}{h} \geq \dfrac{h}{2\pi\cdot\Delta t\cdot h} = \dfrac{1}{2\pi\cdot\Delta t} = \dfrac{1}{2\pi\cdot10^{-8}} = 1'59\cdot10^{7}$ Hz

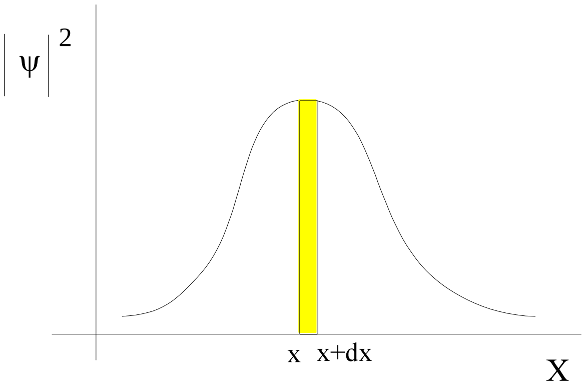
36. En la mecánica clásica el estado de un sistema en un instante dado queda caracterizado por los valores de su posición y su velocidad. Sin embargo, debido a la doble naturaleza ondulatorio-corpuscular de la materia, esto no es posible cuando se trabaja con partículas "submicroscópicas". ¿Cómo se procede en este caso?

Una vez aceptado el carácter dual de la materia se desarrolló una nueva mecánica llamada Mecánica Cuántica, para la que todo sistema físico está descrito por una función de onda Ψ (x, t) en la que x representa la posición de un objeto que se mueve sobre una recta y t el tiempo. Esta nueva mecánica, si bien es absolutamente general, al aplicarla al mundo macroscópico se obtienen los resultados de la Mecánica Clásica, por lo que únicamente tiene interés cuando se aplica a sistemas físicos extraordinariamente pequeños o "submicroscópicos" (electrones, protones, fotones, etc.).

¿Qué representa Ψ (x, t) para una partícula?

El valor $\Psi^2\cdot dx$ representa la probabilidad de que la partícula se encuentre entre las posiciones x y (x+dx) en un cierto instante t. En efecto, si en un instante dado representásemos

$|\psi|^2$ en función de la posición x, obtendríamos una curva como la de la figura adjunta, que nos indica la probabilidad de encontrar la partícula en distintas posiciones.



Por tanto, la posición de una "partícula" en movimiento no está perfectamente definida y únicamente se puede hablar de la probabilidad de encontrarla en cierta posición. Esto es algo que se comprueba experimentalmente ya que cuando se realizan medidas repetidas de la posición de una partícula en las mismas condiciones, se obtiene la curva de distribución anterior.

Si como hemos dicho Ψ (x, t) describe el estado de un sistema físico en el instante t, ¿qué expresión determina en la mecánica cuántica cómo evoluciona este sistema y, por tanto su Ψ, con el tiempo?

En la dinámica clásica la ecuación de Newton $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ o ecuación fundamental de la dinámica, determina cómo evoluciona un sistema físico macroscópico con el tiempo. Para la mecánica cuántica, fue Schrödinger quien formuló la ecuación fundamental que describe cómo evoluciona un sistema físico. Dicha ecuación puede escribirse para una partícula como:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{4\pi m}{h}\left[E - U(x)\right]\Psi = 0$$

en la que x representa el valor de la coordenada X, E la energía total, m la masa de la partícula y U la energía potencial a que está sometida. Se trata de una ecuación que, como se puede apreciar presenta una cierta complejidad. Sin embargo ha tenido una importancia extraordinaria en el estudio de la estructura subatómica de la materia y se le considera, con toda razón, como la ecuación fundamental de la mecánica cuántica.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

C-1. Los trabajos de extracción de tres metales diferentes son: 1'9 eV, 4'2 eV y 5'0 eV. Se tiene una fuente de luz monocromática de λ = 514 nm. Se pide:

a) ¿De cuál de los tres metales anteriores se podrán extraer electrones?

b) Para obtener una fotocorriente de 2 mA ¿qué potencia deberá tener la luz incidente?

Para poder extraer un electrón es necesario que la energía del fotón incidente $E = h \cdot f$ supere a la energía mínima necesaria para liberar al electrón, dada por $h \cdot f_0$ (donde f_0 es la frecuencia umbral, característica de cada metal). El valor de esa energía coincide con el trabajo de extracción. Por tanto, lo primero que tendremos que hacer será conocer la frecuencia de la radiación utilizada y, a continuación, calcular la energía en eV y compararla con los trabajos de extracción que se nos dan en el enunciado.

$f = c/\lambda = 3 \cdot 10^{8}/(514 \cdot 10^{-9}) = 5'84 \cdot 10^{14}$ Hz

La energía del fotón sería $E = h \cdot f = 6'63 \cdot 10^{-34} \cdot 5'84 \cdot 10^{14} = 3'87 \cdot 10^{-19}$ J = 2'4 eV

El resultado anterior muestra que, con ese tipo de luz, sólo podrán extraerse electrones del primer metal que es el que tiene un trabajo de extracción inferior a la energía del fotón incidente.

Para hallar la potencia de la luz incidente que se necesita (potencia óptica), hemos de averiguar qué relación liga dicha potencia con la intensidad de fotocorriente que se desea obtener.

Supongamos el caso más favorable en el que cada fotón incidente extrajera un electrón y que éste llegase a la otra placa. Si consiguiéramos relacionar por una parte el número de fotones incidentes en un tiempo Δt con la potencia óptica y por otra el número de electrones liberados con la intensidad de saturación, tendríamos resuelto el problema. En efecto:

Sabemos que $P = E/\Delta t = N \cdot E_{fotón}/\Delta t = N \cdot h \cdot f/\Delta t$ donde N es el número de fotones que inciden en Δt. Por tanto:

$$\frac{N}{\Delta t} = \frac{P}{h \cdot f} \quad (1)$$

Por otra parte, la intensidad de corriente $I = Q/\Delta t = N \cdot q_e/\Delta t$ donde N es el número de electrones que atraviesan una sección dada del conductor en un tiempo Δt. Por tanto:

$$\frac{N}{\Delta t} = \frac{I}{q_e} \quad (2)$$

Igualando las expresiones (1) y (2), obtenemos que: $\frac{P}{h \cdot f} = \frac{I}{q_e} \rightarrow P = \frac{I \cdot h \cdot f}{q_e}$

Sustituyendo valores nos queda que: $P = 4'8 \cdot 10^{-3}$ W

11. FÍSICA NUCLEAR

1. Una muestra radiactiva emite partículas α, β y γ. Determinad la energía cinética que corresponderá a una partícula α que sale con una rapidez de 10^7 m/s, a una β cuya rapidez es de 0'98c y a una γ de frecuencia 10^{20} Hz.

Datos: masa del electrón $9'1\cdot10^{-31}$ kg; constante de Planck h = $6'63\cdot10^{-34}$ J·s

Sabemos que las partículas α están constituidas por dos protones y dos neutrones (núcleos de $^{2}_{4}\mathrm{He}$), las β son electrones y las γ son fotones. Estas últimas son las que tienen un mayor poder de penetración siendo capaces de atravesar incluso paredes gruesas de hormigón. El cálculo de la energía cinética de cada una de ellas deberá hacerse atendiendo al valor de la rapidez con que se estén moviendo. Dicha rapidez, en el caso de los fotones (en el vacío y en el aire) es siempre de $3\cdot10^8$ m/s (aproximadamente) y en el caso de las otras dos puede variar dependiendo de si han sido o no aceleradas de algún modo. En este problema nos dan la rapidez con que se mueve cada partícula (y la frecuencia de la radiación γ). Con estos datos, podemos calcular fácilmente la energía cinética correspondiente, teniendo en cuenta que si el valor de la rapidez es cercano al de la luz en el vacío, será necesario utilizar la expresión relativista de dicha energía.

a) Para la partícula α, como su rapidez (10^7 m/s) es bastante menor que "c" ($3\cdot10^8$ m/s), podremos hacer uso de la expresión clásica o "aproximada" para la energía cinética:

$$\mathrm{Ec} = \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2$$

en la que podemos determinar el valor de la masa si tenemos en cuenta que en 4 g de partículas habrá el número de Avogadro de éstas, por lo que la masa en kg de una sola de ellas se obtendrá como:

$m = (4/N_A)\cdot10^{-3}$ en donde, como sabemos, $N_A = 6'02\cdot10^{23}$ partículas/mol

Sustituyendo ahora en la expresión de la energía cinética:

$\mathrm{Ec} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6'02\cdot10^{23}}\cdot10^{-3}\cdot(10^7)^2$ y operando, obtenemos: $\mathrm{Ec} = 3'3\cdot10^{-13}$ J = 2 MeV.

b) Para una partícula β, como la rapidez con que se desplaza es del orden de c, tendremos que determinar la energía cinética utilizando su expresión relativista. En esta situación podemos determinar la energía cinética como la diferencia entre la energía total de la partícula y su energía propia (correspondiente a cuando se encuentra en reposo), de modo que:

Ec = E - E_0 = m·γ·c^2 - m·c^2 = m·c^2 (γ-1) y teniendo en cuenta que $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$

obtenemos: Ec = $m \cdot c^2 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{v/c})^2}} - 1 \right)$ y sustituyendo valores, obtenemos:

Ec = $9'1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-(0'98)^2}} - 1 \right)$ = 3'3·10^{-13} J = 2'06 MeV

c) En el caso del fotón, sabemos que su energía es cinética y que ésta viene dada siempre por la expresión E = h·υ, siendo h la constante de Planck y υ la frecuencia de la radiación, de modo que basta sustituir los valores correspondientes para obtener:

Ec = E = h·υ = 6'63·10-34 · 1020 = 6'63·10^{-14} J = 0'41 MeV

2. Hallad el número atómico y la masa atómica del elemento producido a partir del núcleo $^{218}_{84}Po$ después de emitir 4 partículas α y 2 partículas β.

Dado que una partícula α es el núcleo del átomo de $^{4}_{2}\mathrm{He}$, cuando un núcleo de un elemento radiactivo emita una de estas partículas, el número de sus nucleones (A) deberá disminuir en 4 unidades y el número de sus protones (Z) en 2, por lo que se transformará en otro núcleo cuyo número másico será cuatro veces inferior y que estará situado dos lugares antes en el sistema periódico. El proceso se puede esquematizar como:

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

Análogamente, cuando lo que se emite por un núcleo es una partícula β (un electrón), se comprueba experimentalmente que el número de protones Z aumenta en una unidad mientras que el número másico A no varía. (El proceso corresponde a la transformación de un neutrón en un protón y en un electrón, emitiéndose este último):

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}_{Z+1}\mathrm{Y} + {}^{0}_{-1}e$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que en una transformación radiactiva el número total de nucleones y la carga total han de conservarse. Ambas se conocen con el nombre de leyes de Soddy, ya que fueron establecidas de forma experimental por este científico y sus colaboradores en la segunda década del siglo XX.

Las ecuaciones anteriores aplicadas al caso descrito en el enunciado conducen a:

$$ {}^{218}_{84}Po \rightarrow 4\,{}^{4}_{2}\mathrm{He} + 2\,{}^{0}_{-1}\mathrm{e} + {}^{A}_{Z}\mathrm{Y} $$

De donde resulta sencillo concluir que el número másico y el número atómico del elemento Y vendrán dados por:

218 = 16 + A → A = 218-16 = 202 nucleones
84 = 8 + 2·(-1) + Z → Z = 84-8+2 = 78 protones

Por tanto, el elemento Y que se forma es el platino ${}^{202}_{78}\mathrm{Pt}$

3. Determinad los números másicos y atómicos del núclido que resultará a partir del ${}^{238}_{92}U$ después de que éste emita 3 partículas α y 2 partículas β.

sol: 226 u.m.a y 88 respectivamente.

4. En la serie radiactiva del ${}^{232}_{90}Th$ se emiten las siguientes radiaciones hasta llegar al Pb: α, β, β, α,α,α,α. ¿Cuál es la masa y el número atómico del elemento que precede al Pb en la serie?

sol: 216 u.m.a y 84 respectivamente

5. Dos elementos radiactivos tienen periodos de semidesintegración de 60 y de 180 años respectivamente. Si partimos de 2 moles de átomos de cada uno de ellos, se pide:

a) Trazad las curvas de desintegración correspondientes.
b) ¿Cuál será el valor de su constante de desintegración?
c) ¿Cuántos moles de átomos de cada elemento quedarán al cabo de 500 años?

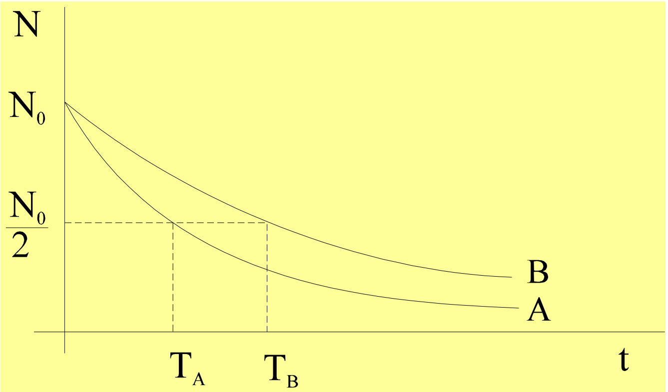
Experimentalmente se comprueba que dada una muestra radiactiva con un número inicial de átomos N_0, dicho número decrece de forma exponencial con el tiempo (al ir desintegrándose). El número de átomos del elemento radiactivo que quedarán al cabo de un tiempo t viene dado por la función:

$$ N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} $$

Si analizamos dicha expresión, apreciaremos que el decrecimiento en el número de átomos del núclido considerado presentes en la muestra inicial, depende de una constante λ (llamada constante de desintegración) característica de cada elemento radiactivo, de modo que cuanto mayor es su valor, tanto más rápidamente decrece la función (disminuye el número de átomos del elemento en cuestión).

También podemos ver que el tiempo necesario para que una muestra radiactiva de un elemento cualquiera se desintegre totalmente (esto es, todos los átomos de dicho elemento se hayan transformado en otros distintos con lo que N = 0), es infinito. Por tanto, dicho tiempo no sirve para caracterizar una sustancia radiactiva. Sin embargo, el tiempo T necesario para que el número de átomos existentes en un instante inicial (N_0 a los 0 s) se reduzca a la mitad

($N_0/2$ a los T s), sí que es característico de cada sustancia, tal y como se aprecia en la figura adjunta (para dos sustancias A y B). A dicho intervalo de tiempo se le denomina Periodo de Semidesintegración.



¿Qué relación existirá entre el periodo de semidesintegración T y la constante λ?

De acuerdo con el significado de ambas magnitudes parece claro que, cuanto mayor sea una, menor tendrá que ser la otra (cuanto más rápidamente decrezca N, en menor tiempo se reducirá a la mitad el número de átomos del núclido). Para encontrar la relación matemática existente entre ellas bastará considerar en la expresión $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ un tiempo de un periodo (t = T) y sustituir N por $N_0/2$ de modo que:

$N_0/2 = N_0 \cdot e^{-\lambda T}$ Simplificando y tomando logaritmos neperianos: $\ln 1/2 = \ln e^{-\lambda T}$

de donde: $T = \ln 2/\lambda = 0'693/\lambda$

Como vemos se trata, de dos magnitudes inversamente proporcionales y si conocemos una de ellas podemos determinar fácilmente la otra. Aplicando la expresión anterior a nuestro caso nos queda:

T_A = 60 años; $\lambda_A = 0'693/60 = 0'0115$ años^{-1}
T_B = 180 años; $\lambda_B = 0'693/180 = 0'0038$ años^{-1}

Si ahora queremos conocer el número de moles de átomos del elemento radiactivo considerado, que habrá en cada una de las muestras cuando hayan transcurrido 500 años, hemos de tener en cuenta que en la expresión $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ lo que se maneja es el número de átomos.

¿Cómo podemos introducir en la expresión anterior el número de moles de átomos?

Basta con tener en cuenta que en cada mol de átomos hay un total de N_A átomos (N_A es el número de Avogadro $6'02 \cdot 10^{23}$ part/mol). Por tanto, si dividimos por N_A en ambos miembros de la igualdad, nos queda:

$$\frac{N}{N_A} = \frac{N_0}{N_A} \cdot e^{-\lambda t} \rightarrow n = n_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

siendo n el número de moles de átomos sin desintegrar existentes en el instante t. Como en el enunciado se nos indica que partimos de 2 moles de átomos en cada caso:

$n_A = 2 \cdot e^{-0'0115 \cdot 500}$ = 6’63·10^{-3} moles, de átomos del núclido A que habrá a los 500 años.
$n_B = 2 \cdot e^{-0'0038 \cdot 500}$ = 0’299 moles, de átomos del núclido B que habrá a los 500 años.

Otra cuestión que nos podemos plantear es *cómo transformar la función que venimos manejando para que en ella aparezca la masa de la muestra* en lugar del número de átomos o el número de moles de átomos. Como la masa de una cierta muestra de un núclido se puede expresar en función del número de moles de átomos (n) y de la masa molar de dicho núclido (M) mediante: m = n · M, la expresión anterior (moles de átomos) se puede escribir también en función de la masa:

$n \cdot M = n_0 \cdot M \cdot e^{-\lambda t} \rightarrow m = m_0 \cdot e^{-\lambda t}$

Tenemos así tres ecuaciones de desintegración:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}\ ; \quad n = n_0 \cdot e^{-\lambda t}\ ; \quad m = m_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

En este tipo de funciones, dado que la exponencial no puede tener unidades, será muy cómodo trabajar. Bastará con que la unidad en que se mide λ sea precisamente la inversa de la unidad en que se mide T y con que en los dos miembros de la igualdad se trabaje con partículas, moles, gramos, etc.

6. Disponemos de una muestra de 1 g de Ra ¿Cuántos gramos de este elemento tendremos dentro de 100 años? (El periodo de semidesintegración del Ra es de 1600 años).

sol: 0’9576 g

7. Sabiendo que $N(t) = N_0 \cdot e^{-0.02\,t}$ (donde t viene en segundos), es la ley de desintegración de una determinada sustancia radiactiva ¿Qué tiempo deberá transcurrir para que N_0 se reduzca a la mitad? ¿y para que se reduzca a la quinta parte?

Nos interesa conocer el tiempo que debe transcurrir para que una muestra que contiene N_0 núclidos radiactivos pase a tener $N_0/2$. Para ello bastará con sustituir en la ecuación de desintegración correspondiente, que, en este caso, nos dicen que es $N = N_0 \cdot e^{-0'02t}$, el número de núclidos N por $N_0/2$ y determinar el tiempo que debe transcurrir para que esto suceda.

$N_0/2 = N_0 \cdot e^{-0'02t}$ simplificando, tomando logaritmos neperianos y despejando:

$$\frac{1}{2} = e^{-0'02t} \rightarrow \ln 1 - \ln 2 = -0'02t \rightarrow \ln 2 = 0'02t \rightarrow t = \frac{\ln 2}{0'02} = 34'65\,s$$

En este caso, el tiempo obtenido será el periodo de semidesintegración del núclido con el que estemos trabajando.

Sugerid un procedimiento para calcular el tiempo necesario para que el número inicial de núcleos N_0 se reduzca a la quinta parte y llevadlo a cabo.

El procedimiento será, como es lógico, similar al anterior, de forma que bastará con utilizar la misma expresión pero esta vez sustituyendo N por $N_0/5$, de modo que:

$N_0/5 = N_0 \cdot e^{-0'02t'}$ de donde obtenemos: t' = 80'47 s

Un aspecto importante a considerar es el valor del numero de núcleos sin desintegrar N_0 presentes en la muestra inicialmente. Si este hubiera sido muy pequeño, por ejemplo de solo 10, *¿seguirían siendo válidos los resultados obtenidos?*

En principio podríamos responder afirmativamente y decir que para que la muestra se redujera a 5 núcleos o a 2, deberían de transcurrir 34'65 s y 80'47 s respectivamente. Pero si se procediese a comprobarlo experimentalmente, nos sorprenderíamos de los resultados ya que podría darse una multitud de posibilidades distintas, desde, por ejemplo, que todos se hayan desintegrado al cabo de un segundo hasta que ninguno de los 10 lo haya hecho en todo un año. *¿A qué puede deberse esto?*

La ley de la desintegración radiactiva $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ se obtiene a partir de muestras que contienen un número mínimo de núcleos (de cierto núclido) que sea lo suficientemente grande como para resultar estadísticamente significativo, de modo que las predicciones que se hacen respecto a la desintegración son de tipo estadístico, es decir, no sabemos si un núclido determinado va a tardar un segundo o mil años en desintegrarse sino que, <u>cuando hay un gran número</u> de ellos (muestra estadística), al cabo de un tiempo t, de N_0 que había al principio quedarán N sin desintegrar.

8. La desintegración del isótopo $^{210}_{84}Po$ viene dada por la reacción:

$$^{210}_{84}Po \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{206}_{82}Pb$$

Suponiendo que en el instante inicial hay N_0 núcleos de Po presentes en la muestra y que el número de núcleos en el instante t es N y $\lambda = 0'005$ días^{-1} se pide:

a) Periodo de semidesintegración.
b) La fracción de núcleos sin desintegrar cuando t = 2T y t = 3T.

sol: a) 138'63 días; b) 1/4 y 1/8 respectivamente.

9. El periodo de semidesintegración de un elemento radiactivo es de 28 años. ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que su cantidad de átomos se reduzca <u>al</u> 75% de los que hay en una muestra inicial?

sol: 11'62 años

10. Una muestra contiene, en un instante dado, 1’6 g de un elemento radiactivo cuyo periodo de semidesintegración es de 23 días. ¿Cuántos gramos de ese elemento quedarán cuando hayan transcurrido tres periodos?

sol: 0’2 g

11. El Radón (222) se desintegra con un periodo de semidesintegración de 3’9 días. Si inicialmente se dispone de 20 mg ¿Cuanto quedará al cabo de 7’6 días?

sol: 5’2 mg

12. ¿Qué proporción de los núcleos de ^{53}Co de una muestra se desintegrarán en un mes, sabiendo que su periodo es de 70’8 días?

Si consideramos que la muestra inicial contiene N_0 núcleos (de cierto núclido) al cabo de 30 días nos quedarán N, que podremos evaluar mediante la expresión:

$N = N_0 \cdot e^{-\lambda 30}$.

¿Cómo podríamos determinar qué proporción de los núcleos iniciales se habrán desintegrado?

El número total de núclidos desintegrados vendrá dado por: $N' = N_0 - N$

La proporción respecto al número inicial será:

$N'/N_0 = (N_0 - N)/N_0$.

Si queremos expresar la proporción anterior en % haremos:

$$\frac{N_0 - N}{N_0} \cdot 100 = \frac{N_0 - N_0 \cdot e^{-\lambda 30}}{N_0} \cdot 100 = (1 - e^{-\lambda 30}) \cdot 100$$

y como $\lambda = 0'693/T = 0'693/70'8 = 0'0098$ días^{-1}, sustituyendo obtenemos que:

$$\frac{N_0 - N}{N_0} \cdot 100 = (1 - e^{-0'009830}) \cdot 100 = 25'5$$

Así pues, al cabo de un mes se habrá desintegrado el 25’5 % de los núcleos de Cobalto 53 que existían en la muestra inicial.

13. Una muestra radiactiva contiene 10^8 átomos de período de semidesintegración 5 días ¿Cuál será su actividad inicial? ¿Y al cabo de 2 días?

Cada vez que un núcleo se desintegra para convertirse en otro distinto, lo hace emitiendo una partícula α o β, dependiendo de su naturaleza. (La emisión γ no corresponde a una desintegración sino que es posterior a ella y se debe a un ajuste energético en el núcleo resultante). Parece lógico identificar la "actividad" de una muestra radiactiva con el número de partículas que ésta emite por unidad de tiempo (A). De acuerdo con el razonamiento anterior el valor numérico de esta magnitud coincidirá con el número de desintegraciones producidas por unidad de tiempo, es decir, con la velocidad de desintegración (v) ya que cada desintegración supone la emisión de una partícula. Como el número de núcleos que se desintegran en un tiempo dado es $N' = N_0 - N$, su variación temporal será:

$v = dN'/dt = d(N_0 - N)/dt = -dN/dt$

Vemos que el valor de v o número de desintegraciones por unidad de tiempo coincidirá con la variación de N (número de núcleos que quedan) con el tiempo, que siempre es negativa (ya que N decrece), cambiada de signo.

En adelante la ecuación anterior también la expresaremos en la forma: $A = -dN/dt$

¿Qué relación existirá entre la actividad A de una muestra radiactiva y el número de átomos sin desintegrar presentes en un instante dado?

En principio, cabe esperar que para un núclido dado, cuanto mayor sea el número de átomos de la muestra (sin desintegrar) en un cierto instante, mayor resulte la actividad A de la muestra. Al transcurrir el tiempo, como el número de átomos decrece, también deberá hacerlo la actividad de la muestra. Para obtener la relación operativa que liga a ambas magnitudes haremos lo siguiente:

De la ecuación $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ podemos obtener la derivada cambiada de signo:

$v = -dN/dt = -\lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda t} = -\lambda \cdot N$ y como A y v coinciden numéricamente, concluimos:

$$A = \lambda \cdot N$$

En nuestro caso la actividad inicial de la muestra la determinaremos como:

$A_0 = \lambda \cdot N_0 = (0'693/T) \cdot N_0 = (0'693/5) \cdot 10^8 = 1'39 \cdot 10^7$ d/s (desintegraciones/segundo)

¿Cómo podremos calcular la actividad de la muestra al cabo de cierto tiempo?

Si en la ecuación de desintegración $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ multiplicamos en ambos miembros por λ:

$\lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ de donde: $A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$

y sustituyendo: $A = 1'39 \cdot 10^7 \cdot e^{-0'139 \cdot 2} = 1'05 \cdot 10^7$ d/s

14. ¿Cuál es el periodo de semidesintegración de una muestra radiactiva que en un momento determinado da 3850 señales/s en un contador y que al cabo de 5 minutos da solamente 2600 señales/s?

sol: T = 8’83 min.

15. Calculad la actividad de una muestra de 1 mg de radio sabiendo que el periodo de semidesintegración es de 1590 años y su masa atómica 226 u.m.a. (El número de Avogadro N_A = 6’022 · 10^{23} átomos/mol).

La actividad inicial de una muestra de un núclido radiactivo se evalúa mediante la expresión $A_0 = \lambda \cdot N_0$. Sin embargo, en este caso no nos indican el número de núcleos que existen en la muestra sino su masa.

¿Cómo podemos obtener N_0 *?*

Podemos obtener en primer lugar el número de moles de núcleos mediante la expresión n = m/M (m masa de la muestra y M masa molar) y a continuación multiplicar por el número de Avogadro N_A para obtener el número total de núcleos presentes.

$N_0 = n_0 \cdot N_A = (m_0/M) \cdot N_A$

$A_0 = \lambda \cdot N_0 = \lambda \cdot (m_0/M) \cdot N_A$. Teniendo en cuenta que λ = 0’693/T y sustituyendo:

$$A_0 = \frac{0'693}{1590} \cdot \frac{0'001}{226} \cdot 6'02 \cdot 10^{23} = 1'16 \cdot 10^{15} \text{ d/año}$$

16. Si el periodo de semidesintegración del $^{14}_{6}C$ es de 5570 años ¿Cuál es la actividad de una muestra de 5 g de $^{14}_{6}C$? (N_A = 6’022 · 10^{23} átomos · mol^{-1})

sol: $A_0 = 2'7 \cdot 10^{19}$ d/año

17. El $^{212}_{83}Bi$ tiene un periodo de 60’5 minutos. ¿Cuántos átomos se desintegran por segundo en 50 gramos de $^{212}_{83}Bi$? (N_A = 6’022 · 10^{23} átomos/mol)

sol: 2’7 · 10^{19} átomos.

18. Completad las siguientes reacciones nucleares:

a) $^{27}_{13}\text{Al} + ^{1}_{0}\text{n} \rightarrow ^{4}_{2}\text{He} + [\ ]$

b) $^{12}_{6}\text{C} + [\ ] \rightarrow ^{4}_{2}\text{He} + ^{8}_{4}\text{Be}$

c) $^{24}_{11}\text{Na} \rightarrow ^{24}_{12}\text{Mg} + [\ ]$

d) $^{26}_{12}\text{Mg} + ^{1}_{1}\text{H} \rightarrow ^{26}_{12}\text{Mg} + [\ ]$

e) $^{235}_{92}\text{U} + ^{1}_{0}\text{n} \rightarrow ^{141}_{56}\text{Ba} + ^{92}_{36}\text{Kr} + [\ ]$

En este ejercicio se pide que completemos ciertas reacciones nucleares. Para ello bastará con que tengamos en cuenta la conservación del número de nucleones y de la carga (conviene puntualizar que cuando aquí se habla de la carga nos estamos refiriendo siempre a la carga nuclear). Así pues:

a) $^{27}_{13}\mathrm{Al} + ^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{A}_{Z}\mathrm{X}$

Conservación del número de nucleones: 27 + 1 = 4 + A → A = 24
Conservación de la carga: 13 = 2 + Z → Z = 11

Al tratarse de un núcleo con 11 protones, X corresponderá a un isótopo del sodio: $^{24}_{11}Na$

b) $^{12}_{6}C + [\ \ ] \rightarrow ^{4}_{2}He + ^{8}_{4}Be$

En este caso, como se puede apreciar, se conserva ya el número de nucleones y la carga. Por tanto el proyectil utilizado ha de ser un fotón γ ya que necesariamente deberá de ser muy energético para provocar una reacción nuclear.

c) $^{24}_{11}\mathrm{Na} \rightarrow ^{24}_{12}\mathrm{Mg} + ^{A}_{Z}\mathrm{X}$

Conservación del número de nucleones: 24 = 24 + A → A = 0
Conservación de la carga: 11 = 12 + Z → Z = -1

Se trata de un proceso radiactivo en el que se emite un electrón[1], es decir $^{A}_{Z}X = ^{0}_{-1}e$.

d) $^{26}_{12}Mg + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{26}_{12}Mg + ^{A}_{Z}X$

En este caso es evidente que $^{A}_{Z}X = ^{1}_{1}H$ y que, por tanto, solo habrá modificación en la cantidad de movimiento y energía de las partículas.

e) $^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{141}_{56}Ba + ^{92}_{36}Kr + ^{A}_{Z}X$

Conservación del número de nucleones: 235 + 1 = 141 + 92 + A → A = 3
Conservación de la carga: 92 = 56 + 36 + Z → Z = 0

Como no conocemos ninguna partícula que teniendo número atómico 0 tenga de número másico 3, hemos de pensar que en este caso se trata de 3 neutrones (3 $^{1}_{0}n$).

---

[1] En realidad este proceso se explica admitiendo que un neutrón se transforma en un protón, un electrón y una tercera partícula denominada antineutrino de acuerdo con la siguiente ecuación:

$^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow ^{1}_{1}\mathrm{H} + ^{0}_{-1}\mathrm{e} + \overline{\nu}$ (antineutrino).

19. Completad las siguientes reacciones nucleares indicando el nombre, símbolo químico, número de nucleones y carga de cada partícula o núclido que ajuste cada reacción:

a) ${}^{27}_{13}\mathrm{Al} + [\ ] \rightarrow {}^{25}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$ c) ${}^{31}_{15}\mathrm{P} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{H} + [\ ]$

b) ${}^{27}_{13}\mathrm{Al} + \alpha \rightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{P} + [\ ]$ d) ${}^{30}_{15}\mathrm{P} \rightarrow {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + [\ ]$

20. Completad la siguiente reacción nuclear: ${}^{27}_{13}\mathrm{Al} + \alpha \rightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{P} + \ldots$

sol: un neutrón (${}^{1}_{0}n$).

21. ¿Cómo podemos "obtener" energía en un proceso nuclear?

Sabemos que todo aumento o disminución de energía interna de un sistema (la energía de todo tipo medida por un observador que está en reposo respecto al centro de masas del sistema, también llamada energía propia) va acompañada, respectivamente, de una ganancia o pérdida de masa, cuyo valor vendrá dado por la ecuación de Einstein:

$$\Delta Eo = \Delta mc^2$$

Tanto en la formación de un núcleo a partir de los nucleones que lo forman como en una reacción nuclear, las variaciones de masa y de la correspondiente energía interna que se producen pueden ser muy grandes, lo que plantea la siguiente cuestión:

¿Cuánta energía "aprovechable" se puede obtener en una reacción nuclear?

En las reacciones nucleares se produce un cambio de **identidad** de las partículas, de manera que, en algunas ocasiones, las masas de los productos de la reacción son tan distintas de las masas de los reaccionantes que la variación de la energía propia del sistema es enorme. Puesto que la energía total se conserva en un sistema aislado, la energía total antes de la reacción (de los reaccionantes) ha de ser igual a la energía total después de la reacción (de todos los productos, incluyendo la posible radiación). Es decir:

$$Eo_r + Ec_r = Eo_p + Ec_p$$

En la igualdad anterior Eo representa la energía propia, dada por $Eo = mc^2$.

De modo que podemos expresarla como: $m_r \cdot c^2 + Ec_r = m_p \cdot c^2 + Ec_p$ y de aquí obtener que:

$$\mathbf{\Delta Ec} = Ec_p - Ec_r = \mathbf{(m_r - m_p) \cdot c^2}$$

Así pues: siempre que en una reacción nuclear la masa de los productos sea inferior a la masa de los reaccionantes, la disminución de energía debida a esta disminución de masa se transformará en un aumento de la energía cinética que, no olvidemos, es energía aprovechable para producir cambios. Esa energía cinética es la energía cinética de todos los productos de la reacción (núcleos y, en su caso, otras especies posibles como, por ejemplo, fotones).

A la cantidad $\Delta m = (m_r - m_p)$ se la denomina **defecto de masa** del proceso. (No confundir con un “incremento matemático” que siempre es “final – inicial”).

Así pues, siempre que el defecto de masa producido en una reacción nuclear sea una cantidad positiva (es decir, que $m_r > m_p$), podremos obtener energía (reacción exotérmica).

22. Hallad la energía en MeV correspondiente a un defecto de masa de 1 u.m.a.

Cuando se mide individualmente la masa de los nucleones (protones y neutrones) que forman un núcleo, la suma de la masas individuales de todos ellos es mayor que la masa del núcleo constituido por ese mismo número de nucleones. Eso significa que en el proceso de unión de los nucleones para formar el núcleo se ha debido desprender (mediante radiación, por ejemplo) una cantidad de energía igual a $\Delta m \cdot c^2$, siendo Δm, la diferencia entre la masa de todos los nucleones libres y la del núcleo que forman.

¿Qué habría que hacer para producir el proceso contrario (descomponer un núcleo en los protones y neutrones que lo forman)?

Lógicamente, para descomponer el núcleo separando todos los nucleones que lo forman será necesario suministrar la misma energía que se ha desprendido en el proceso de su formación. Es por ello que a dicha energía se le denomina **energía de enlace** del núcleo en cuestión (cada uno se caracterizará por un valor de la energía de enlace, E_b). Así pues:

$$\text{Energía de enlace} = \mathbf{E_b = (m_{\,nucleones} - m_{\,núcleo}) \cdot c^2}$$

Naturalmente, estas variaciones de masa no deben entenderse como que cambia el número de nucleones, que siguen siendo los mismos aislados o integrando el núcleo.

¿Cómo se podría evaluar la variación de energía cinética que acompaña a un defecto de masa de una unidad de masa atómica?

Bastará manejar la expresión $\Delta Ec = \Delta m \cdot c^2$ pero si queremos trabajar en el sistema internacional de unidades deberemos expresar la unidad de masa atómica en kg. Para ello hemos de recordar que 1 mol de átomos de ^{12}C posee una masa de 12 g y contiene el número de Avogadro de átomos (6’02·1023), de modo que:

1 u.m.a = $12 \cdot 10^{-3}/12 \cdot 6'02 \cdot 10^{23} = 1'660 \cdot 10^{-27}$ kg y sustituyendo

$\Delta E = \Delta m_0 \cdot c^2 = 1'660 \cdot 10^{-27} \cdot (2'998 \cdot 10^8)^2 = 1'492 \cdot 10^{-10}$ J y expresándolo en MeV:

$\Delta E = 1'492 \cdot 10^{-10}/1'602 \cdot 10^{-19} = 9'313 \cdot 10^8$ eV = 931’3 MeV

23. El $^{16}_{8}O$ tiene una masa atómica de 15’99491 u.m.a Determinad su energía de enlace y su energía de enlace por nucleón en MeV. Datos: masa del protón 1’00783 u.m.a; masa del neutrón 1’00867 u.m.a; masa del electrón 0’00055 u.m.a.

La energía de enlace de un núcleo, viene dada por:

$$E_b = (m_{\text{nucleones}} - m_{\text{núcleo}})\cdot c^2$$

En ocasiones, por comodidad, se da como dato la masa total del átomo y no la del núcleo

¿Cómo podremos calcular en ese caso la energía de enlace?

Naturalmente, deberemos considerar la masa de los electrones y la masa total del átomo de modo que:

$$E_b = \left[\left(\sum m_p + \sum m_n + \sum m_e\right) - m_{at}\right]\cdot c^2$$

Para calcular el valor de E_b, hemos de hallar en primer lugar el defecto de masa producido (en kg) y luego aplicar la expresión anterior.

$\left(\sum m_p + \sum m_n + \sum m_e\right) - m_{at}$ = (8·1'00783+8·1'00867+8·0'00055) -15'99491= 0'14149 u.m.a

Dado que 1u.m.a = $1'660\cdot 10^{-27}$ kg (ved ejercicio 22), el defecto de masa producido en este caso será: $\Delta m = 0'14149\cdot 1'660\cdot 10^{-27} = 0'23487\cdot 10^{-27}$ kg.

Y sustituyendo en la expresión de la energía de enlace:

$E_b = \left[\left(\sum m_p + \sum m_n + \sum m_e\right) - m_{at}\right]\cdot c^2 = 0'23487\cdot 10^{-27} \cdot (2'998\cdot 10^{8})^2 = 2'111\cdot 10^{-11}$ J =

$\left(\dfrac{2'111\cdot 10^{-11}}{1'602\cdot 10^{-19}}\right)\cdot 10^{-6}$ = 131'77 MeV

También podríamos haber obtenido la energía de enlace de una forma más rápida, aplicando directamente la relación entre un defecto de masa de 1 u.m.a y la variación de energía asociada al mismo en MeV (931'3 MeV), con lo que basta con realizar una multiplicación:

E_b = 14149·931'3 = 131'77 MeV

Para obtener la energía de enlace por nucleón hemos de dividir dicha energía entre el número de nucleones que conforman el núcleo o número másico (A), de modo que:

E_b/A = 131'77/16 = 8'24 MeV/nucleón.

24. La masa del núcleo de $^{98}_{42}Mo$ es 97'88310 y las masas del protón y neutrón son respectivamente 1'00727 y 1'00867 (todas ellas en uma). Hallad la energía (en MeV) desprendida en la formación de un núcleo (Eb) a partir de sus nucleones aislados y en reposo.

Datos: una variación de masa de 1 uma equivale a una variación de energía de 931'5 MeV

sol: E_b = 845'58 MeV

25. Al bombardear núcleos de Li con protones, se forman dos partículas α. Calcúlese la energía cinética en MeV de esas partículas. Datos (en u.m.a): masa del protón 1'00783, masa del Li 7'01601, masa del He 4'00260.

La ecuación correspondiente al proceso nuclear del que nos hablan será: ${}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow 2\ {}^{4}_{2}\mathrm{He}$

En este proceso se produce una variación de la masa que nos permitirá conocer la variación de la energía cinética mediante la expresión ya manejada anteriormente:

$$\Delta Ec = (m_r - m_p)\cdot c^2$$

En este caso:

$m_r - m_p = (m_{Li} + m_H) - 2\ m_{He} = (7'01601 + 1'00783) - 2 \cdot 4'00260 = 0'01864$ u.m.a

La variación de energía cinética producida se podrá calcular sustituyendo en la expresión anterior correspondiente a la variación de energía cinética utilizando unidades internacionales (teniendo en cuenta que 1 uma = $1'6605\cdot10^{-27}$ kg y $c = 3\cdot10^8$ m/s) .

Otra posibilidad es que, como ya hemos calculado la variación de energía correspondiente a un cambio de masa igual a 1 uma (931'5 MeV), podemos hacer directamente:

$$\Delta Ec = 0'01864 \cdot 931'5 = 17'363 \text{ MeV}$$

Si suponemos que la energía cinética de los reactivos es despreciable y que los productos de la reacción solo son las dos partículas α que se forman, toda la energía anterior estará asociada al movimiento de esas dos partículas.

La energía anterior en julios es de solo $2'8 \cdot 10^{-12}$ J, un valor muy pequeño, lo que plantea una duda importante: ¿A qué se debe entonces que se atribuya a las reacciones nucleares una gran capacidad de "obtención" de energía útil?

El interés de las reacciones nucleares como proceso para obtener energía útil radica en que si bien la energía anterior es muy pequeña, hay que tener en cuenta que corresponde a la desintegración de un solo átomo de Litio. Podemos plantearnos:

¿Qué energía se obtendría si se desintegrasen 10 moles (o 70 g) de ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$?

En solo 70 g del isótopo ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$ hay más de $6\cdot10^{24}$ núcleos. Cuando se desintegre este número de núcleos por bombardeo con protones se liberará una energía de:

$\Delta Ec = 2'8 \cdot 10^{-12} \cdot 6'02\cdot10^{24} = 1'68\cdot10^{13}$ J

en forma de energía cinética de las partículas α . Podemos darnos cuenta de la **enorme** cantidad de energía que ello significa si pensamos que para obtener la misma energía quemando carbón se necesitarían más de 500000 kg.

Aunque este tipo de procesos eran conocidos desde 1930 lo cierto es que no se han utilizado para obtener energía ya que era mayor la energía que se precisaba para conseguir que se produjera el proceso que la que se obtenía a partir del mismo. Así en el ejemplo analizado, para romper un solo núcleo de Li había que bombardear la muestra con más de 1 billón de protones (que previamente es necesario acelerar empleando una energía), por lo que en conjunto se tenía que gastar más energía que la que se producía.

26. ¿Cómo se explica que en un núcleo puedan permanecer a tan pequeñísima distancia muchos protones, siendo que por tener todos ellos carga positiva se repelen?

En la naturaleza existen varios tipos de interacciones. Habitualmente se habla de interacción gravitatoria, electromagnética, nuclear fuerte y nuclear débil. (En la actualidad la interacción electromagnética y la nuclear débil se han unificado en una sola llamada electrodébil). Las interacciones gravitatoria y electromagnéticas se conocen desde hace mucho tiempo y han podido ser formuladas matemáticamente. Sin embargo, la existencia de la interacción nuclear no se planteó hasta ya iniciado el siglo XX cuando al investigar la estructura de los átomos se comprobó que en su núcleo coexistían protones a pequeñísimas distancias. Dado que los protones tienen todos la misma carga eléctrica (positiva) no se entendía cómo era posible que a pesar de la intensa fuerza de repulsión electrostática entre ellos (muchísimo mayor que su atracción gravitatoria) pudiesen permanece juntos en un espacio tan inmensamente pequeño. Esto sugería la existencia de otro tipo de interacción que proporcionase estabilidad a los núcleos atómicos.

En la actualidad sabemos que esa interacción existe (**nuclear fuerte**), aunque todavía no se ha podido describir matemáticamente, de modo que no es posible explicar todas las propiedades del núcleo mediante la interacción nuclear. Entre los conocimientos que se tienen sobre la interacción nuclear fuerte conviene destacar los siguientes:

-Son fuerzas atractivas mucho más intensas que las electromagnéticas pero de un alcance muchísimo menor de tal modo que para distancias superiores a 1 Fermi (10^{-15} m) son prácticamente despreciables.

-Son independientes de la carga del nucleón, por lo que se manifiestan igualmente entre protones que entre neutrones o que entre protones y neutrones.

-Solo se dan entre los miembros de una familia de partículas denominadas hadrones (protones, neutrones, mesones, etc.).

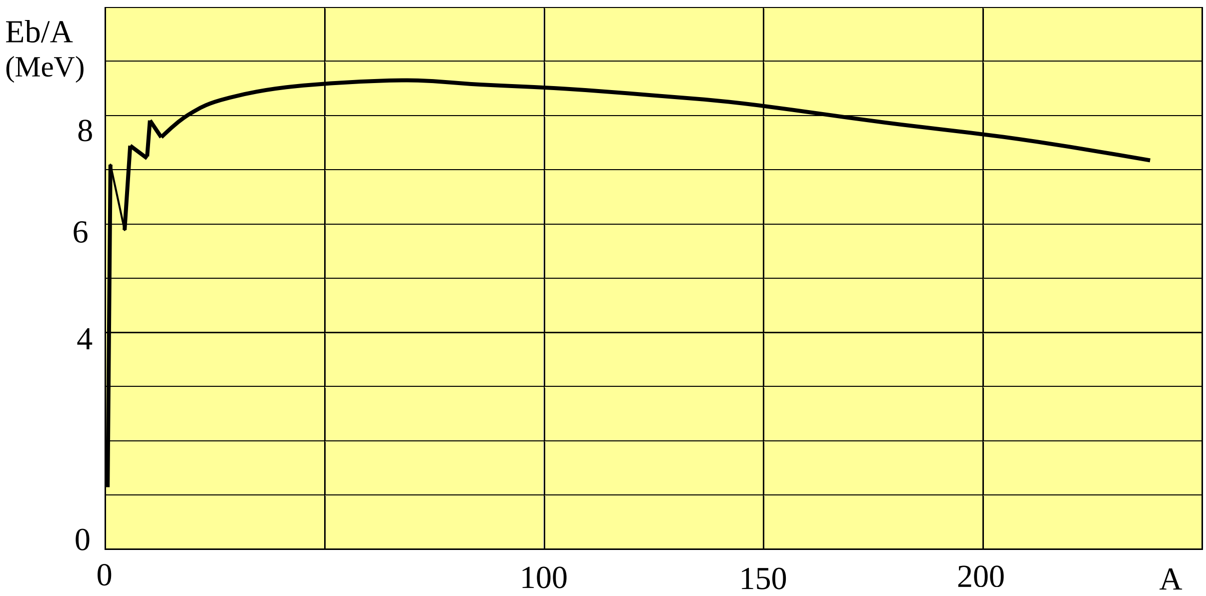
Teniendo en cuenta la existencia y características de la interacción nuclear fuerte, resulta inmediato comprender la estabilidad de los núcleos. No obstante, se presentan algunas anomalías, como el hecho de que cuando un núcleo tiene un número de neutrones demasiado grande o demasiado pequeño respecto al número de protones, la fuerza nuclear se debilita y esos núcleos resultan más inestables (se produce su desintegración dándose transformaciones radiactivas).

27. Una bomba atómica que contiene 20 kg de plutonio explota. La masa de los productos de la reacción es inferior en una diezmilésima al valor de la masa inicial. ¿Qué cantidad de energía se libera en la explosión?

sol: $1'8 \cdot 10^{14}$ julios.

28. Suponed que la fisión del ^{235}U ocurre según: $^{235}U + n \rightarrow {}^{137}Te + {}^{97}Zr + 2\,n$ y que pasamos de energías de enlace por nucleón en el ^{235}U de 7'6 MeV a energías del orden de 8'6 MeV para los núcleos del ^{137}Te y del ^{97}Zr resultantes. Calculad la energía total liberada en la fisión del núcleo del ^{235}U.

Si representamos gráficamente la energía de enlace por nucleón de los distintos núclidos conocidos, en función del número de nucleones, se obtiene aproximadamente la función de la figura adjunta. En ella se aprecia que hasta 20 nucleones la energía de enlace por nucleón va aumentando muy rápidamente con el número de nucleones y que entre 40 y 100 nucleones presenta su máximo (unos 8'6 MeV) para, a continuación decrecer lentamente.



El cambio de energía que se produce en una reacción nuclear, viene dado por:

$$\Delta Ec = Ec_p - Ec_r = (m_r - m_p)\cdot c^2 \quad (1)$$

De acuerdo con dicha ecuación, siempre que $m_r > m_p$ podremos obtener energía.

No obstante, el cambio energético en una reacción nuclear también puede ser expresado en función de las energías de enlace de reaccionantes y productos.

Sabemos que la energía de enlace viene dada por $E_b = (m_{\text{nucleones}} - m_{\text{núcleo}})\cdot c^2$.

Podemos hacer que en la ecuación $\Delta Ec = (m_r - m_p)\cdot c^2$ aparezca la energía de enlace si la escribimos como:

$\Delta Ec = (m_r - m_p + m_{\text{nucleones}} - m_{\text{nucleones}})\cdot c^2 \rightarrow \Delta Ec = (m_{\text{nucleones}} - m_p)\cdot c^2 - (m_{\text{nucleones}} - m_r)\cdot c^2$

Así pues:

$$\Delta Ec = E_{bp} - E_{br} \quad (2)$$

El resultado anterior permite comprender que en una reacción nuclear cuando la energía de enlace por nucleón de los productos sea mayor que la de los reactivos, se trate de una reacción exotérmica en la que se producirá un desprendimiento de energía. Siguiendo con este razonamiento, la gráfica anterior nos sugiere dos procedimientos posibles para obtener energía utilizable *¿Cuáles podrían ser?*

Puede pensarse en fraccionar núcleos muy pesados (bombardeándolos con partículas ligeras) en otros más ligeros cuya energía de enlace por nucleón sea mayor, o por el contrario, en unir núcleos ligeros para formar otros medios de mayor energía de enlace por nucleón. En la práctica se han conseguido llevar a cabo ambos procesos y se les ha denominado, respectivamente, **fisión** y **fusión** nuclear.

La fisión se ha conseguido bombardeando núcleos muy pesados con neutrones térmicos (poco energéticos). Este proceso presenta el inconveniente de que los productos de la reacción (residuos) son también radiactivos y pueden estar emitiendo radiaciones nocivas para los seres vivos durante mucho tiempo, sin que se conozca la forma de evitarlo, por lo que se recurre a encerrarlos en envolturas de hormigón y depositarlos en minas o en fosas oceánicas, con el grave peligro que ello implica. Se trata, por tanto de una forma muy discutible de obtener energía.

La fusión requiere elevadísimas temperaturas para producirse (hay que acercar núcleos ligeros a una distancia cortísima, venciendo la repulsión eléctrica, para que actúen las fuerzas nucleares atractivas y se pueda producir la fusión), pero presenta la ventaja de que sus productos no son radiactivos y que los reactivos (al contrario que en la fisión) son abundantes y baratos. Este tipo de reacción nuclear es el que se produce en las estrellas. La energía que se obtiene es superior a la que se produce mediante la fisión y, lo que es más importante, más limpia, aunque todavía no se disponen de los medios técnicos necesarios para llevar a cabo el proceso de forma industrial.

En el ejercicio se pide la energía utilizable que se obtendrá en la fisión de un núcleo de ^{235}U mediante la reacción:

$$^{235}U + {}^1_0n \rightarrow {}^{137}Te + {}^{97}Zr + 2\,{}^1_0n$$

Para evaluar dicha energía, según hemos explicado bastará con restar a la energía de enlace de los productos la energía de enlace de los reactivos, de modo que:

$\Delta Ec = E_{bp} - E_{br} = (137+97)\cdot 8'6 - 235\cdot 7'6 = 2012'4 - 1786 = 226'4$ MeV

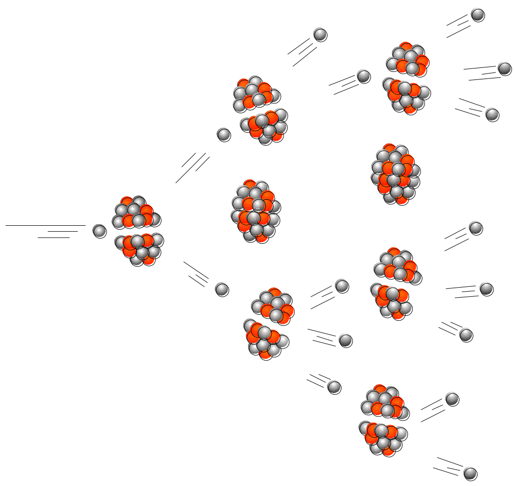
29. Teniendo en cuenta los resultados de la actividad anterior, calculad la energía liberada por 1 kg de ^{235}U al fisionarse y las toneladas de carbón que se necesitan para liberar la misma energía (1 kg de carbón de hulla proporciona al quemarse 8000 kcal).

sol: $9'6 \cdot 10^{13}$ J y 2875 t respectivamente.

30. Determinad la masa en kg de ^{235}U que se ha de fisionar para obtener una bomba de 1 Mt (10^6 toneladas de trilita) sabiendo que 1 Mt (megatón) equivale a $5\cdot 10^{18}$ J.

Si sobre una muestra de ^{235}U se lanzan neutrones térmicos, se iniciará el proceso de fisión según el cual el núcleo se dividirá en dos y los neutrones que se producen en estas primeras fisiones (tres por término medio en cada una) provocarán a su vez nuevas fisiones dando lugar a lo que se denomina una "fisión en cadena" en la que se desprende una gran cantidad de energía.

No todos los neutrones que se liberan en la fisión de cada núcleo, inciden en otros núcleos (se trata de partículas sumamente pequeñas y muchas pueden pasar entre los núcleos sin producirse ningún impacto), por lo que siempre se producirá una pérdida de neutrones que será tanto menor cuanto mayor sea el tamaño de la muestra (más núcleos haya en el camino que recorran los neutrones). De hecho, existe un tamaño para el cual el número de neutrones que se pierden por la superficie es igual al de los neutrones que se producen, lo que permitirá que el proceso se automantenga. Se le llama tamaño o masa crítica. Si la masa es superior se produce el proceso en cadena, si es inferior se detiene.



En las centrales nucleares, se produce una reacción nuclear de fisión en el reactor. Dicha reacción se controla mediante unas barras de un material que absorbe neutrones, haciendo que la energía que se desprende no sea excesiva y se pueda extraer para su utilización. Por el contrario, en una bomba atómica, se busca un desprendimiento de energía lo más brusco posible. Una forma de conseguirlo es utilizar dos masas de material fisionable inferiores el valor crítico, pero que juntas lo superen, de forma que cuando se juntan (en el momento del impacto) se desarrolle una reacción en cadena totalmente descontrolada, produciéndose un brusco desprendimiento de una cantidad de energía enorme que provocará una onda térmica y de presión. Conviene tener en cuenta también que tanto en las centrales nucleares como en las bombas atómicas se producen grandes cantidades de residuos radiactivos que estarán activos durante mucho tiempo y que se dispersan en grandes extensiones (con efectos muy nocivos sobre los seres vivos por las radiaciones que emiten) siendo la eliminación de estos uno de los problemas más graves que tiene planteados la humanidad.

En el ejercicio se pide qué masa de ^{235}U hay que fisionar para obtener una bomba cuyos efectos destructores inmediatos (después son todavía peores: alteraciones genéticas, malformaciones, cánceres y contaminación radiactiva en grandes áreas, durante muchos años), sean equivalentes a los de la explosión de 1000 millones de kg de trilita ($5\cdot10^{18}$ J).

Como en el ejercicio 28 hemos obtenido que con un núcleo de ^{235}U se obtienen 226'4 MeV, será sencillo *determinar el número de átomos necesarios para obtener $5\cdot10^{18}$ J.*

$\Delta Ec_T = N\cdot\Delta Ec_{atom} \rightarrow 5\cdot10^{18} = N\cdot226'4\cdot10^{6}\cdot1'6\cdot10^{-19} \rightarrow N = 1'3803\cdot10^{29}$ átomos y para conocer su masa, bastará multiplicar los moles de átomos por la masa molar M:

$$m = \frac{N}{N_A}\cdot M = \frac{1'3803\cdot10^{29}}{6'02\cdot10^{23}}\cdot235\cdot10^{-3} = 53'882 \text{ kg}$$

31. Calculad la energía liberada en la formación de un núcleo de ^{4}He a partir de dos núcleos de deuterio. ¿Qué energía se liberará al formarse por fusión 1 g de ^{4}He a partir de deuterio? (E_b/A = 1 MeV para el ^{2}H y E_b/A = 7 MeV para el ^{4}He). La masa de un núcleo de deuterio es 2'01355 uma y la de un núcleo de helio es de 4'00150 uma. (Una variación de masa de 1 uma supone una variación de energía de 931'5 MeV).

El proceso que tendrá lugar es: ${}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He$

y la variación de energía que se producirá será:

$$\Delta Ec = \Delta m\cdot c^2 = (2m_H - m_{He})\cdot c^2 = 0'0256\cdot c^2$$

y si consideramos que una variación de masa de 1 u. supone un cambio de energía de 931'5 MeV, podemos escribir:

$$\Delta Ec = \Delta m\cdot931'5 = 0'0256\cdot931'5 = 23'8 \text{ MeV}$$

Otra forma de resolver el ejercicio hubiera sido a partir de los datos de energía de enlace por nucleón en el deuterio (1 MeV) y en el Helio (7 MeV). *¿Cómo se procedería en ese caso?*

Bastaría con restar la energía de enlace de los reactivos de la reacción, de la energía de enlace de los productos, es decir:

$\Delta Ec = E_{b_p} - E_{b_r} = 4\cdot7 - 4\cdot1 = 24$ MeV (el resultado no coincide totalmente con el anterior porque los valores de las energías de enlace por nucleón utilizados son aproximados).

¿Cuál sería la variación de energía producida al obtener, mediante la reacción anterior, una masa de 1 g de Helio?

Para realizar el cálculo que se pide será necesario conocer el número N de núcleos de ${}^{4}_{2}He$ que hay en un gramo de dicha sustancia y luego multiplicar N por el valor de la variación de energía correspondiente a la formación de uno de dichos núclidos, es decir:

$\Delta E'_c = N \cdot \Delta E_c$ y como $N = n \cdot N_A = (m/M) \cdot N_A$ nos queda que:

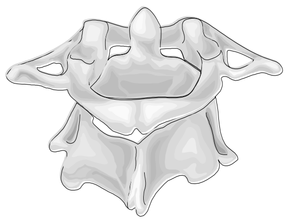
$\Delta E'_c = (m/M) \cdot N_A \cdot \Delta E_c = (1/4) \cdot 6'02 \cdot 10^{23} \cdot 23'8 = 3'6 \cdot 10^{24}$ MeV $= 5'7 \cdot 10^{11}$ J

Este incremento de energía cinética (útil) proviene de la transformación de parte de la energía asociada a la masa que poseen los reaccionantes en energía cinética de los trillones de núcleos de helio y fotones γ generados por la fusión de los mismos. Conviene darse cuenta de la enorme cantidad de energía directamente aprovechable que se produce al formarse sólo 1 g de helio (más de medio billón de julios) equivalente a la que se obtendría al quemar unas 17 toneladas de carbón de hulla.

32. Comparad la energía obtenida en la fisión de 1 g de ^{235}U con la obtenida en la fusión de ^{2}H y ^{3}H para formar 1 g de ^{4}He según el proceso: $^{2}H + ^{3}H \rightarrow ^{4}He + n + 17'6$ MeV

sol: $9'6 \cdot 10^{10}$ J y $4'2 \cdot 10^{11}$ J (Se obtiene una energía 4 veces superior en la fusión).

33. En un hueso procedente de un animal que acaba de morir, la velocidad de desintegración del ${}^{14}_{6}C$ es de 15d/min por cada gramo de este núclido. Por otra parte, sabemos que el periodo de semidesintegración del ${}^{14}_{6}C$ es de 5730 años. Teniendo en cuenta estos datos, determinad la antigüedad de un hueso que contiene 250 g de ${}^{14}_{6}C$ si su velocidad de desintegración es de 400 de/min.



Como sabemos, las plantas verdes absorben el CO_2 del aire mediante el proceso de la fotosíntesis. Los átomos de C de este compuesto son fundamentalmente de ${}^{12}_{6}C$ pero una pequeñísima parte (aproximadamente uno por cada billón) son de ${}^{14}_{6}C$ que es radiactivo y se desintegra.

La cantidad de ${}^{14}_{6}C$ en la atmósfera se mantiene estable, pese a que éste se va desintegrando, porque los neutrones de la radiación cósmica al colisionar con los núcleos de los átomos de nitrógeno presentes en la atmósfera hacen que se genere ${}^{14}_{6}C$ según el proceso:

$${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}H$$

compensando así la desintegración del carbono (14). Esto hace que la proporción de este isótopo en los seres vivos (plantas y animales que las ingieren) se mantenga constante. Sin embargo cuando un ser vivo muere deja de reponer ${}^{14}_{6}C$, por lo que la proporción de este núclido en sus restos va disminuyendo con el tiempo (al ir desintegrándose con un periodo de 5370 años) y, en consecuencia, también lo hará su actividad.

¿Cómo es posible utilizar estos datos para conocer la antigüedad de un fósil?

Sabemos que la actividad de una muestra radiactiva viene dada por la expresión:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Si tomamos como instante inicial 0 s el correspondiente a cuando el organismo murió y conocemos su actividad A_0 en ese instante, podemos utilizar la ecuación anterior para, conocida su actividad presente poder calcular el tiempo transcurrido desde entonces.

En efecto, tomando logaritmos neperianos y despejando t obtenemos:

$$\ln A/A_0 = -\lambda \cdot t \rightarrow \quad t = \frac{\ln \frac{A_0}{A}}{\lambda}$$

En este ejercicio el hueso presenta una actividad A = 400 d/min. En el momento de morir el ser al cual pertenecía dicho hueso, su actividad debía ser:

$A_0 = 200 \cdot 15 = 3000$ d/min.

Este primer resultado nos muestra que el hueso debe tener más de 5730 años (tiempo que ha de transcurrir para que el número de núclidos de ^{14}C (y por tanto su actividad) se reduzca a la mitad.

Por otra parte $\lambda = 0'693/T = 0'693/5730 = 1'2094 \cdot 10^{-4}$ años^{-1}

Sustituyendo en la expresión de t anterior obtenemos así la antigüedad del hueso:

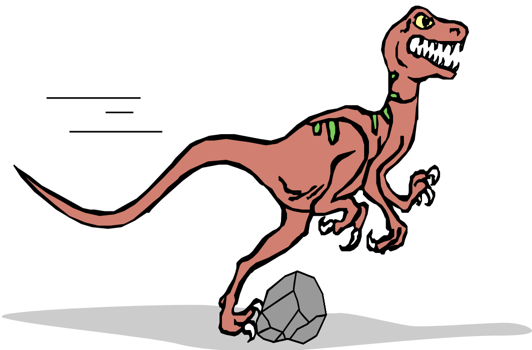
$$t = \frac{\ln \frac{A_0}{A}}{\lambda} = \frac{\ln \frac{3000}{400}}{1'2905 \cdot 10^{-4}} = \frac{\ln 7'5}{1'2905 \cdot 10^{-4}} = 16660 \text{ años}$$

Conviene tener en cuenta que la determinación de la antigüedad con éste método sólo es factible para muestras orgánicas (huesos, tejidos, restos de plantas, etc.) de menos de unos 50000 años. Ello se debe a que la cantidad de ^{14}C presente en muestras anteriores a ese tiempo es demasiado pequeña como para poder hacer medidas aceptablemente precisas.

Para objetos más antiguos, en ocasiones se recurre a otros radioisótopos que tengan un periodo de semidesintegración mucho mayor. Éste es el caso, por ejemplo, del ^{238}U (cuyo periodo es T = 4510 millones de años). Podemos pensar en la formación de una roca hace millones de años a base de la solidificación de un material fundido en el que había presente una cierta cantidad del radioisótopo anterior. Éste es muy pesado y queda fijado a la roca para lentamente ir produciendo una serie de desintegraciones hasta llegar al isótopo estable del plomo Pb-206. Hallando la razón existente entre el Pb-206 y el U-238 los científicos pueden determinar aproximadamente los años que hace desde que la solidificación tuvo lugar (instante t = 0). El U-238 antes de la solidificación también producía Pb-206 pero éste (más ligero que el U-238) se escapó del magma hirviente de modo que sólo comienza a fijarse en la roca a partir de que ésta solidifica.

De esta forma se ha podido determinar que la edad de las rocas más antiguas de la Tierra es del orden de 4000 millones de años. También se ha podido comprobar que la edad de las rocas más antiguas que contienen fósiles procedentes de mamíferos es de unos 200 millones de años. Todo ello suministra información muy valiosa respecto a cuándo se formó la Tierra y cuando aparecieron determinadas especies de animales.

34. El $^{40}_{19}K$ radiactivo se desintegra transformándose en $^{40}_{18}Ar$ estable. El contenido en $^{40}_{19}K$ de ciertas rocas puede ser utilizado para averiguar la fecha de su formación (mientras el material estaba fundido todo el Ar que se producía por desintegración del $^{40}_{19}K$ se escapaba, pero en cuanto se solidificó dando lugar a la roca, el $^{40}_{18}Ar$ fue quedando retenido en ella).



Sabiendo que en una roca la proporción de Ar/K actualmente es de $5\cdot 10^{-3}$, determinad si es posible que un dinosaurio tropezase alguna vez con esa roca. (Considerad que los dinosaurios se extinguieron hace unos 60 millones de años).

Para resolver este ejercicio supondremos que en el momento de formarse la roca había N_0 átomos de ^{40}K y ninguno de Ar. Debido a la desintegración que sufre el potasio radiactivo, el número de núclidos de ^{40}K irá disminuyendo mientras que el de Ar irá aumentando ya que por cada átomo de ^{40}K que desaparezca se formará un átomo de Ar. La ley de desintegración que gobierna este proceso es:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

siendo N el número de átomos de potasio al cabo de un tiempo t.

¿Cómo podemos hallar el tiempo transcurrido desde que se formó la roca?
Si consideramos que en el momento de formarse la roca había N_0 átomos de ^{40}K y ninguno de Ar, al cabo de un cierto tiempo t, nos quedarán N átomos de ^{40}K y se habrán producido $N_0 - N$ átomos de Ar, de modo que la proporción será:

$\dfrac{N_0 - N}{N}$ que en la actualidad vale, según se dice en el enunciado: $5\cdot 10^{-3}$.

Para conocer el tiempo t necesario para que se de esta proporción podemos partir de las ecuaciones:

$$\frac{N_0 - N}{N} = 5\cdot 10^{-3}$$

$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$

De la segunda ecuación, tomando logaritmos neperianos obtenemos: $\ln\frac{N_0}{N} = \lambda \cdot t$

De donde $t = \frac{1}{\lambda}\cdot \ln\frac{N_0}{N}$.

Despejando ahora en la primera ecuación: $\frac{N_0}{N} = 1 + 5\cdot 10^{-3} = 1'005$

Sustituyendo en la expresión anterior: $t = \frac{1}{\lambda}\cdot \ln\frac{N_0}{N} = \frac{1}{\lambda}\cdot \ln 1'005$

El cálculo de la constante de desintegración λ es sencillo a partir del periodo de semidesintegración ya que, como sabemos, $\lambda = 0'693/T = 0'693/1'3\cdot 10^9 = 5'3\cdot 10^{-10}$ años^{-1} con lo que:

$$t = \frac{1}{\lambda}\cdot \ln\frac{N_0}{N} = t = \frac{1}{5'3\cdot 10^{-10}}\cdot \ln 1'005 = 9'356\cdot 10^{6} \text{ años}$$

Por tanto, ningún dinosaurio pudo tropezar nunca con la roca ya que esta se formó mucho después de que se extinguieran.

35. Una muestra de madera contiene 10 g de C y posee una velocidad de desintegración del ^{14}C de 100 cuentas/min. ¿Cuál es la edad de la muestra?

sol: 13307 años.

36. ¿Qué utilidad tiene el $^{60}_{27}Co$ en medicina nuclear?

El daño que las radiaciones producen en los seres vivos se debe a la ionización que provocan al atravesar las células en las sustancias que las constituyen, que hace que el funcionamiento normal de esas células se vea alterado. En general se pueden diferenciar dos casos:
a) La irradiación no es demasiado intensa: Las células afectadas seguirán viviendo aunque serán defectuosas y al reproducirse de forma anómala pueden provocar procesos cancerosos.

b) La irradiación es muy intensa: Las células irradiadas mueren. Esto, en sí mismo, puede no ser importante ya que el organismo tiene capacidad para reemplazarlas, aunque si la dosis afecta a un número demasiado elevado de células puede suceder que el organismo no pueda recuperarse y muera.

Los seres vivos estamos sometidos a radiaciones de diverso origen: cósmico, terrestre, algunas pruebas médicas, contaminación radiactiva procedente de reacciones nucleares artificiales (centrales, bombas, etc.) y si el nivel de radiación aumenta demasiado podemos padecer graves enfermedades (por ejemplo, cáncer de piel debido a las radiaciones solares). No obstante, algunas radiaciones se utilizan, precisamente, para combatir el cáncer. Para ello se recurre a irradiar las células cancerosas con radiación muy energética con el fin de destruirlas (el problema está, actualmente, en que también se destruyen otras sanas).

La radiación más utilizada con fines médicos por su poder de penetración es la radiación γ (muy energética). Para su obtención suele utilizarse como fuente el $^{60}_{27}\mathrm{Co}$ (que se produce fácilmente en los reactores nucleares según el proceso: $^{59}_{27}\mathrm{Co}+^{1}_{0}n\rightarrow^{60}_{27}\mathrm{Co}$). Este núclido es radiactivo y se descompone según:

$$^{60}_{27}\mathrm{Co}\rightarrow^{60}_{28}\mathrm{Ni}+^{0}_{-1}\mathrm{e}+\gamma$$

emitiendo cada núcleo un fotón γ , de gran poder de penetración, y un electrón.

37. Una muestra de 100 g de radio $^{276}_{88}\mathrm{Ra}$ produce al cabo de 1 día 1'08·10^{-2} cm^3 de helio (medido en condiciones normales de presión y temperatura). Determinad el valor del número de Avogadro N_A, sabiendo que 1 g de $^{276}_{88}\mathrm{Ra}$ emite 3'4·10^{10} partículas α cada segundo.

El proceso vendrá descrito por la ecuación:

$$^{226}_{88}\mathrm{Ra}\rightarrow\ ^{222}_{86}\mathrm{Rn}+\ ^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Como conocemos el volumen de helio obtenido en condiciones normales, podemos saber fácilmente el número de moles de núcleos de He producidos en 1 día.

Sabemos que el número de Avogadro N_A será el número de núcleos de He presentes en una mol de dicha sustancia. Por tanto $N = n \cdot N_A$ siendo n el número de moles de núcleos y N el total de núcleos.

¿Cómo podemos obtener N_A*?*

De la relación anterior está claro que $N_A = N/n$ de modo que lo que hay que hacer es *determinar N y n.*

Como 1 mol de cualquier gas, en condiciones normales, ocupa un volumen de 22'4 l, el número de moles n de núcleos de He que se producirán al día será:

$$n = \frac{V(l)}{22'4(l \cdot mol^{-1})} = 1'08\cdot10^{-5}/22'4 = 4'82\cdot10^{-7} \text{ moles de } {}^{4}_{2}He$$

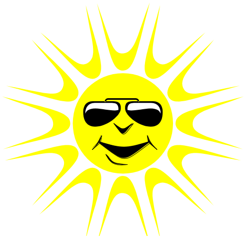
Por otra parte, como en el enunciado nos dicen que 1 g de Ra emite $3'4\cdot10^{10}$ partículas α cada segundo, en un día (86400 s) 100 g emitirán:

$N = 100\cdot3'4\cdot10^{10} \cdot 86400 = 2'938\cdot10^{17}$ partículas α (núcleos de He).

Sustituyendo en la expresión de N_A obtenemos:

$N_A = N/n = 2'938\cdot10^{17}/4'82\cdot10^{-7} = 6'09\cdot10^{23}$ partículas/mol

38. El Sol radia energía con una potencia aproximada de $4\cdot10^{26}$ W. Admitiendo que el proceso se debe a la conversión de 4 protones en Helio según el siguiente proceso:



$$4\,{}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + 2\,{}^{0}_{-1}e + 26'7MeV$$

¿Cuánto tiempo tardaría el Sol en agotarse si continuara radiando a ese ritmo? (Admitid que los protones constituyen la mitad de la masa del Sol y que ésta vale aproximadamente $2\cdot10^{30}$ kg).

La potencia nos proporciona el valor de la energía emitida por el Sol cada unidad de tiempo. Si suponemos que la potencia se mantiene siempre constante, podemos calcular su valor como $P = \Delta E/\Delta t$ de modo para saber en cuanto tiempo se emitirá una cierta cantidad de energía, bastará despejar el tiempo de la ecuación anterior: $\Delta t = \Delta E/P$.

¿Cómo podemos saber el tiempo en que tardaría el Sol en dejar de irradiar de acuerdo con las condiciones expuestas en el enunciado?

Si conocemos la masa de hidrógeno existente en el Sol (10^{30} kg) podemos calcular el número de núcleos de hidrógeno existentes y a partir de este obtener la energía total que podrá emitir, correspondiente a las reacciones de fusión de todos esos núcleos de hidrógeno (especificada en el enunciado). Una vez que tengamos este dato, bastará dividir por la potencia, para tener el tiempo que se pide.

En efecto: El número de núclidos ${}^{1}_{1}H$ será:

$$N = n\cdot N_A = \frac{m}{M}\cdot N_A$$

en donde, como es habitual, n serán los moles de H, M su masa molar y N_A el número de Avogadro.

La energía total que se podría liberar sería por tanto: $E_T = \frac{N}{4} \cdot E$

En la ecuación anterior E es la energía de una de las reacciones de fusión (26’7 MeV) y N se divide por 4 porque en cada reacción participan 4 núcleos de H.

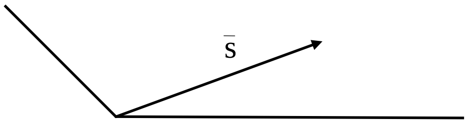
Sustituyendo en la expresión $\Delta t = E_T/P$ obtenemos que:

$$\Delta t = \frac{\frac{m}{M} \cdot N_A \cdot E}{4 \cdot P} = \frac{\frac{10^{30} \cdot 10^{3}}{1} \cdot 6'02 \cdot 10^{23} \cdot 26'7 \cdot 10^{6} \cdot 1'6 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 4 \cdot 10^{26}} = 1'6 \cdot 10^{17} \text{ s} = 5'1 \cdot 10^{9} \text{ años}$$

Así pues, de acuerdo con los cálculos anteriores al Sol le quedarían todavía unos 5000 millones de años de vida.

ANEXO: VECTORES

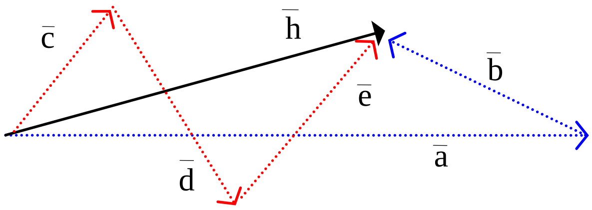
1. Determinad gráficamente los vectores componentes de $\vec{s}$, según las direcciones de la figura:



Se entiende por vectores componentes de un vector dado, el conjunto de vectores cuya suma da como resultado dicho vector. De acuerdo con esto, un vector cualquiera admitirá ser expresado como suma de otros vectores, de infinitas formas distintas. Así, por ejemplo, el vector $\vec{h}$ de la figura adjunta, se puede expresar como:

$\vec{h} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{h} = \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$



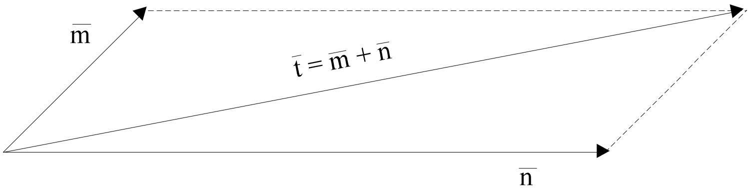
y de tantas otras formas como queramos imaginar, con la única condición de que la suma de los vectores seleccionados de $\vec{h}$.

¿Quiere esto decir que, en el caso que se plantea en este ejercicio, el vector $\vec{s}$ puede ser descompuesto en infinitas formas distintas?

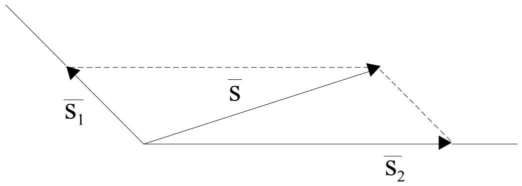
Digamos, en principio, que si, pero démonos cuenta que en el enunciado se añaden condiciones que, sin duda, restringen estas posibilidades. En efecto, como nos señalan dos direcciones, ello nos limita a que sean dos vectores cuyas direcciones están predeterminadas, de modo que, como podrá comprenderse, sólo habrá una forma posible.

¿Cómo determinar los dos vectores?

Podemos aplicar la regla del paralelogramo que consiste en colocar los dos vectores (sin cambiarlos) con origen común y trazar la diagonal del paralelogramo que forman:

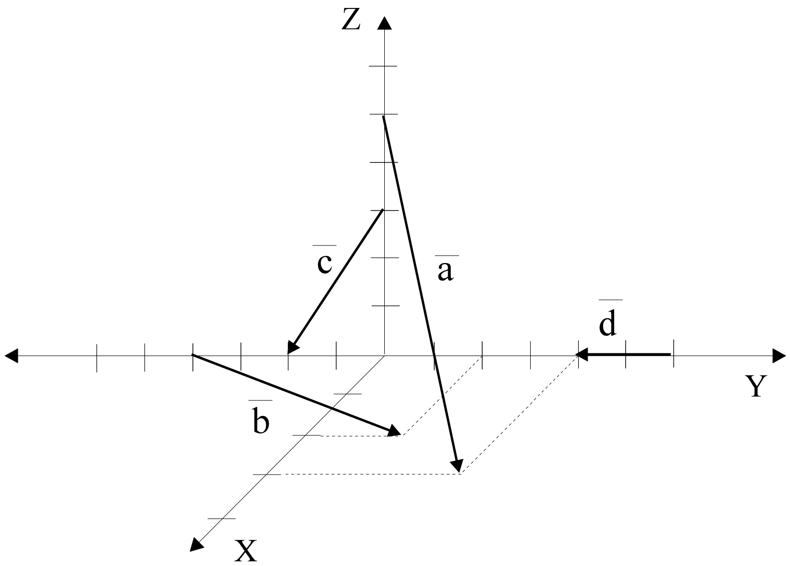


Como en nuestro caso conocemos ya el vector suma $\vec{s}$ y las direcciones de los vectores buscados, bastará trazar desde el extremo de $\vec{s}$ las paralelas a las direcciones que nos dan y buscar los puntos de corte con ellas, de esta forma tendremos definido el paralelogramo que determina los dos vectores $\vec{s}_1$ y $\vec{s}_2$ cuya suma es el vector $\vec{s}$ dado.



2. Determinad las componentes cartesianas de los vectores representados en la figura adjunta:

sol: a (3,4,-5); b (2, 6, 0);
c (0, -2, -3); d (0,-2,0).



3. En el paralelogramo de la figura adjunta se conocen las coordenadas de los vértices: A (-1,3,2) m; B (2,-1,5) m y C (0,-3,-4) m. Determinad las coordenadas del vértice D.

Éste es un ejemplo de ejercicio de aplicación del álgebra vectorial a la resolución de un problema que, en principio, nada tiene que ver con vectores.

Para obtener las coordenadas del vértice D, podemos considerar la pareja de vectores **AB** y **CD** que se caracterizan por tener igual módulo, dirección y sentido, es decir: **AB** = **CD**. Esto hace que ambos vectores tengan las mismas componentes escalares. Por otra parte, las componentes escalares de cualquier vector pueden obtenerse restando a las coordenadas de su extremo las de su origen, por lo que realizando esta operación con los vectores **AB** y **CD** e igualando, podremos determinar las coordenadas del vértice D.

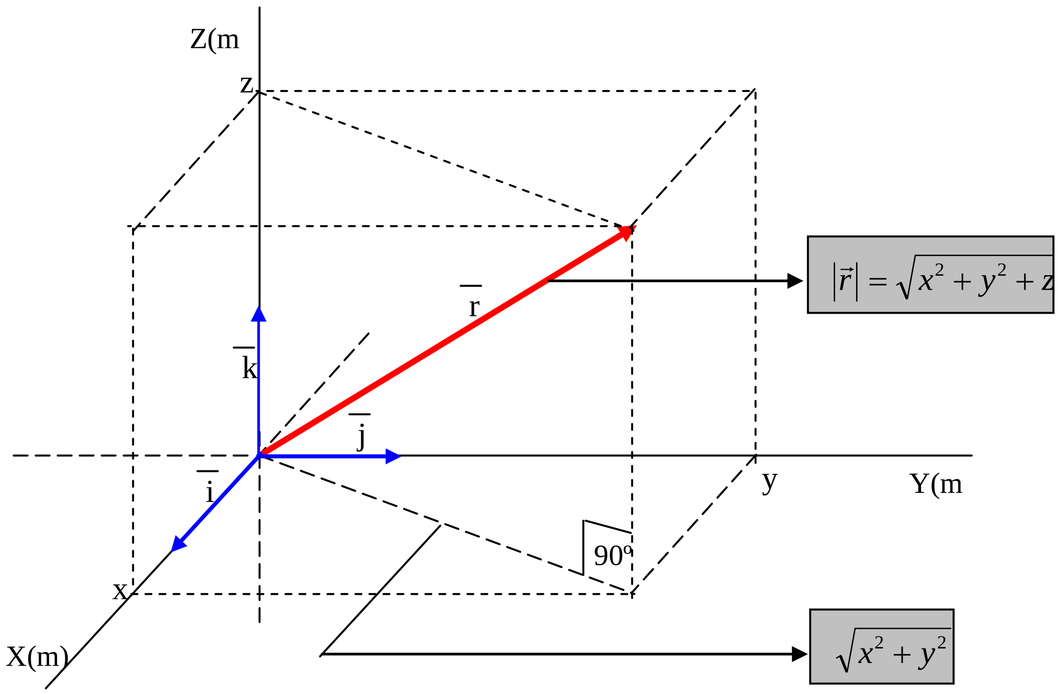
CD = (Dx-Cx) $\vec{i}$ + (Dy-Cy) $\vec{j}$ + (Dz-Cz) $\vec{k}$; **AB** = (Bx-Ax) $\vec{i}$ + (By-Ay) $\vec{j}$ + (Bz-Az) $\vec{k}$, como **CD** = **AB**, las componentes escalares han de ser las mismas, por lo que podemos igualarlas y despejar:

Dx - Cx = Bx - Ax → Dx = Bx - Ax + Cx = 2 + 1 = 3 m
Dy - Cy = By - Ay → Dy = By - Ay + Cy = -1 - 3 - 3 = -7 m
Dz - Cz = Bz - Az → Dz = Bz - Az + Cz = 5 -2 - 4 = -1m

Por tanto, las coordenadas del punto D son (3, -7, -1) m.

4. ¿Cómo podemos hallar los ángulos directores (ángulos que un vector forma con cada uno de los ejes) cuando expresamos un vector en sus componentes cartesianas?

Pensemos, por ejemplo, en la posición de un objeto que se desplaza por el espacio. En ese caso podemos localizarlo mediante un vector de posición $\vec{r}$ cuyas componentes escalares cartesianas van cambiando con el tiempo. La representación gráfica es la siguiente:



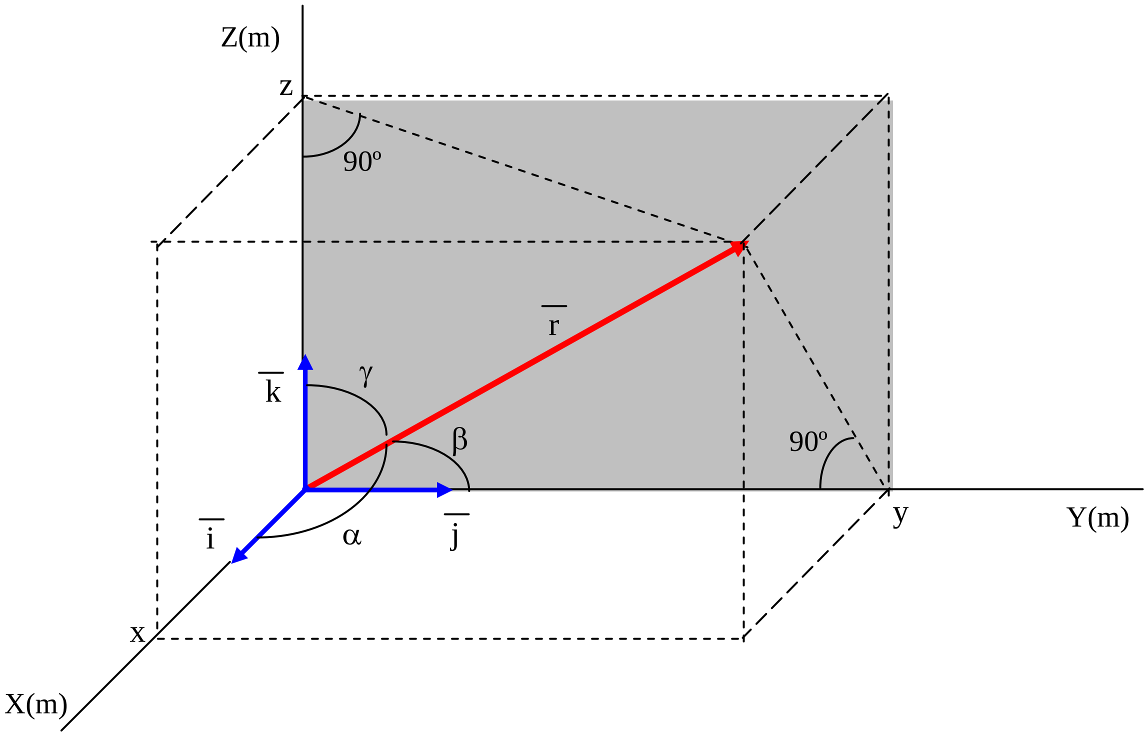
En la figura anterior se ha representado el vector de posición de un móvil en un instante dado, en los ejes de coordenadas cartesianas X, Y, Z. También se han representado los vectores unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Dichos vectores tienen de módulo 1, su origen coincide con el origen de coordenadas y siempre tienen la dirección de los ejes X. Y, Z respectivamente (y sentido positivo).

El análisis de la figura anterior permite comprender fácilmente (basta aplicar el teorema de Pitágoras) que $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Por otra parte, el vector $\vec{r}$ se puede expresar en función de sus componentes escalares cartesianas (que pueden ser positivas o negativas), simplemente como: $\vec{r}$ = (x , y , z).

También se puede expresar en función de sus vectores componentes como: $\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ o bien (lo que es equivalente) en función de los vectores unitarios como: $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ (siempre acompañado de la unidad utilizada).

En cuanto a la dirección del vector, ésta (al igual que ocurría cuando nos limitábamos a representar los vectores en el plano XY), se expresa mediante los **ángulos directores** (α, ß, γ). En la figura siguiente hemos representado tales ángulos:

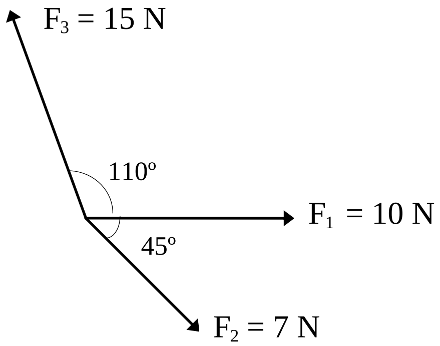


De la figura anterior queda claro que: $\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|}$; $\cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|}$; $\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|}$

O lo que es equivalente: $x = |\vec{r}|\cos\alpha$; $y = |\vec{r}|\cos\beta$; $z = |\vec{r}|\cos\gamma$

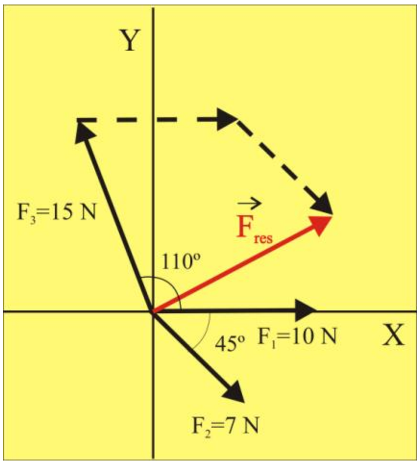
Naturalmente, todo lo que hemos dicho aquí respecto al vector de posición $\vec{r}$, es también válido para cualquier otro vector que se represente en los ejes cartesianos.

5. Calculad la fuerza resultante del conjunto de fuerzas coplanarias representadas en la figura adjunta.



En este problema, nos dan una serie de vectores expresados en módulo-dirección y nos piden que calculemos el vector suma $\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$. Una forma de hallar $\vec{F}_{res}$ sería sumar gráficamente los tres vectores, con lo que podríamos ver la dirección y sentido de $\vec{F}_{res}$. Después, para conocer el módulo de $\vec{F}_{res}$, bastaría medir la longitud del vector y compararla con la unidad utilizada al representar los vectores dados. Sin embargo, este procedimiento, no es muy exacto, ya que estaría afectado por la imprecisión con que hubiésemos dibujado los vectores y medido la longitud de los mismos.

Para superar el inconveniente anterior, deberemos sumar los vectores *analíticamente*. Para ello, es necesario expresar, previamente, los vectores en componentes. Si no nos dan, como será habitual, un sistema de coordenadas cartesianas al que podamos referirnos, será conveniente escoger uno tal que el cálculo de las componentes de los vectores sea lo más sencillo posible (lo que se puede lograr haciendo que sus ejes coincidan con el mayor número posible de vectores). Así en este caso podríamos hacer:



Ahora, fijándonos en los ángulos que cada vector forma con los semiejes positivos (ángulos directores), podemos expresar fácilmente cada uno de los tres vectores de forma analítica, en componentes cartesianas:

$$\vec{F}_1 = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j} + F_{1z}\vec{k} \;=\; F_1\cos 0º\,\vec{i} + F_1\cos 90º\,\vec{j} + F_1\cos 90º\,\vec{k}$$
$$\vec{F}_2 = F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j} + F_2\vec{k} \;=\; F_2\cos 45º\,\vec{i} + F_2\cos 135º\,\vec{j} + F_2\cos 90º\,\vec{k}$$
$$\vec{F}_3 = F_{3x}\vec{i} + F_{3y}\vec{j} + F_3\vec{k} \;=\; F_3\cos 110º\,\vec{i} + F_3\cos 20º\,\vec{j} + F_3\cos 90º\,\vec{k}$$

Sustituyendo y operando nos queda que:

$\vec{F}_1 = 10\vec{i}\ N$; $\vec{F}_2 = 4'95\,\vec{i} - 4'95\vec{j}\ \ N$; $\vec{F}_3 = -5'13\vec{i} + 14'10\vec{j}\ \ \mathrm{N}$

$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3\ =\ 9'82\vec{i} + 9'15\vec{j}\ \ N$

Conviene señalar que para expresar analíticamente el vector $\vec{F}_1$, en realidad, no nos hacía falta ningún cálculo ya que al encontrase sobre un eje, resulta inmediato conocer cuáles son sus componentes. Cuando esto no es así (como ocurre, por ejemplo, con los otros dos vectores) hay que determinar las componentes escalares haciendo uso de las funciones trigonométricas. A este respecto, hemos de resaltar que, aunque por encontrarnos en un plano sería posible haber trabajado con el seno y el coseno de un único ángulo, p.e. 45º en el caso de $\vec{F}_2$ y escribir: $\vec{F}_2 = F_2\cos 45^{\circ}\vec{i} - F_2\,\mathrm{sen}\,45\vec{j}$ N, éste procedimiento <u>no tendría utilidad en el espacio</u>, por lo que hemos optado por trabajar únicamente con la función coseno de cada ángulo que el vector forma con los semiejes positivos (**cosenos directores**). Éste procedimiento, además de su mayor generalidad, ofrece la importante ventaja de que al calcular las componentes escalares del vector, éstas se obtienen con el signo correspondiente. Finalmente, señalar que podríamos haber prescindido de calcular la tercera componente (F_z), ya que, al encontrase todos los vectores en el plano XOY dicha componente debe ser nula, y que aunque en este primer problema no lo hemos hecho para facilitar la comprensión del procedimiento general, sí lo haremos de aquí en adelante.

¿Cómo deberíamos proceder para expresar el vector resultante en módulo y dirección?

Para obtener el módulo basta aplicar la expresión: $F_{res} = \sqrt{F_{res\,\mathrm{x}}^2 + F_{res\,\mathrm{y}}^2}$, es decir:

$$F_{res} = \sqrt{9'82^2 + 9'15^2}\ = \sqrt{180'15} = 13'42\ \ N$$

En cuanto a la dirección y sentido, utilizaremos los cosenos directores (recordemos que α es el ángulo que forma el vector con el semieje Ox^+, β el que forma con el semieje Oy^+ y finalmente γ es el ángulo que forma con el semieje Oz^+ (en los tres casos yendo por el camino más corto).

$$\cos\alpha\ = \frac{\mathrm{F_{res\,x}}}{\mathrm{F_{res}}} = \frac{9'82}{13'42} = 0'73;\ \ \text{de donde } \alpha = \text{arc cos } 0'73 = 43^{\circ}$$

$$\cos\beta\ = \frac{F_{resy}}{F_{res}} = 0'68;\ \text{de donde } \beta\ = \text{arc cos } 0'68\ \ =\ 47^{\circ}$$

$$\cos\gamma\ = \frac{F_{resz}}{F_{res}} = 0;\ \text{de donde } \gamma\ = \text{arc cos } 0^{\circ}\ \ =\ 90^{\circ}$$

Así pues: La resultante de las tres fuerzas representadas viene expresada por medio del vector $\vec{F}_{res}$ = $9'82\vec{i} + 9'15\vec{j}\ \ N$, su módulo vale F_{res} = 13’42 N y se halla situado en el plano

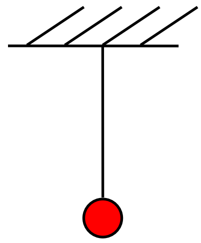
XOY, formando un ángulo α = 43º con Ox^+, de β = 47º con Oy^+ y de γ= 90º con Oz^+ (ángulos directores).

6. Dado el vector $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$, se pide:

a) Dibujad dicho vector en un sistema de coordenadas cartesianas.
b) Calculad su módulo.
c) Ángulo que forma con cada uno de los ejes.
d) Obtened un vector de módulo 5 que tenga su misma dirección y sentido.

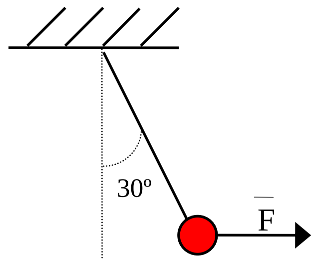
Sol: b) a = $\sqrt{29}$; c) α= 68'2º, β= 42'0º, γ= 56'1º; d) $\left(\frac{10}{\sqrt{29}}, \frac{20}{\sqrt{29}}, \frac{15}{\sqrt{29}}\right)$

7. Un cuerpo de 2 kg de masa permanece en equilibrio en la situación de la figura adjunta. Determinad el valor de la tensión de la cuerda.



sol: $\vec{T} = (0, 20)\ N$ (según un sistema de coordenadas en el que el eje Y coincida con la vertical y sentido positivo hacia arriba).

8. Si al cuerpo del ejercicio anterior se le aplica una fuerza $\vec{F}$ horizontal, pasa a ocupar la situación de equilibrio que se aprecia en la figura de la derecha ¿Qué valores presentan tanto la tensión de la cuerda como la fuerza aplicada?



En la situación representada en la figura, la esfera está interaccionando con la Tierra, la cuerda y el agente exterior que ejerce la fuerza horizontal. Como consecuencia de esas interacciones sobre la esfera actúan las siguientes fuerzas:

-El peso $\vec{P}$ de la esfera o fuerza gravitatoria con que la Tierra la atrae.
-La tensión $\vec{T}$ de la cuerda. Debido al peso de la esfera, a la fuerza aplicada y a que la cuerda se halla sujeta por un extremo del techo que permanece fijo, dicha cuerda se pone tensa y ejercerá una fuerza sobre la esfera, a la que llamaremos tensión.
-La fuerza horizontal $\vec{F}$. (Ejercida por un agente externo sobre la esfera).

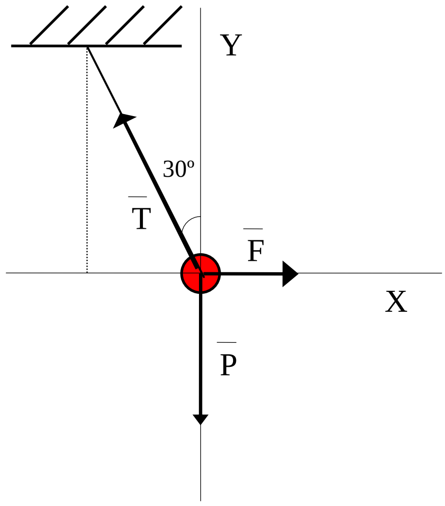
¿Que tendrá que ocurrir con la fuerza resultante que actúa sobre la esfera?

Dado que la esfera permanece en equilibrio, la resultante de todas las fuerzas que se ejercen sobre la misma debe de ser nula, es decir:

$$\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = 0$$

¿Cómo podríamos calcular, a partir de aquí, los valores F y T?

En principio, podría parecer que la ecuación anterior es insuficiente para poder resolver el problema ya que hay dos incógnitas. Sin embargo, conviene tener en cuenta que, como ecuación vectorial que es, se puede descomponer en tres ecuaciones escalares, de donde podríamos despejar T y F. Para ello, lo primero que hemos de hacer es elegir un sistema de coordenadas apropiado y a continuación expresar los vectores fuerza en función de sus componentes y proceder a sumar analíticamente:



$\vec{P}$ = (Px, Py) = (P cos 90º, P cos 180º) = (0, -20) N

$\vec{T}$ = (Tx, Ty) = (T cos 120º, T cos 30º) = (-0’5 T, 0’87 T) N

$\vec{F}$ = (Fx, Fy) = (F cos 0º, F cos 90º) = (F, 0) N

Sumando las tres ecuaciones anteriores obtendremos la expresión de la fuerza resultante que actúa sobre la esfera, que como ya hemos dicho ha de valer 0. Por tanto:

$\vec{F}_{res}$ = (-0’5 T + F, -20 + 0’87 T) = 0

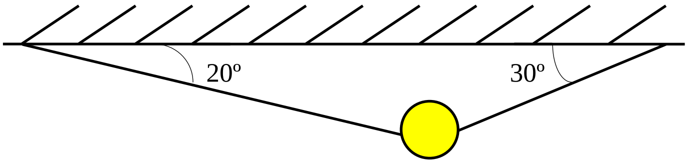
de donde se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} -0'5\,T + F = 0 \\ -20 + 0'87\,T = 0 \end{array}\right\}$$ Resolviendo sale que T = $\frac{20}{0'87}$ = 23 N y que F = 0'5 T = 11'5 N

9. Si la fuerza $\vec{F}$ presente en el ejercicio anterior tuviese un módulo de 23 N ¿cuál sería el ángulo de equilibrio?

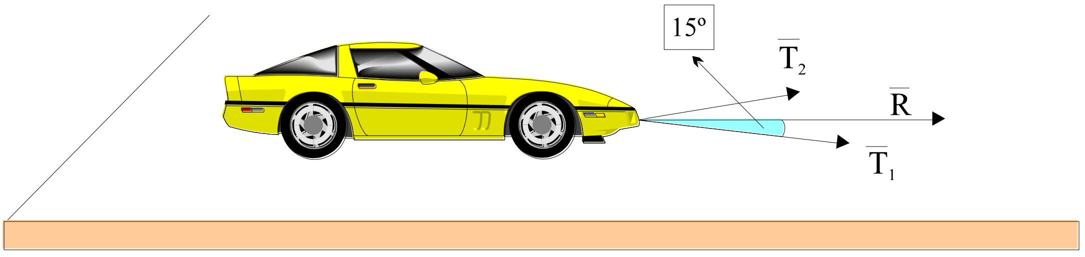
sol: 48’8^0

10. Si un cuerpo de 2 kg de masa se suspende del techo mediante dos cuerdas de forma que queda en equilibrio en la situación de la figura ¿cuál es el valor de la tensión de cada cuerda?



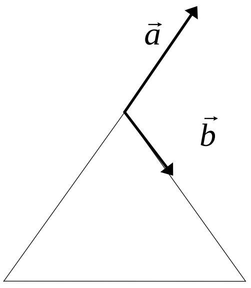
sol: $T_1 = 24{,}5$ N ; $T_2 = 22{,}7$ N

11. Un automóvil es arrastrado haciendo uso de dos cuerdas, según se aprecia en la figura. Determinad el valor T_2 sabiendo que T_1 vale 500 N y la fuerza resultante R vale 800 N.



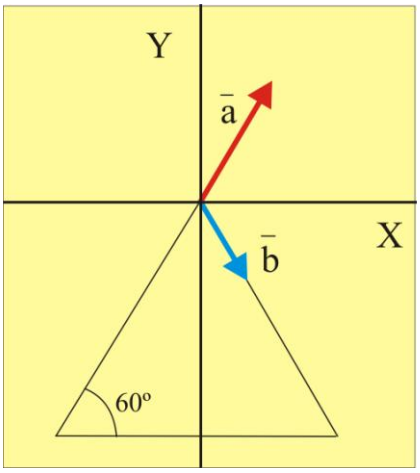
sol: $T_2 = 342'4$ N

12. Los vectores representados en la figura adjunta tienen de módulo: a = 6 y b = 3 (ambos en unidades internacionales). Sabiendo que el triángulo es equilátero, determinad el vector suma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$. Expresad el vector suma en módulo y dirección.



En este caso se trata, de nuevo, de sumar varios vectores que se dan expresados en módulo y dirección. Para ello, conviene establecer un sistema de referencia apropiado que nos permita expresar los vectores en componentes cartesianas para poder sumarlos analíticamente.

Observemos que como el triángulo es equilátero, los dos vectores forman un ángulo de 60º con OX+. Conociendo este dato y el módulo de dichos vectores, es fácil obtener sus componentes cartesianas.



Observemos que como el triángulo es equilátero, los dos vectores forman un ángulo de 60º con OX+. Conociendo este dato y el módulo de dichos vectores, es fácil obtener sus componentes cartesianas.

Otra cuestión de interés es *prever la orientación del vector suma* $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$.

Dada la simetría existente en la figura es fácil darse cuenta que si ambos vectores tuviesen el mismo módulo, el vector suma debería encontrarse sobre el eje X y estar dirigido hacia la derecha. Como el vector $\vec{a}$ es mayor que el $\vec{b}$, hemos de pensar -antes de hacer ningún cálculo- que el vector suma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ tendrá una orientación más próxima al primero que al segundo.

$\vec{a}$ = (a_x, a_y) = (a cos 60º, a cos 30º) = (6·0'5, 6·0'87) = (3, 5'22) U.I.

$\vec{b}$ = (b_x, b_y) = (b cos 60º, b cos 150º) = (3·0'5, - 3·0'87) = (1'5, -2'61) U.I.

$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ = (3, 5'22) + (1'5, -2'61) = (4'5, 2'61) U.I.

¿Cómo podríamos calcular el módulo y la dirección del vector suma?

Como conocemos sus componentes, para calcular el módulo de $\vec{s}$ aplicamos la

expresión $s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$ con lo que nos queda que $s = \sqrt{4'5^2 + 2'61^2}$ = 5'2 U.I.

En cuanto a su dirección, podemos determinarla calculando los ángulos directores:

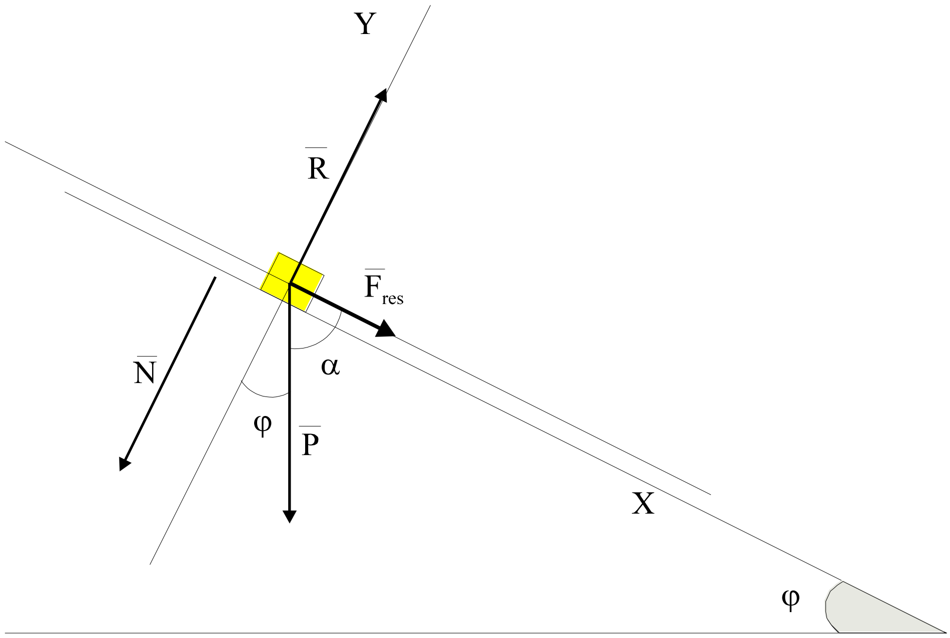
$$\cos\alpha = \frac{s_x}{s} = \frac{4'5}{5'2} = 0'87 \text{ de donde } \alpha = \text{ arc cos } 0'87 = 30º$$

$$\cos\beta = \frac{s_y}{s} = \frac{2'61}{5'2} = 0'5 \text{ de donde } \beta = \text{ arc cos } 0'5 = 60º$$

Así pues el vector suma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ es el vector $\vec{s} = (4'5,\ 2'61)$ U.I. se encuentra en el plano XOY, forma un ángulo de 30º con el semieje OX^+ y de 60º con OY^+ y su módulo es de 5'2 U.I.

13. Un cuerpo de masa m se desliza libremente por un plano inclinado que forma un ángulo φ con la horizontal. Sabiendo que no existe rozamiento, expresad la fuerza ejercida por el plano sobre el cuerpo y la fuerza resultante que actúa sobre el mismo, en función de su peso P y de φ.

Para resolver este problema conviene realizar en primer lugar un esquema en donde figuren todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo cuando este se desliza por el plano, junto con un sistema de referencia que nos permita expresarlas fácilmente en función de sus componentes cartesianas.



Debido a la interacción existente entre el cuerpo y la superficie sobre la que este desliza, dicho cuerpo ejerce una fuerza $\vec{N}$ sobre el plano y a su vez el plano ejerce otra fuerza de igual valor y sentido contrario $\vec{R}$ sobre el cuerpo. Se trata de una pareja acción-reacción, en la que cada fuerza se ejerce sobre un cuerpo distinto y ambas se encuentran sobre la misma línea de acción (perpendicular al plano), aunque en el dibujo hemos desplazado $\vec{N}$ para mayor claridad.

A causa de la interacción entre el cuerpo y la Tierra, ésta ejerce una fuerza de atracción $\vec{P}$ sobre aquél y el cuerpo ejerce otra del mismo valor y sentido contrario sobre la Tierra (que no hemos dibujado).

Así pues, en la situación descrita en el enunciado, sobre el cuerpo sólo actúan dos fuerzas: $\vec{R}$ y $\vec{P}$. Dado que la trayectoria que sigue el cuerpo es rectilínea, la fuerza resultante que actúa sobre él tiene que ser en la dirección del plano. Analizando la figura, se comprende que dicha fuerza estará dirigida hacia la base del plano (sin importar que el cuerpo esté subiendo o bajando) y que es la responsable de la aceleración que el cuerpo experimenta (ascienda cada vez más despacio o descienda cada vez más aprisa).

Podemos calcular la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo haciendo: $\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{R}$. En la ecuación anterior, conocemos $\vec{P}$ en módulo y dirección, aunque de $\vec{F}_{res}$ y $\vec{R}$ sólo conocemos su dirección. En consecuencia, las incógnitas serán F_{res} y R, que es lo que vamos a tratar de poner en función de P y φ, tal y como se nos pide en el problema. Para ello expresaremos los vectores fuerza en forma analítica (según el sistema de referencia escogido) y procederemos a calcular la expresión de la fuerza resultante:

$\vec{P} = P\cos\alpha\,\vec{i} + P\cos(90^{o}+\alpha)\,\vec{j}$

$\vec{R} = R\cos 90^{o}\,\vec{i} + R\cos 0^{o}\,\vec{j} = R\,\vec{j}$

$\vec{F}_{res} = Fres\,\vec{i}$

Teniendo en cuenta que los ángulos φ y α son complementarios (sumados dan 90º), podemos escribir que cos α = sen φ. Por otra parte al ser los ángulos (90º + α) y φ, suplementarios (sumados dan 180º), podemos escribir que cos (90 + α) = -cos φ, con lo que nos queda:

$\vec{P} = P\,\text{sen}\,\varphi\,\vec{i} - P\cos\varphi\,\vec{j}$ y sumando con $\vec{R}$, nos sale:

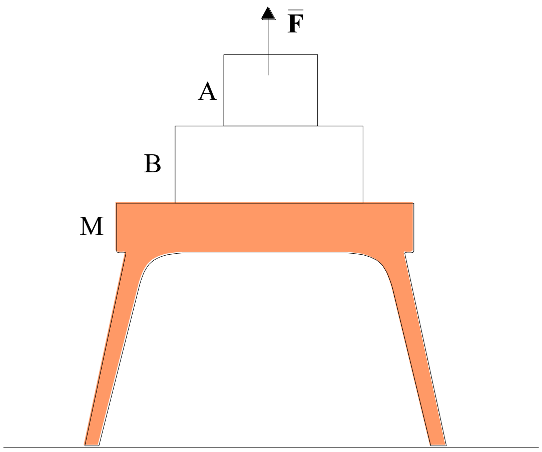
$\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{R} = P\,\text{sen}\,\varphi\,\vec{i} + \left(R - P\cos\varphi\right)\vec{j} = Fres\,\vec{i}$. Descomponiendo la igualdad vectorial en dos escalares, tendríamos:

$P\cdot\text{sen}\,\varphi = F_{res}$
$R - P\cdot\cos\varphi = 0$

De acuerdo con lo anterior: $F_{res} = P\,\text{sen}\,\varphi$ y $R = P\cos\varphi$

Al mismo resultado se puede llegar considerando directamente que al no haber aceleración en la perpendicular a la superficie del plano, la fuerza que tira del cuerpo según la normal y hacia arriba, ha de equilibrarse con la que tira del cuerpo en la misma dirección y hacia abajo (y por tanto R ha de valer lo mismo que P cos φ), de manera que el valor de la fuerza resultante deberá, en este caso, coincidir siempre con el de la componente según el plano de la fuerza peso (P sen φ).

14. Al cuerpo A de la figura se le aplica una fuerza F, vertical y hacia arriba de 10 N. Dibujad cada una de las fuerzas que actúan sobre los cuerpos A, B y M y determinad sus valores (m_A =2’5 kg, m_B =3 kg y m_M = 4 kg).



Para dibujar cada una de las fuerzas que actúan sobre los cuerpos de la figura, hemos de analizar cuáles son las interacciones más relevantes en las que intervienen. Considerando el sistema formado por A, B, M y la Tierra, podemos escribir:

a) Interacciones entre los cuerpos y la Tierra: El cuerpo A es atraído por la Tierra gravitatoriamente con una fuerza $\vec{P}_A$ (peso de A) y a su vez éste atrae a la Tierra con otra fuerza de igual valor y sentido contrario cuyo origen podemos situar en el centro del planeta.

Mediante consideraciones similares, podemos justificar la existencia de las restantes fuerzas gravitatorias $\vec{P}_B$ y $\vec{P}_M$ (ved figura siguiente).

b) Interacciones (no gravitatorias) existentes entre los cuerpos: El cuerpo A ejerce una fuerza $\vec{N}_{BA}$ sobre el cuerpo B y éste hace otra fuerza $\vec{R}_{AB}$ sobre el A. Ambas se encuentran sobre la misma línea de acción aunque a menudo (como se ha hecho aquí) se separe una de ellas para poder distinguirlas con claridad, tienen el mismo módulo y sentidos contrarios.

¿La fuerza $\vec{N}_{BA}$ (fuerza que sobre B hace A) es el peso $\vec{P}_A$?

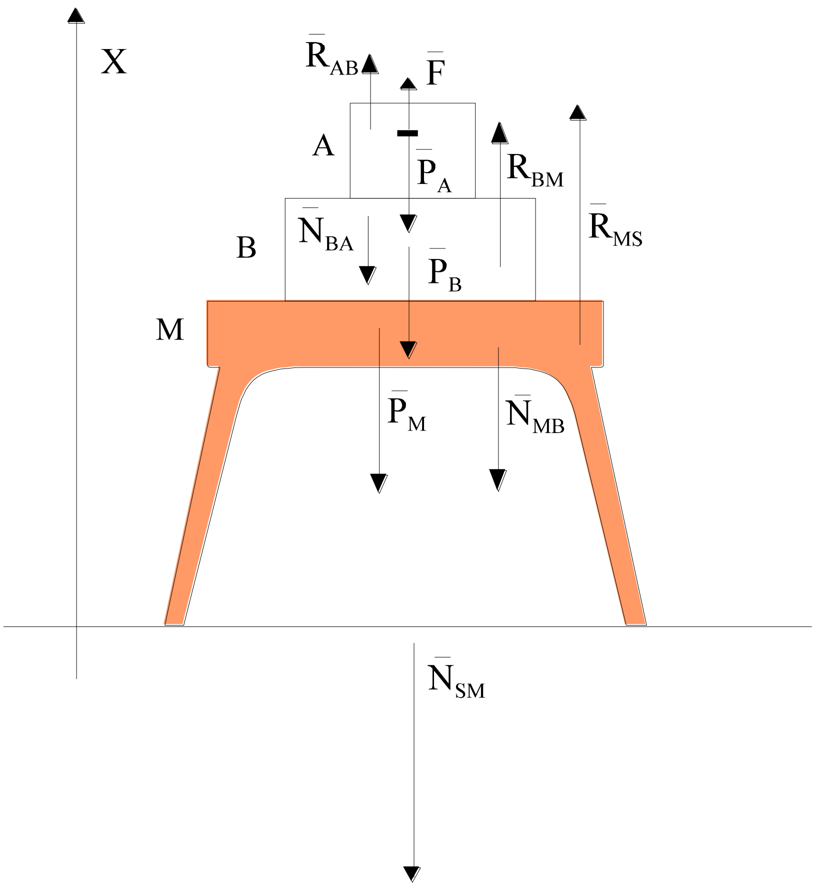
Mucha gente pensaría que la fuerza que hace el cuerpo A sobre el B es el peso $\vec{P}_A$. Aunque en los problemas sobre dinámica volveremos a tratar esta cuestión, podemos adelantar ya que se trata de dos fuerzas **distintas** (en ciertos casos, como el que nos ocupa, ni siquiera tienen el mismo valor) ya que corresponden a dos interacciones de diferente naturaleza:

$\vec{P}_A$ *es* la fuerza con que la Tierra atrae al cuerpo A, es de naturaleza gravitatoria y actúa sobre el cuerpo A.

$\vec{N}_{BA}$ es la fuerza que sobre B ejerce el cuerpo A, no es gravitatoria (aunque A y B se atraen gravitatoriamente, esa fuerza es despreciable frente a las restantes y se ignora) y se ejerce sobre el cuerpo B.

El cuerpo B, interacciona no solo con el A sino también con la mesa M, de manera que la fuerza que sobre M hace B ha de tener el mismo valor y sentido contrario que la que sobre B hace M, es decir: $\vec{N}_{MB} = -\vec{R}_{BM}$. La mesa M interacciona también sobre el suelo de modo que podemos escribir: $\vec{N}_{SM} = -\vec{R}_{MS}$ (fuerza que sobre el suelo hace la mesa igual y de sentido contrario que la fuerza que sobre la mesa hace el suelo).

En la figura que viene a continuación hemos representado (no a escala) las fuerzas que acabamos de enumerar, incluyendo también un sistema de coordenadas cartesianas para expresar analíticamente los vectores representativos de dichas fuerzas:



¿Cómo podemos calcular el valor de las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo?

Teniendo en cuenta que A, B, y M permanecen en reposo, podemos concluir que la fuerza resultante que actúa sobre cada uno de esos cuerpos ha de ser nula. Expresando los vectores representativos de las fuerzas en función de sus componentes y procediendo a sumar analíticamente e igualar a cero, podemos calcular los valores que no conozcamos de dichas fuerzas:

Sobre A: $\vec{F} + \vec{R}_{AB} + \vec{P}_A = 0$ de donde $\vec{R}_{AB} = -\vec{F} - \vec{P}_A = (-10, 0) - (-25, 0) = (15, 0)\ N$

(Luego $\vec{\mathrm{N}}_{\mathrm{BA}} = -\vec{\mathrm{R}}_{\mathrm{AB}} = (-15\ ,\ 0)\ \mathrm{N}$, que como puede verse es distinta que $\vec{\mathrm{P}}_{\mathrm{A}}$)

Sobre B: $\vec{R}_{BM} + \vec{P}_B + \vec{N}_{BA} = 0$ de donde $\vec{R}_{BM} = -\vec{P}_B - \vec{N}_{BA} = (30, 0) - (-15, 0) = (45, 0)\ N$

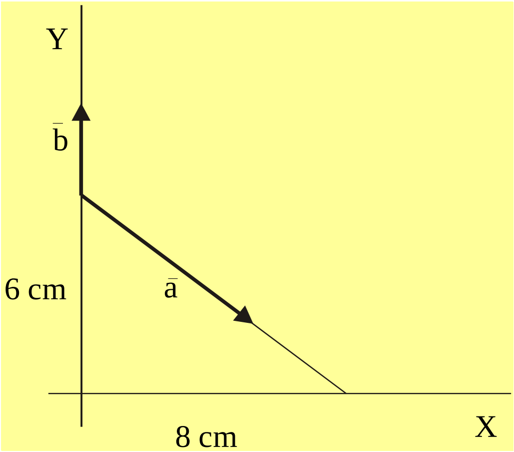
Sobre M: $\vec{R}_{MS} + \vec{P}_M + \vec{N}_{MB} = 0 \ \rightarrow\ \vec{R}_{MS} = -\vec{P}_M - \vec{N}_{MB} = (40, 0) - (-45, 0) = (85, 0)\ N$

Analizando los resultados anteriores nos damos cuenta que el valor de la fuerza que sobre A hace B, es de 15 N (inferior a su peso) y que dicha fuerza sumada a la fuerza exterior de 10 N, es la que equilibra al peso del cuerpo A (25 N), de forma que la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre A es 0 (lo cual explica que si estaba en reposo, continúe estándolo). Análogas consideraciones podemos hacer respecto a B y respecto a M.

¿Cuál es la fuerza que la mesa ejerce sobre el suelo?

De acuerdo con el tercer principio de la dinámica (o principio de acción y reacción), la fuerza que ejerce M sobre el suelo ha de tener el mismo valor que la que el suelo ejerce sobre M y como esta última la conocemos (85 N), concluimos que la mesa hace sobre el suelo una fuerza que vale 85 N (que, como podemos ver, es mayor que el peso de la mesa, que vale 45 N).

15. En la figura adjunta los vectores tienen de módulos a = 9·10^7 y b = 3·10^7 (ambos en unidades internacionales). Obtened el vector suma, su módulo y ángulos directores.

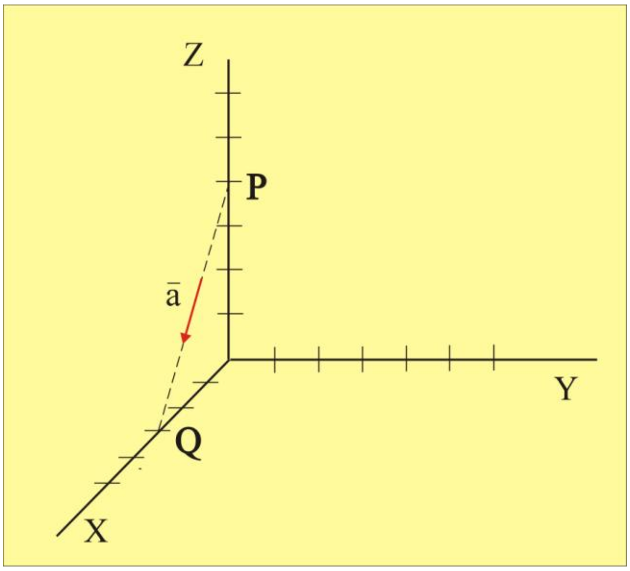


sol: $\vec{s} = (7'2 \cdot 10^7, -2'4 \cdot 10^7)$ U.I.; s = 7’6· 10^7 U.I.; α = 18’2º ; β =108’4º ; γ = 90º

16. Dado el vector $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ calculad el vector $\vec{h} = 6\vec{a}$ y comprobad que h = 6a y que la dirección y sentido de $\vec{h}$ coinciden con las de $\vec{a}$.

Sol: $\vec{h} = 18\vec{i} - 12\vec{j} + 24\vec{k}$

17. Dado el vector $\vec{a}$ representado en la figura adjunta, determinad sus componentes sabiendo que su módulo vale 1’5. (Todos los datos en unidades internacionales).



En este problema nos piden que calculemos las componentes de un vector, del que conocemos su módulo, sabemos que se encuentra en el plano XOZ y que tiene la dirección y sentido indicados en el dibujo.

¿Cómo se pueden calcular las componentes del vector $\vec{a}$?

Una posibilidad es utilizar las expresiones $a_x = a \cdot \cos\alpha$ y $a_z = a \cdot \cos\beta$ (a_y = 0). Para poder aplicar este método tendríamos que conocer el valor de los ángulos directores a partir de los datos que se nos dan en el problema y esto, en general, en el espacio presenta cierta dificultad.

Otra forma, más cómoda, de enfocar el problema consiste en expresar el vector $\overline{PQ}$ en función de sus componentes cartesianas. Dicho vector no es el $\vec{a}$, pero tiene su misma dirección y sentido, de manera que si dividimos $\overline{PQ}$ por su módulo, obtendremos un vector unitario $\vec{u}$ de la misma dirección y sentido que $\vec{a}$, después, bastará multiplicar dicho vector unitario por el módulo de $\vec{a}$, para tener resuelto el problema. Utilizaremos este segundo método por su mayor sencillez:

El vector $\overline{PQ}$ se puede expresar de forma analítica sin más que restar las coordenadas del punto P (origen) de las coordenadas del punto Q (extremo):

$\overline{PQ}$ = (Q_x - P_x, Q_y - P_y, Q_z - P_z) = (3-0, 0, 0-4) = (3, 0, -4) U.I.

$$PQ = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ U.I.}$$

$$\vec{u} = \frac{\overline{PQ}}{PQ} = \frac{(3,\,0,-4)}{5} = (0'6,\ 0,\ \ \text{-}\,0'8\,) \text{ U.I.}$$

Luego el vector $\vec{a}$ será $\vec{a}$ = a · $\vec{u}$ = 1’5 · (0’6, -0’8) = (0’9, -1’2) U.I.

18. Dado el vector: $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, determinad el vector de igual dirección, sentido contrario y módulo 4.

sol: (-12/$\sqrt{22}$, 8/$\sqrt{22}$, -12/$\sqrt{22}$)

19. Dados los vectores: $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ y $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$, calculad su producto escalar y la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.

sol: $\vec{a} \bullet \vec{b} = 12$; proyección =12/$\sqrt{30}$

20. Dados los vectores: $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ y $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, calculad el ángulo que forman entre sí.

sol: 55’4^0

21. Demostrad que $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ son perpendiculares.

22. Calculad un vector unitario que sea perpendicular al plano definido por los vectores concurrentes: $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ **y** $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ **.**

Hemos de obtener un vector que cumpla dos condiciones: que sea perpendicular al plano formado por otros dos y que tenga de módulo 1. Para que cumpla la primera, basta con efectuar el producto vectorial de los dos vectores que figuran en el enunciado, $\vec{c} = \vec{a}\, x \vec{b}$ ya que siempre que se realiza este tipo de producto entre dos vectores se obtiene un vector perpendicular al plano en el que están contenidos ambos. En cuanto a la segunda condición, solo habrá que dividir el vector $\vec{c}$ por su propio módulo.

$$\vec{c} = \vec{a}\, x \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-3-2)\vec{i} - (3-1)\vec{j} + (2+1)\ \vec{k} = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\ \vec{k}$$

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{25+4+9} = \sqrt{38}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{c}}{c} = \frac{-5i - 2j + 3k}{\sqrt{38}} = -\frac{5}{\sqrt{38}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{38}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{38}}\vec{k}$$

¿Cómo podríamos analizar el resultado para comprobar que el vector obtenido es efectivamente perpendicular a los otros dos?

Podemos utilizar el producto escalar entre el vector $\vec{u}$ y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

Como $\vec{u} \bullet \vec{a}$ = u · a · cos φ (φ es el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{a}$) si $\vec{u}$ y $\vec{a}$ son perpendiculares su producto escalar tendría que ser 0 (y análogamente con el vector b).

En efecto:

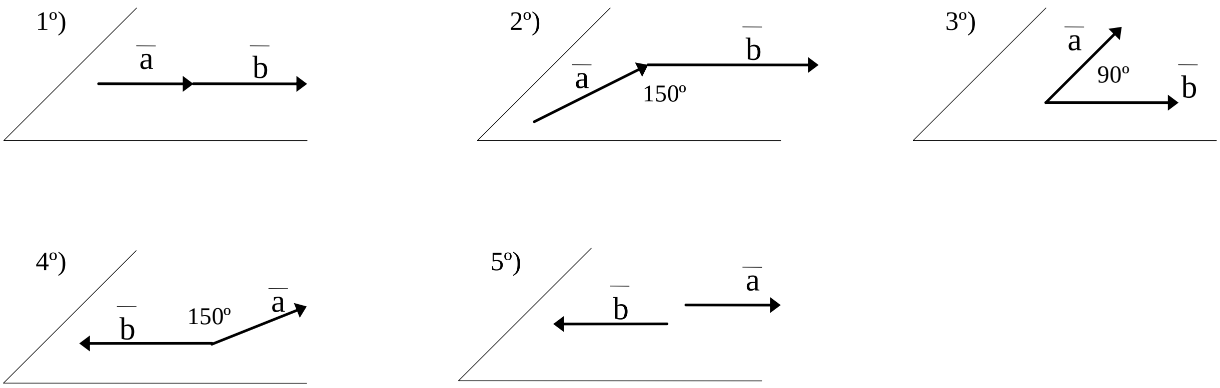
$$\vec{u} \bullet \vec{a} = \left(-5/\sqrt{38}, -2/\sqrt{38}, 3/\sqrt{38}\right) \bullet \left(1, -1, 1\right) = -5/\sqrt{38} + 2/\sqrt{38} + 3/\sqrt{38} = 0$$

Análogamente ocurrirá si efectuamos el producto escalar $\vec{u} \bullet \vec{b}$

23. Dados los vectores concurrentes: $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ **U.I y** $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$ **U.I., calculad la superficie del paralelogramo que determinan.**

sol: $\sqrt{411}$ UI.

24. Hallad el producto escalar $\vec{a} \bullet \vec{b}$, el módulo del vector $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, y representad dicho vector $\vec{c}$, en cada uno de los siguientes casos (en todos ellos a = 3 y b = 4):



Se trata este de un ejercicio de manejo que presenta un doble interés:

En primer lugar contribuye a comprender las diferencias existentes entre el producto escalar y el producto vectorial.

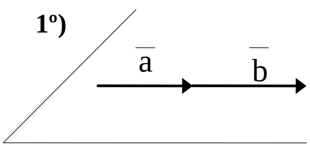
En segundo lugar, constituye un ejemplo concreto en donde se puede apreciar la importancia que tiene en el resultado del producto (escalar o vectorial), no solo el módulo de los vectores implicados, sino también su dirección y sentido.

Para resolver el problema hay que tener presentes las formas de calcular el producto escalar y vectorial en función de los módulos y del ángulo que forman los dos vectores que se multiplican (para lo cual es conveniente situarlos con origen común):

Producto escalar: $\vec{a} \bullet \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi$

Producto vectorial: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$; vector de módulo $c = a \cdot b \cdot \text{sen } \varphi$; dirección perpendicular al plano formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y sentido según el avance de un tornillo que girase en el mismo sentido que resulta de llevar $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ por el camino más corto.

A continuación resolveremos y comentaremos brevemente cada uno de los cinco casos propuestos.

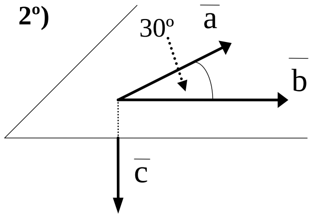


$\vec{a} \bullet \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi = 3 \cdot 4 \cdot \cos 0º = 12$

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = 0$ porque $c = a \cdot b \cdot \text{sen } \varphi = 3 \cdot 4 \cdot \text{sen } 0º = 0$

Vemos que el producto vectorial de dos vectores paralelos ($\varphi = 0$) es nulo, mientras que el escalar toma su valor máximo (ya que $\cos \varphi = \cos 0º = 1$). Puede utilizarse para comprobar si dos vectores son paralelos.

2º)

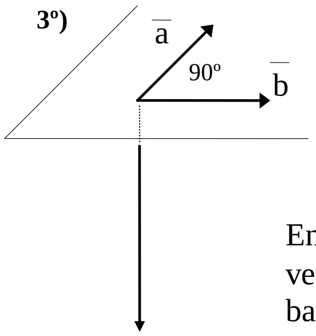


$\vec{a} \bullet \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi = 3 \cdot 4 \cdot \cos 30º = 10'39$

$c = a \cdot b \cdot \text{sen } \varphi = 3 \cdot 4 \cdot \text{sen } 30º = 6$

Aquí conviene darse cuenta de que cuando se determina el sentido del vector $\vec{c}$, es necesario que, si no lo están ya, se dispongan los dos vectores de forma que tengan un origen común trasladando uno de ellos (manteniendo su módulo, dirección y sentido). Esto es lo que se ha hecho aquí con el vector $\vec{a}$ que se ha desplazado hasta que su origen ha coincidido con el de $\vec{b}$.

3º)

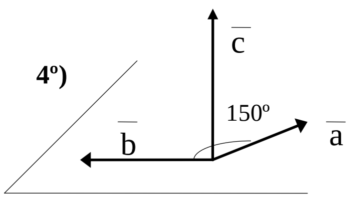


$\vec{a} \bullet \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi = 3 \cdot 4 \cdot \cos 90º = 0$

$c = a \cdot b \cdot \text{sen } \varphi = 3 \cdot 4 \cdot \text{sen } 90º = 12$

En este caso el producto escalar es nulo, mientras que el módulo del vector $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ toma su valor máximo. Puede utilizarse para comprobar si dos vectores son perpendiculares.

4º)



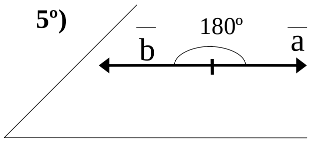
$\vec{a} \bullet \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi = 3 \cdot 4 \cdot \cos 150º = -10'39$

$c = a \cdot b \cdot \text{sen } \varphi = 3 \cdot 4 \cdot \text{sen } 150º = 6$

En este caso al llevar $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ por el camino más corto (una vez que hemos comprobado que ambos vectores tienen el mismo origen), vemos que equivale al movimiento de extraer un tornillo, de modo que el vector c, se dirige ahora hacia arriba.

También hay que resaltar que cuando el ángulo φ es mayor de 90º, el producto escalar sale negativo, como ocurre en este caso:

5º)



$\vec{a} \bullet \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi = 3 \cdot 4 \cdot \cos 180º = -12$

$c = a \cdot b \cdot \text{sen } \varphi = 3 \cdot 4 \cdot \text{sen } 180º = 0$

En este último caso, podemos comprobar que cuando el ángulo es de 180º (vectores opuestos), el producto escalar toma el valor máximo negativo, y el vectorial es nulo.

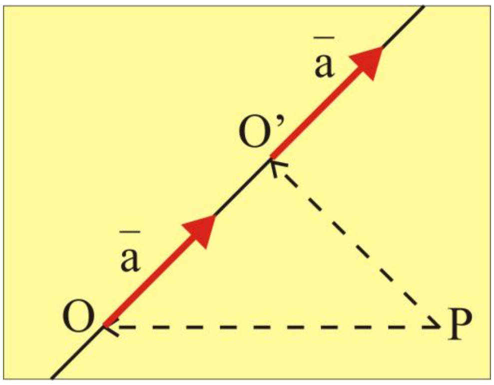
Así pues, el módulo del producto vectorial de dos vectores que mantengan sus módulos constantes, varía con el ángulo φ existente entre ambos vectores (dispuestos con origen común) entre un valor mínimo de 0 (para un ángulo de 0º o 180º) y un valor máximo igual al producto de sus módulos a · b (para un ángulo de 90º), sin que se den valores negativos (el módulo de un vector no puede ser negativo).

En cuanto al producto escalar de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, éste oscila entre un valor máximo dado por a · b cuando el ángulo φ es 0 (vectores paralelos) y un valor mínimo que es el anterior pero negativo (- a · b) cuando el ángulo es de 180º, pasando por el valor 0 en el caso de que sean perpendiculares.

25. Suponiendo que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ del ejercicio número 2, representen fuerzas (medidas en N), calculad el momento de cada uno de dichos vectores respecto del punto de coordenadas: (1,-1,0) m.

sol: $\vec{M}a = -25\vec{i} + 10\vec{j} - 7\vec{k}$ N·m; $\vec{M}b = 0$

26. Demostrad que el momento de un vector respecto de un punto permanece constante, si dicho vector se desplaza a lo largo de su recta de aplicación.



Consideremos un vector $\vec{a}$ aplicado en un punto O y el mismo vector desplazado hasta otro punto O' de su misma recta de aplicación.

¿Cuál sería la expresión del momento de dicho vector respecto del punto P en cada uno de esos puntos?

Para el punto O, tendríamos que : $\vec{M}_O = \overline{PO} \, x \, \vec{a}$
Para el punto O' tendríamos que: $\vec{M}_{O'} = \overline{PO'} \, x \, \vec{a}$

¿Cómo podríamos relacionar los momentos anteriores entre sí?

En la figura, podemos ver que: $\overline{PO} = \overline{PO'} + \overline{O'O}$

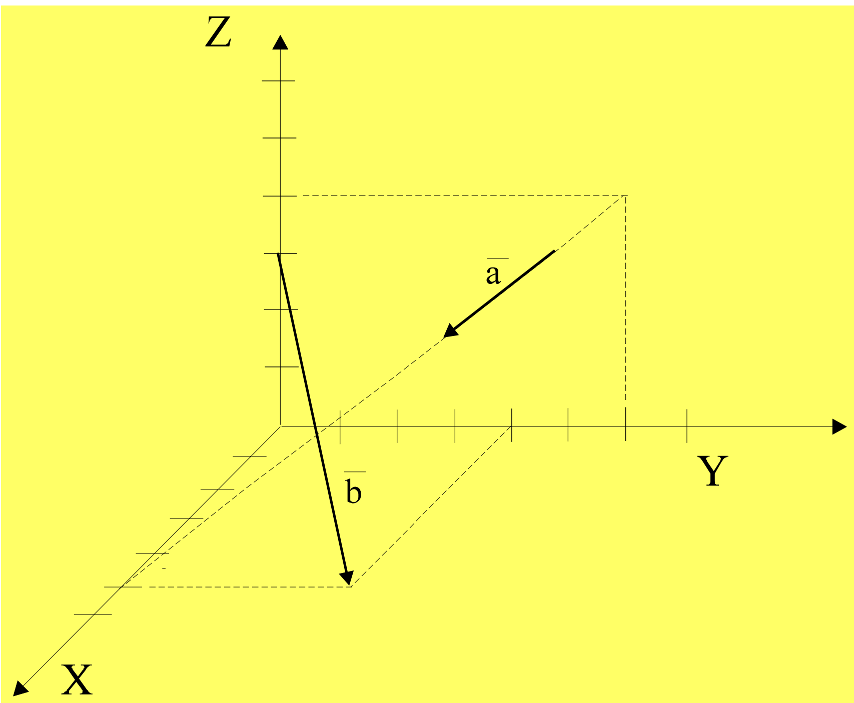
sustituyendo esta expresión en $\vec{M}_O = \overline{PO} \, x \, \vec{a}$ nos queda que:

$$\vec{M}_O = \left(\overline{PO'} + \overline{O'O}\right) x \, \vec{a} = \overline{PO'} \, x \, \vec{a} + \overline{O'O} \, x \, \vec{a}.$$

Como los vectores $\overline{O'O}$ y $\vec{a}$ tienen la misma dirección, su producto vectorial ha de ser nulo y por tanto nos queda que:

$$\vec{M}_O = \left(\overline{PO'} + \overline{O'O}\right) \times \vec{a} = \overline{PO'} \times \vec{a} = \vec{M}_{O'} \quad \text{tal y como queríamos demostrar.}$$

27. Dados los vectores de la figura y sabiendo que el módulo de $\vec{a}$ es $\sqrt{77/4}$ N, determinad: a) Cosenos directores de $\vec{b}$. b) Vector $\vec{a}$ en componentes. c) Ángulo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. d) Momento de $\vec{b}$ respecto al punto Q (-1, 5, 2) m.



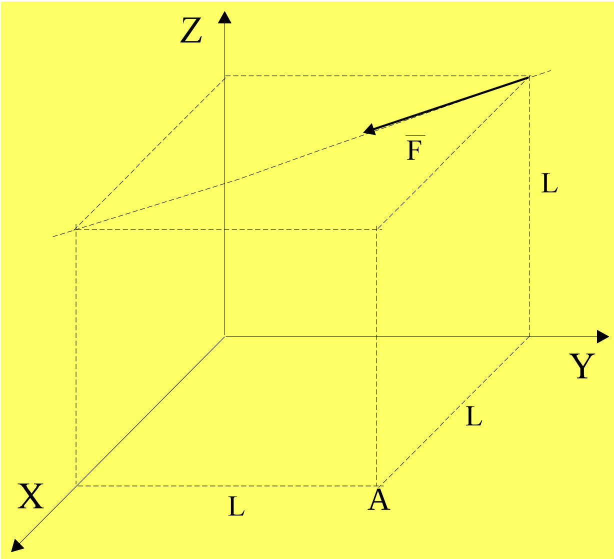
sol: a) cos α = 0’7; cos β = 0’57; cos γ = -0’42.

b) $\vec{a} = (2'5, -3, -2)$ N

c) φ = 77’9º

d) $\vec{M} = (11, 8, 29) \; N \cdot m$

28. Determinad el momento de la fuerza $\vec{F}$ de módulo $\sqrt{200}$ N, respecto del punto A de la figura adjunta (L en m).



sol: (10L, 10L,10L) N·m

29. Sabiendo que el vector $\vec{r}$ es función del escalar t en la forma: $\vec{r}$ = (t^2, -t, 2t-1) m (si t en s); determinad la función: d$\vec{r}$ /dt.

sol: (2t, -1, 2) m/s

30. Dado el vector $\vec{a} = 3t^2\vec{i} + 5\vec{j} - 2t\,\vec{k}$, se pide:

a) Obtened el vector $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$

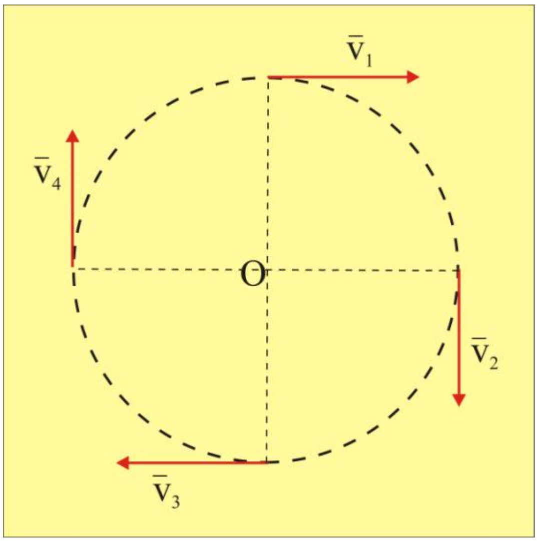
b) Ángulo que forman entre sí ambos vectores para t = 1.

sol: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$ = (6t, 0, -2); φ = 55’6º

31. Demostrad que si un vector $\vec{v}$ cambia continuamente con el tiempo, pero su módulo permanece constante en todo momento, el vector $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ y el vector $\vec{v}$ han de ser perpendiculares.

Un vector viene definido por un módulo, una dirección y un sentido, de modo que cuando cambia alguno de estos tres elementos lo que se tiene es otro vector diferente del primero.

En ocasiones la dirección de un vector puede cambiar continuamente con el tiempo y su módulo permanecer constante. Este es el caso, por ejemplo, del vector velocidad $\vec{v}$ en un movimiento circular uniforme, tal y como se representa en la figura siguiente (en donde se ha dibujado el vector velocidad para cuatro posiciones distintas):



Aunque el cuerpo gire siempre igual de aprisa, la velocidad va cambiando continuamente con el tiempo (aunque su módulo permanezca constante) y los vectores velocidad representados en la figura son diferentes ($\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2 \neq \vec{v}_3 \neq \vec{v}_4$).

La demostración que se demanda en el enunciado de este problema, es una aplicación del producto escalar de dos vectores:

Si hacemos el producto $\vec{v} \bullet \vec{v} = v^2$ y después derivamos con respecto al tiempo, nos queda:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

ya que al tratarse de un movimiento circular y uniforme, el módulo de $\vec{v}$ es constante (v = constante) por lo que también lo será su cuadrado, y la derivada de una constante es 0.

Operando en la expresión anterior:

$$2 \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \bullet \vec{v} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} \bullet \vec{v} = 0$$

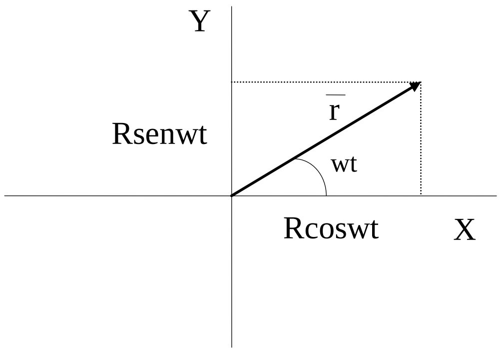
Al ser el producto escalar nulo, los vectores $\frac{d\vec{v}}{dt}$ y $\vec{v}$ tienen que ser perpendiculares entre sí. Este resultado permite comprender mejor el hecho (ya estudiado en cursos anteriores) de que en un movimiento circular uniforme, el vector aceleración ($\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$) y el vector velocidad $\vec{v}$, sean en todo momento perpendiculares.

32. Dado el vector $\vec{r} = R\left(\cos wt\,\vec{i} + \operatorname{sen} wt\;\vec{j}\right)$

a) Calculad el módulo de $\vec{r}$ **y también el vector** $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$

b) Ángulo que forman $\vec{r}$ **y** $d\vec{r}/dt$

Si $\vec{r} = R\left(\cos wt\,\vec{i} + \operatorname{sen} wt\;\vec{j}\right)$ lo representamos en unos ejes XOY, tendremos:



Como se aprecia en la figura, al variar t va modificándose el ángulo y en consecuencia las componentes del vector. Así pues la dirección del vector va cambiando, pero *¿qué sucede con su módulo?* Si queremos evaluarlo tendremos:

$$r = \sqrt{R^2 \operatorname{sen}^2 wt + R^2 \cos^2 wt} = \sqrt{R^2(\operatorname{sen}^2 wt + \cos^2 wt)} = \sqrt{R^2} = R$$

Se trata pues de un módulo constante y por tanto, el extremo del vector que hemos dibujado en la figura anterior, describe una trayectoria circular, de modo que aunque su módulo no varíe, el vector sí que cambia con el tiempo. Como r es constante, su derivada temporal dr/dt será 0.

Podemos calcular: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = Rw \operatorname{sen} wt\;\vec{i} - Rw\cos wt\;\vec{j}$.

Como r es constante, los vectores $\vec{r}$ y $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ tienen que ser perpendiculares (tal y como hemos visto en el problema anterior).

¿Cómo podríamos comprobar que, efectivamente, son perpendiculares?

Bastaría multiplicar escalarmente los dos vectores y ver si el resultado es 0. En efecto:

$$\vec{r} \bullet \frac{d\vec{r}}{dt} = R\left(\cos wt\,\vec{i} + \operatorname{sen} wt\,\vec{j}\right) \bullet (Rw \operatorname{sen} wt\,\vec{i} - Rw \cos wt\,\vec{j})$$

$$\vec{r} \bullet \frac{d\vec{r}}{dt} = R^2\, w \cos(wt) \operatorname{sen}(wt) - R^2\, w \cos(wt) \operatorname{sen}(wt) = 0.$$

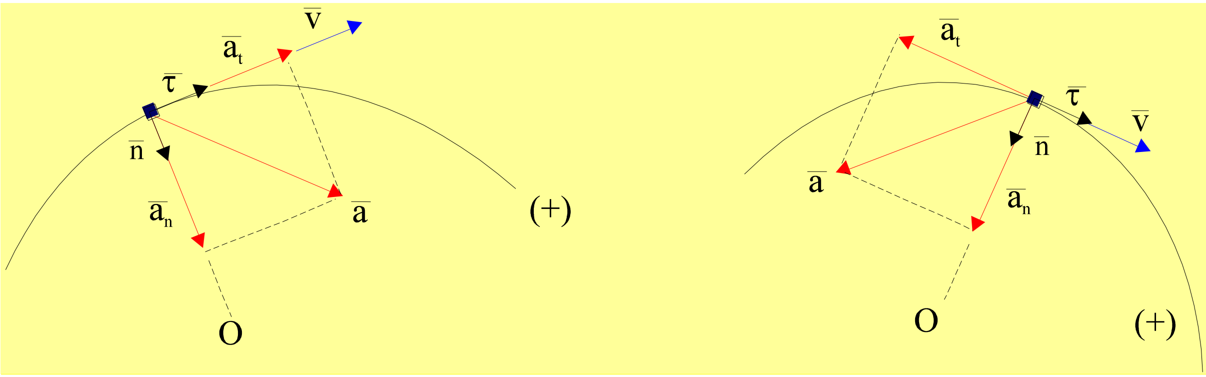
Como $\vec{r} \bullet \frac{d\vec{r}}{dt} = r \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \cos\alpha = 0,$

nos queda que $\cos\alpha = 0$ y por tanto los dos vectores son perpendiculares.

33. ¿Cómo se puede expresar un vector en sus componentes intrínsecas? ¿En qué casos interesa trabajar con los vectores expresados en dichas componentes?

En el caso de objetos que se mueven siguiendo una trayectoria previamente conocida como, por ejemplo, un coche por una carretera o el movimiento circular de un satélite alrededor de la Tierra, puede interesarnos expresar los vectores en función de dos nuevos vectores básicos unitarios: uno tangencial, que designaremos por $\vec{\tau}$ y que **siempre** es tangente a la trayectoria y en el sentido positivo (valores de "e" crecientes), y otro perpendicular, que designaremos por $\vec{n}$ y que **siempre** es perpendicular a la trayectoria y en el sentido escogido como positivo. En el caso de que la trayectoria sea curva, se conviene que el sentido positivo de $\vec{n}$ sea, precisamente, señalando hacia el centro de la curva (si es una recta es arbitrario).

En los dos ejemplos siguientes se representa el caso de dos cuerpos que están moviéndose según una trayectoria curva. El de la izquierda va cada vez más aprisa, mientras que el de la derecha va cada vez más despacio. En cada uno de los esquemas se ha escogido (arbitrariamente) como sentido positivo de la trayectoria el del movimiento y se han dibujado los vectores unitarios $\vec{\tau}$ y $\vec{n}$, junto con el vector $\vec{v}$ (velocidad) y el vector $\vec{a}$ (aceleración) en cada caso.

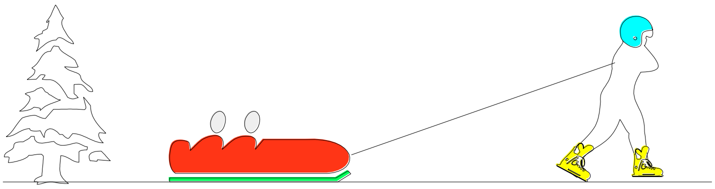


Si nos damos cuenta, el vector aceleración puede ser expresado en los dos casos en función de sus componentes intrínsecas (aceleración tangencial y aceleración normal) $\vec{a} = a_t\vec{\tau} + a_n\vec{n}$ en donde las componentes a_t y a_n son escalares.

De acuerdo con los esquemas utilizados el módulo del vector $\vec{a}$ se puede calcular como:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

34. Una persona arrastra por el suelo un trineo de 500 kg mediante una cuerda que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Sabiendo que el trineo se desplaza con movimiento rectilíneo y uniforme y que la fuerza de rozamiento vale 897 N, determinad las fuerzas actuantes sobre el mismo en componentes intrínsecas.



La fuerza peso ejercida por la Tierra, la fuerza que hace la cuerda $\vec{T}$, la fuerza de rozamiento $\vec{F}_r$ y la fuerza normal $\vec{R}$ que ejerce el plano. Estas son pues las fuerzas que hemos de determinar. Para ello hemos de tener en cuenta que:

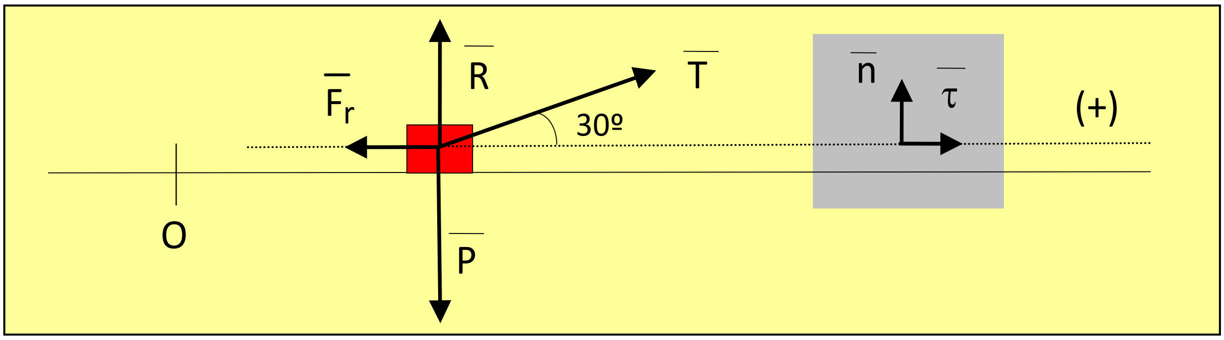
El trineo se desplaza con movimiento rectilíneo y uniforme y, en consecuencia no habrá aceleración (vector) por lo que la fuerza resultante sobre el trineo será nula:

$$\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_r + \vec{R} = 0$$

Para expresar en componentes intrínsecas las fuerzas anteriores haremos lo siguiente:

a) Tomar sobre la trayectoria un origen de espacios y escoger un sentido como positivo.
b) Establecer los vectores $\vec{\tau}$ y $\vec{n}$. Recordemos que $\vec{\tau}$ es un vector unitario tangente a la trayectoria y **siempre** en el sentido escogido como positivo mientras que $\vec{n}$ se define como un vector unitario **siempre** perpendicular a la trayectoria y en el sentido positivo de esa dirección.
c) Expresar las fuerzas actuantes en componentes intrínsecas, según los vectores unitarios correspondientes.

Si representamos las fuerzas y tomamos sentido positivo el del movimiento, tenemos:



Como puede verse se han dibujado los vectores unitarios desplazados a la derecha para no complicar la figura. De acuerdo con el enunciado el móvil se desplazará hacia la derecha (sentido que hemos escogido como positivo). Si denominamos α al ángulo que forma un vector con el vector unitario $\vec{\tau}$ por el camino más corto y β al que forma con el vector unitario $\vec{n}$ (también por el camino más corto), podemos escribir que:

$$\vec{P} = \left|\vec{P}\right| \cos\alpha\cdot\vec{\tau} + \left|\vec{P}\right| \cos\beta\cdot\vec{n} = \left|\vec{P}\right| \cos 90^{o}\cdot\vec{\tau} + \left|\vec{P}\right| \cos 180^{o}\cdot\vec{n} = -5000\cdot\vec{n}$$

$$\vec{T} = \left|\vec{T}\right|\cos\alpha\cdot\vec{\tau} + \left|\vec{T}\right|\cos\beta\cdot\vec{n} = \left|\vec{T}\right|\cos 30^{o}\cdot\vec{\tau} + \left|\vec{T}\right|\cos 60^{o}\cdot\vec{n} = 0'87\left|\vec{T}\right|\cdot\vec{\tau} + 0'5\left|\vec{T}\right|\cdot\vec{n}$$

$$\vec{R} = \left|\vec{R}\right|\cos\alpha\cdot\vec{\tau} + \left|\vec{R}\right|\cos\beta\cdot\vec{n} = \left|\vec{R}\right|\cos 90^{o}\cdot\vec{\tau} + \left|\vec{R}\right|\cos 0^{o}\cdot\vec{n} = \left|\vec{R}\right|\cdot\vec{n}$$

$$\vec{F}_r = \left|\vec{F}_r\right| \cos\alpha\cdot\vec{\tau} + \left|\vec{F}_r\right| \cos\beta\cdot\vec{n} = \left|\vec{F}_r\right|\cos 180^{o}\cdot\vec{\tau} + \left|\vec{F}_r\right|\cos 90^{o}\cdot\vec{n} = -897\cdot\vec{\tau}$$

Sumando obtenemos la expresión:

$$\vec{F}_{res} = (0'87\left|\vec{T}\right| - 897)\cdot\vec{\tau} + (\left|\vec{R}\right| + 0'5\left|\vec{T}\right| - 5000)\,\vec{n} = 0$$

y descomponiendo esta ecuación:

$$0'87\left|\vec{T}\right| - 897 = 0$$

$$\left|\vec{R}\right| + 0'5\left|\vec{T}\right| - 5000 = 0$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos que: $\left|\vec{T}\right| = 1030'8$ N y $\left|\vec{R}\right| = 4484'6$ N.

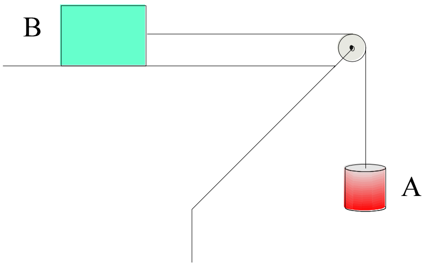
Así pues, las fuerzas (en newtons) que actúan sobre el trineo en componentes intrínsecas serán:

$\vec{P} = -5000\cdot\vec{n}$; $\vec{T} = 897\cdot\vec{\tau} + 515'4\cdot\vec{n}$; $\vec{R} = 4484'6\cdot\vec{n}$; $\vec{F}_r = = -897\cdot\vec{\tau}$. También es posible:

$\vec{P} = (0\ ,\ -5000)$ N; $\vec{T} = (897\ ,\ 515'4)$ N; $\vec{R} = (0\ ,\ 4484'6)$ N; $\vec{F}_r = (-897\ ,\ 0)$ N

Conviene tener en cuenta que las componentes anteriores no son cartesianas sino intrínsecas. Una de las ventajas de trabajar con este tipo de componentes es que pueden utilizarse también en trayectorias no rectilíneas, como vamos a ver a continuación.

35. Un bloque de masa m_A se halla unido a otro de masa m_B mediante una cuerda que pasa por la garganta de una polea tal y como se observa en el sistema de la figura adjunta, de forma que el bloque B se mueve hacia la derecha y el A desciende. Sabiendo que entre el bloque B y el plano existe rozamiento y considerando la masa de la polea despreciable, se pide:

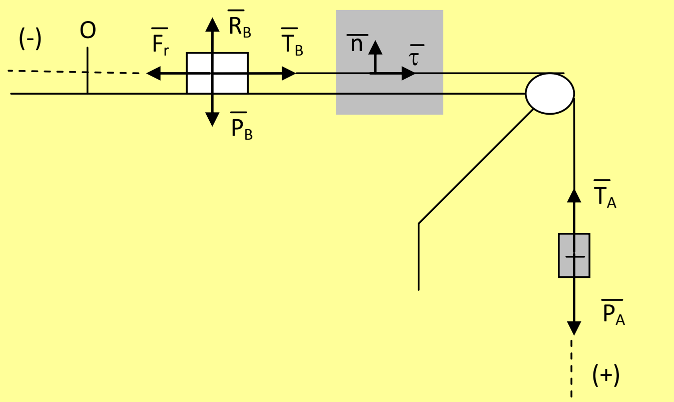


a) Dibujad todas las fuerzas que actúan sobre cada uno de los bloques.
b) Expresad cada una de dichas fuerzas en componentes intrínsecas.

c) Obtened la expresión analítica de la fuerza resultante que actúa sobre el sistema formado por ambos bloques.

Analizando la figura vemos que podemos considerar que existe **una sola trayectoria** y que está previamente determinada, siendo independiente de las características del movimiento de cada uno de los bloques. Es decir, el bloque A descenderá y el B se moverá sobre la mesa, ambos en el mismo sentido y siguiendo la trayectoria que contiene a la cuerda. De acuerdo pues con lo que sabemos, será posible abordar el problema escalarmente. Para ello vamos a escoger como sentido positivo el del movimiento.

En el esquema siguiente hemos dibujado todos los vectores fuerza que intervienen en el problema. Por comodidad hemos situado los vectores unitarios $\vec{\tau}$ y $\vec{n}$ desplazados de los bloques (aunque ya sabemos que ambos vectores se sitúan en cada instante o punto de la trayectoria en el centro de cada bloque). Para contestar la cuestión que se plantea en el enunciado, podemos considerar todo el sistema en su conjunto (bloques y cuerda), expresar cada una de las fuerzas en componentes intrínsecas y sumar.



$$\vec{P}_A = (P_A\,,\,0)$$
$$\vec{T}_A = (-T_A\,,\,0)$$
$$\vec{T}_B = (T_B\,,\,0)$$
$$\vec{F}_r = (-F_r\,,\,0)$$
$$\vec{R}_B = (0\,,\,R)$$
$$\vec{P}_B = (0\,,\,-P_B)$$

En los vectores anteriores se dan las componentes escalares de cada uno ya con el signo correspondiente (según el criterio de signos especificado en la figura). Conviene darse cuenta que, por ejemplo, los vectores $\vec{P}_A$ y $\vec{T}_B$ tienen sólo componente tangencial y en ambos casos es positiva. Sumando todos los vectores anteriores obtenemos la expresión de la fuerza resultante sobre el sistema en componentes intrínsecas:

$$\vec{F}_{res} = (P_A - T_A + T_B - F_r\,,\;\; R - P_B)$$