Matemáticas II

PRÁCTICA

Academia Rada

www.academiarada.com

Telf. 959 25 19 49

TEMA 1. MATRICES Y DETERMINANTES

Operaciones con matrices.

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

realiza, en los casos que sea posible, las siguientes operaciones:

a) A-2B + I b) AC-BC c) CA d) $C^TA + C^TB$

2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y } C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) A + B-C b) 2A + 3C c) A-B-C d) A^2-(C-B) e) A-(B + I-C)

Propiedades de los determinantes.

3. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula los siguientes determinantes y enuncia las propiedades que utilices:

a) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$

4. Sin desarrollarlo, calcula el valor del determinante de la matriz $\begin{pmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{pmatrix}$ y enuncia las propiedades que hayas usado.

5. Sean C_1, C_2 y C_3 las columnas primeras, segundas y terceras, respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

a) El determinante de A^3.
b) El determinante de A^{-1}.
c) El determinante de $2A$.
d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $3C_1$, $-C_3$, $2C_3$ y C_2.

Cálculo de matrices inversas.

6. Hallar, por el método directo, las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. Hallar, por el método Gauss, las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

8. Hallar, por el método de los determinantes, las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Ecuaciones matriciales.

9. Determina la matriz X que verifica la ecuación $AX = X - B$ siendo

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Considera

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calcula $(AB)'$ y $(BA)'$.

b) Determina una matriz X que verifique la relación $\frac{1}{2}X + (AB)' = C$.

11. Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&m&0\\1&1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ \text{Y}\ C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

a) ¿Para qué valores de m tiene solución la ecuación matricial $A.X + 2B = 3C$?
b) Resuelve la ecuación matricial dad para $m = 1$.

12. Considera la matriz $M(x)=\begin{pmatrix}2^x&0&0\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}$, donde x es un número real.

a) ¿Para qué valores de x existe $(M(x))^{-1}$? Para los valores de x obtenidos, calcula la matriz $(M(x))^{-1}$.
b) Resuelve, si es posible, la ecuación $M(3)\cdot M(x)=M(5)$.

Rango de matrices

13. Calcular el rango de las matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}-2&5&0&4\\1&-1&2&3\\2&-1&4&-2\\0&1&-1&3\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&0&5\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1&2&5&-5\\-2&2&1&5\\-3&6&9&5\end{pmatrix}$

14. Discutir e3n función del parámetro m el rango de la matriz.

a) $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&m&3\\4&1&-m\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\m&4&m\\-1&-m&1-m\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}3&1&-2\\m&1&-1\\0&2&m\end{pmatrix}$

Potencia de una matriz.

15. Calcula la potencia n-ésima de la matriz $A=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$

16. Considera la matriz A $\begin{vmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{vmatrix}$

a) Siendo I la matriz identidad 3 x 3 y O la matriz nula 3 x 3 , prueba que $A^3 + I = O$.
b) Calcula A^{10}.

17. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz inversa de A.
b) Calcula A^{127} y A^{128}.
c) Determina x e y tal que $AB = BA$.

Selectividad.

18. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula la matriz P que verifica AP - B = C^T (C^T es la matriz traspuesta de C).

19. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$.

Halla los valores del parámetro m para los que el rango de A es menor que 3.

20. Sea I la matriz identidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Calcula, si existe, el valor de k para el cual $(A-kI)^{-2}$ es la matriz nula.

21. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula, si existen, la matriz inversa de A y la de B.
b) Resuelve la ecuación matricial $AX + B = A + I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

22. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & k\\ k & 1 & 3\\ 1 & 7 & k\end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k.
b) Para $k = 0$, halla la matriz inversa de A.

23. Sean I la matriz identidad de orden 2 y $A=\begin{pmatrix}1 & m\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

a) Encuentra los valores de m para los cuales se cumple que $(A-I)^2 = 0$, donde O es la matriz nula de orden 2.
b) Para m = 2, halla la matriz X tal que $AX-2^T = 0$, donde A^T denota la matriz traspuesta de A.

24. Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}$.

a) Determina la matriz $B = A^2 - 2A$.
b) Determina los valores de A para los que la matriz B tiene inversa.
c) Calcula B^{-1} para A = 1.

25. Calcula la inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz $^{A-1}$ hallada en el apartado anterior,

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 1\\ y+z &= -2\\ x+z &= 3\end{aligned}\right\}$$

26. Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

a) Determina los valores de α para los que la matriz A tiene inversa.
b) Para α = 1, calcula A'1 y resuelve la ecuación matricial AX = B.

27. a) Calcula el valor de m para el que la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix}$ verifica la relación 2^{A2} –A=I y determina A^{-1} para dicho valor de m.

b) Si M es una matriz cuadrada que verifica la relación $2M^2 - M = I$, determina la expresión de M^{-1} en función de M y de I.

28. Sea A la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & \lambda\\ -5 & \lambda & -5\\ \lambda & 0 & 3\end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) Calcula los valores de A para los que el determinante de A – 2I es cero.
b) Calcula la matriz inversa de A – 2I para A = -2.

29. Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calcula $A.B, A.C, A'.\ B'\ y\ C^1.\ A^1.$
b) Razona cuáles de las matrices A, B, C y $A.\ B$ tienen matriz inversa y en los casos en que la respuesta sea afirmativa, halla la correspondiente matriz inversa.

30. Denotemos por M' a la matriz transpuesta de una matriz M.

a) Sabiendo que $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ y que $\det(A)=4$, calcula los siguientes determinantes: $\det(-3A')$ y $\begin{vmatrix}2b & 2a\\ -3d & -3c\end{vmatrix}$.

b) Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea B una matriz cuadrada tal que $B^3=I$. Calcula $\det(B)$.

c) Sea C una matriz cuadrada tal que $C^{-1}=C'$. ¿Puede ser $\det(C)=3$? Razona la respuesta.

31. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -$,calcula, indicando las propiedades que utilices, los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$

32. Se sabe que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2$

Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

33. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

halla la matriz X que cumple que $A.X = (B.A^t)^t$.

34. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

r 1 1 1

m^2 1 1 , se pide: m

0 l_y

a) Determina los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.
b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $m = 2$.

35.
a) Se sabe que el determinante de una matriz cuadrada A de orden 3 vale -2 ¿Cuánto vale el determinante de la matriz $4A$?

'I 2O"

b) Dada la matriz B = X O 1 O , ¿para qué valores de X la matriz $3B + B^2$ no

1 -2

tiene inversa?

36. Determina una matriz A simétrica (A coincide con su traspuesta) sabiendo que

det(M) = -7 y A r 2 6 > "I "3> l 1 3 J

1 O a

37. Considera la matriz A = a O -1

v2 -1 1,

a) Halla los valores de a para los que la matriz $3A$ tiene inversa.
b) Calcula, si es posible, la inversa de la matriz A^2 para a - O.

38. Determina a, b y c sabiendo que la matriz A = r -3 1 r / 1 a 2 / b verifica: A rr 2 ,3; · Í1 9 ,4,

rango (A) - 2.

39. Considera las matrices

1 2 O

A = O 1 2 B = O 1 C = - 1 2 0 1 1 2

1 2 l_y

Determina, si existe, la matriz X que verifica AXB - C', siendo C' la matriz traspuesta de C.

40. Encuentra la matriz X que satisface la ecuación $XA + A^iB = A_t$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ 0\ 1 & & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

41. Sea la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & \\ 1 & k & \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro k no existe la inversa de la matriz A? Justifica la respuesta.

b) Para k = O resuelve la ecuación matricial $(X + I) \cdot A = A'$, donde I denota la matriz identidad y A' la matriz traspuesta de A.

42. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son |A| = \ y $|B| = -2$.

Halla:

(a) $|A^3|$.

(b) $|A^{-1}|$.-

(c) $|-2A|$.

(d) $|AB^t|$, siendo B‘ la matriz traspuesta de B.

(e) El rango de B.

43. Sean A y B dos matrices que verifican:

(a) Halla las matrices (A+B)(A-B) y A^2-B^2.

(b) Resuelve la ecuación matricial $XA - XB - (A + B)^t = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A + B)^t$ la matriz traspuesta de A+B.

EJERCICIOS TEMA 2. SISTEMAS DE ECUACIONES.

1. Pon en forma matricial el siguiente sistema y revuélvelo:

$$\begin{cases} -2x-4y+7z=1 \\ 9x-y+3z=0 \\ -5x+3y-2z=-1 \end{cases}$$

2. Resolver el siguiente sistema: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$

3. Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \lambda x+2y=3 \\ -x+2\lambda z=-1 \\ 3x-y-7z=\lambda+1 \end{cases}$

Halla todos los valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones.
Resuelve el sistema para los valores de λ obtenidos en el apartado anterior.
Discute el sistema para los restantes valores de λ.

4. Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x+2y-5z=1 \\ 4x+y-2z=3 \\ 2x-3y+az=b \end{cases}$

Determina a y b sabiendo que el sistema tiene infinitas soluciones.
Resuelve el sistema resultante.

5. Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

Halla los valores de λ para los que la matriz A no tiene inversa.
Tomando $\lambda=1$, resuelve el sistema escrito en forma matricial

$$A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+\lambda y+(\lambda-1)z=1 \\ y+z=1 \\ 2x+y-z=-3 \end{cases}$

Halla todos los valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene al menos dos soluciones.
Resuelve el sistema para los valores de λ obtenidos en el apartado anterior.
Discute el sistema para los restantes valores de λ.

7. Discute y resuelve el siguiente sistema según los valores de λ:

$$\begin{cases} x+\lambda y+z=0 \\ \lambda x+y+z=0 \\ x+y+\lambda z=0 \end{cases}$$

8. Considera el sistema de ecuaciones escrito en forma matricial $\begin{pmatrix} b & 1 & b \\ 0 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Discute el sistema según los valores del parámetro b.
Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

9. Considera $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ a & -1 & a-2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Determina el rango de a en función del parámetro a.
b) Discute en función de a el sistema, dado en forma matricial, $AX=B$.
c) Resuelve $AX=B$ en los casos en que sea compatible indeterminado.

10. Considera el sistema $\left.\begin{array}{l} mx+y-z=1 \\ x-my+z=4 \\ x+y+mz=m \end{array}\right\}$

Discútelo según los valores de m.
¿Cuál es, según los valores de m, la posición relativa de los \`planos cuyas ecuaciones respectivas son las tres que forman el sistema?

11. Resuelve el sistema de ecuaciones, dado en forma matricial, $AX=-AX+B$ siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

12. Clasifica el siguiente sistema según los valores del parámetro m. $\left.\begin{array}{l} 2x+my=0 \\ x+mz=m \\ x+y+3z=1 \end{array}\right\}$

Resuelve el sistema anterior para $m=6$.

13. En el sector de las aceitunas sin hueso, tres empresas A, B y C, se encuentran en competencia. Calcula el precio por unidad dado por cada empresa sabiendo que verifican las siguientes relaciones:

- El precio de la empresa A es 0,6 euros menos que la media de los precios establecidos por B y C.
- El precio dado por B es la media de los precios de A y C.
- El precio de la empresa C es igual a 2 euros mas $2/5$ del precio dado por A mas $1/3$ del precio dado por B.

14. Sean: $A=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 1\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 1-\alpha & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\alpha-1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & -\alpha & 0\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-1\\ -5\\ 3\end{pmatrix}$, $c=\begin{pmatrix}-2\\ 5\\ 0\end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

Determina α, si es posible, para que los sistemas de ecuaciones (dados en forma matricial) $AX=b$, $BX=c$ tengan infinitas soluciones (cada uno de ellos).

15. **[2´5 puntos]** Halla los valores del parámetro m que hacen compatible el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}-x+2y-2z &= 2\\ 2x+y+z &= m\\ x+3y-z &= m^2\end{aligned}\right\}$$

16. Considera $A=\begin{pmatrix}m & -1 & 1\\ 2 & 1 & -m\\ 3 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A?
Resuelve, para $m=2$, el sistema de ecuaciones $AX=C$.

17. Considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{aligned}x-my+z&=1\\ x+y+z&=m+2\\ x+y+mz&=4\end{aligned}\right\}$

Clasifícalo según los valores del parámetro m.
Revuélvalo cuando sea compatible indeterminado.

18. Determina razonadamente los valores de m para los que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}2x+y+z&=mx\\ x+2y+z&=my\\ x+2y+4z&=mz\end{aligned}\right\}\text{ tiene más de una solución.}$$

19. Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

Siendo I la matriz identidad de orden 3, calcula los valores de λ para los que la matriz $A+\lambda I$ no tiene inversa.

Resuelve el sistema $A\cdot X=3X$ e interpreta geométricamente el conjunto de todas sus soluciones.

20. Una empresa cinematográfica dispone de tres salas, A, B y C. Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5 euros, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 euros y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la sala A hubieran asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se hubiese obtenido una recaudación de 20 euros más. Calcula el número de espectadores que acudió a cada una de las salas.

21. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 4\\ x-ay+z & = & 1\\ x+y+z & = & a+2\end{array}\right\}.$$

a. Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

b. Resuelve el sistema que se obtiene para a = −2.

22. Considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x+\lambda y=\lambda\\ \lambda x+y+(\lambda-1)z=1\\ \lambda x+y=2+\lambda\end{array}\right\}$

Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

23. Un tendero dispone de tres tipos de zumos en botellas que llamaremos A, B y C. El mencionado tendero observa que si vende a 1€ las botellas del tipo A, a 3 € las del tipo B y a 4 € las del tipo C, entonces obtiene un total de 20 €. Pero si vende a 1 € las del tipo A, a 3 € las del B y a 6 € las del C, entonces obtiene un total de 25 €.

- Plantea el sistema de ecuaciones que relaciona el número de botellas de cada tipo que posee el tendero.
- Resuelve dicho sistema.
-¿Puede determinarse el número de botellas de cada tipo de que dispone el tendero? (Ten en cuenta que el número de botellas debe ser entero y positivo).

24. Se sabe que el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x+\alpha y=1\\ x+\alpha z=1\\ y+z=\alpha\end{array}\right\}$ tiene una única solución.

Prueba que $\alpha\neq 0$.

Halla la solución del sistema.

25. Considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+3y+z=0 \\ 2x-13y+2z=0 \\ (a+2)x-12y+12z=0 \end{array}\right\}$.

Determina el valor a para que tenga solución distinta de la solución trivia revuélvelo para dicho valor de a.

26. Considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} mx-y=1 \\ x-my=2m-1 \end{array}\right\}$.

a) Clasifica el sistema según los valores de m.
b) Calcula los valores de m para los que el sistema tiene una solución en la que $x=3$.

27. Considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} mx+2y+z=2 \\ x+my=m \\ 2x+mz=0 \end{array}\right\}$

a) Determina los valores de m para los que $x=0,\ y=1$ y $z=0$ es solución del sistema.
b) Determina los valores de m para los que el sistema es incompatible.
c) Determina los valores de m para los que el sistema tiene infinitas soluciones.

28. Determina a y b sabiendo que el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+3y+z=1 \\ -x+y+2z=-1 \\ ax+by+z=4 \end{array}\right\}$ tien menos dos soluciones distintas.

29. Sabiendo que la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿cuál es el valor de a?

30. Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

31. Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} \lambda x+y+z & = & \lambda+2 \\ 2x-\lambda y+z & = & 2 \\ x-y+\lambda z & = & \lambda \end{array}\right\}$$

(a) [1´75 puntos] Discútelo según los valores de λ. ¿Tiene siempre solución?
(b) [0´75 puntos] Resuelve el sistema para $\lambda=-1$.

32. Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} (m+2)x-y-z & = & 1 \\ -x-y+z & = & -1 \\ x+my-z & = & m \end{array}\right\}$$

(a) [1´75 puntos] Discútelo según los valores de m.
(b) [0´75 puntos] Resuélvelo para el caso $m=1$.

33. Considera el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x - 2y + z & = & 5 \\ 2x - 3y + z & = & -4 \end{array}\right\}$$

(a) [1´5 puntos] Calcula razonadamente un valor de λ para que el sistema resultante al añadirle la ecuación $x+y+\lambda z=9$ sea compatible indeterminado.

(b) [1 punto] ¿Existe algún valor de λ para el cual el sistema resultante no tiene solución?

34. **(a) [1´75 puntos]** Discute, según los valores del parámetro λ, el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} -x+\lambda y+z & = & \lambda \\ \lambda x+2y+(\lambda+2)z & = & 4 \\ x+3y+2z & = & 6-\lambda \end{array}\right\}$$

(b) [0´75 puntos] Resuelve el sistema para $\lambda=0$.

35. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} \lambda x+2y+6z & = & 0 \\ 2x+\lambda y+4z & = & 2 \\ 2x+\lambda y+6z & = & \lambda-2 \end{array}\right\}$$

(a) [1´75 puntos] Discútelo según los valores del parámetro λ.
(b) [0´75 puntos] Resuélvelo para $\lambda=2$.

36. Considera el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas

$$\left\{\begin{array}{rcl} kx + 2y & = & 2 \\ 2x + ky & = & k \\ x - y & = & -1 \end{array}\right.$$

a) [0´5 puntos] Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro k.
b) [1 punto] Especifica para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.
c) [1 punto] Halla las soluciones en cada caso.

EJERCICIOS TEMA 3. VECTORES, RECTAS Y PLANOS.

1. Considera los vectores $\vec{u}=(1,1,m)$, $\vec{v}=(0,m,-1)$ y $\vec{w}=(1,2m,0)$.
   a) **[1'25 puntos]** Determina el valor de m para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.
   b) **[1'25 puntos]** Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, expresa el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

2. Halla los dos puntos que dividen al segmento de extremos $A(1,2,1)$ y $B(-1,0,3)$ en tres partes iguales.

3. Dados los puntos A(1,1,0), B(1,1,2) y C (1,-1,1), comprueba que no están alineados y calcula el área del triángulo que determinan.

4. Escribir las ecuaciones de la recta, de todas las formas posibles, que pasa por los puntos: A(2,3,5) y B(-1,0,-2)-

5. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento de extremos A(2,1,0) y B(-1,4,5) y es paralela a la recta $\begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=-2-3t \end{cases}$

6. Halla todas las ecuaciones del plano que pasa por los puntos A(1,0,1), B(0,2,0) y C(-1,2,1).

7. Encontrar la ecuación del plano determinado por el punto (0,5,-2) y la recta $\begin{cases} x=2-t \\ y=5+2t \\ z=-1+t \end{cases}$.

8. Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A(-3,4,5) y B(6,-2,0) y es paralelo a la recta $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$.

9. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $\begin{cases} x=-t \\ y=3+t \\ z=1+5t \end{cases}$ y es paralelo a la recta $\begin{cases} y=-2x \\ z=x+3 \end{cases}$.

10. Calcula las coordenadas del punto simétrico del (1,-3,7) respecto de la recta dada por las ecuaciones $x-1=y+3=\dfrac{z-4}{2}$.

11. Los puntos $A=(3,3,5)$ y $B=(3,3,2)$ son vértices consecutivos de un rectángulo $ABCD$. El vértice C consecutivo de B está en la recta de ecuaciones $x=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.
    a) Determina el vértice C.
    b) Determina el vértice D.

12. Halla las ecuaciones de la recta que se apoya perpendicularmente en las rectas r y s definidas respectivamente por $x-1=y-2=\frac{z-1}{-2}$, $\frac{x-4}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}$.

13. Halla las coordenadas del punto simétrico del punto $P=(1,2,-2)$ respecto al plano de ecuación $3x+2y+z-7=0$.

14. Considera los puntos A(1,0,3) , B(3,-1,0) , C(0,-1,2) y D(a, b,-1). Halla a y b sabiendo que la recta que pasa por A y B corta perpendicularmente a la recta que pasa por C y D.

15. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A(1,0,-1), es perpendicular al plano $x-y+2z+1=0$ y es paralelo a la recta $\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

16. Calcula a sabiendo que los planos $ax+y-7z=-5$ y $x+2y+a^2z=8$ se cortan en una recta que pasa por el punto A(0,2,1) pero que no pasa por el punto B(6,-3,2).

17. Halla las coordenadas del punto simétrico de A(0,-1,1) con respecto a la recta $\frac{x-5}{2}=y=\frac{z-2}{3}$.

18. Considera los tres planos siguientes: $\pi_1 \equiv x+y+z=1$, $\pi_2 \equiv x-y+z=2$ y $\pi_3 \equiv 3x+y+3z=5$ ¿Se cortan π_1 y π_2?, ¿Hay algún punto que pertenezca a los tres planos?

19. Considera los puntos A(1,2,3), B(3,2,1) y C(2,0,2). Halla el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano que contiene a A, B y C.

20. Considera los puntos A(1,-3,2), B(1,1,2) y C(1,1,-1).
    a) ¿Pueden ser A, B y C vértices consecutivos de un rectángulo? Justifica la respuesta.
    b) Halla, si es posible, las coordenadas de un punto D para que el paralelogramo ABCD sea un rectángulo.

21. Considera los puntos A(1,1,1), B(2,2,2), C(1,1,0) y D(1,0,0).
    a) Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos A y B y no corta a la recta determinada por C y D.
    b) Halla la ecuación de la recta determinada por los puntos medios de los segmentos AB y CD.

22. Considera los puntos A(1,-1,2), B(1,3,0) y C(0,0,1). Halla el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por B y C.

23. Sea π el plano de ecuación $3x-y+2z-4=0$,
    a) Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a π y pasa por el punto P(1,-2,2).
    b) Halla la ecuación del plano π_2 perpendicular a ambos que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y-4z=1 \end{cases}$.

24. Considera el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 3$ y el punto $A(-1,-4,2)$.
   a) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por A.
   b) Halla el punto simétrico de A respecto de π.

25. Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$ con la recta $s \equiv \dfrac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralela a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

26. Determina la recta que no corta al plano de ecuación $x - y + z = 7$ y cuyo punto más cercano al origen es (1,2,3).

27. Sabiendo que las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2y - z = a \\ 2x + z = a \end{cases}$ se cortan, determina a y el punto de corte.

28. Considera la recta r y el plano π siguientes $r \equiv \begin{cases} x + z - a = 0 \\ y - az - 1 = 0 \end{cases}, \pi \equiv 2x - y = b$
   a) Determina a y b sabiendo que r está contenida en π.
   b) Halla la ecuación de un plano que contenga r y sea perpendicular a π.

29. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,1,-1), es paralela al plano $3x - y + z = 4$ y corta a la recta intersección de los planos $x + z = 4$ y $x - 2y + z = 1$.

30. Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y + z = 0$.
   a) Calcula el haz de planos que contiene a la recta r.
   b) Halla el plano que contiene a la recta r y corta al plano π en una recta paralela al plano $z = 0$.

31. Los puntos A(1,1,0) y B(2,2,1) son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. Además, se sabe que los vértices C y D están contenidos en una recta que pasa por el origen de coordenadas. Halla C y D.

32. Halla la perpendicular común a las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = 2 + 2\beta \\ z = 0 \end{cases}$.

33. Considera el punto P(-2,3,0) y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 2x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$
   a) Halla la ecuación del plano que pasa por P y contiene a la recta r.
   b) Determina el punto de r más próximo a P.

34. Considera una recta r y un plano π cuyas ecuaciones son, respectivamente,

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad (t \in \Re) \qquad \left.\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{array}\right\} \quad (\alpha, \beta \in \Re).$$

a) Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π.
b) Dados los puntos B(4,4,4) y C(0,0,0), halla un punto A en la recta r de manera qu el triángulo formado por los puntos A, B y C sea rectángulo en B.

35. Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = y \\ z = 2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$. Halla la ecuación de una recta que cor a r y s y sea perpendicular al plano $z = 0$.

36. Considera el punto A(0,1,-1), la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - z = -4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y - z =$

Halla la educación de la recta que pasa por A, es paralela a π y corta a r.

37. Considera el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 7 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$.

a) Halla la ecuación de un plano perpendicular a π y que contenga a la recta r.
b) ¿hay algún plano paralelo a π que contenga a la recta r? En caso afirmativ determina sus ecuaciones.

38. Considera la recta r definida por $\begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 3 \end{cases}$

y la recta s definida por $\begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

(a) [1 punto] Estudia la posición relativa de r y s.
(b) [1'5 puntos] Halla la ecuación general de un plano que contiene a s y es paralelo a r

39. Los puntos P (2,0,0) y Q(-1,12,4) son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice pertenece a la recta r de ecuación

$$\begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$$

(a) [1´5 puntos] Calcula las coordenadas del punto S sabiendo que r es perpendicular a recta que pasa por P y S.
(b) [1 punto] Comprueba si el triángulo es rectángulo.

40. Sean los puntos A(1,1,1), B(-1,2,0), C(2,1,2) y D(t,-2,2)

a) **[1´25 puntos]** Determina el valor de t para que A, B, C y D estén en el mismo plan
b) **[1´25 puntos]** Halla la ecuación de un plano perpendicular al segmer determinado por A y B, que contenga a C.

41. Considera los puntos A(1,1,1), B(0,-2,2), C(-1,0,2) y D(2,-1,2).
(a) **[1 punto]** Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
(b) **[1´5 puntos]** Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A, B y C.

42. **[2´5 puntos]** Halla la ecuación del plano que es paralelo a la recta r de ecuaciones

$$\begin{cases} x-2y+11 = 0 \\ 2y+z-19 = 0 \end{cases} \text{ y contiene a la recta s definida por } \begin{cases} x = 1-5\lambda \\ y = -2+3\lambda \\ z = 2+2\lambda \end{cases}$$

43. Considera los planos π_1, π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones

$$x+y=1\,, \quad ay+z=0 \quad \text{y} \quad x+(1+a)y+az=a+1$$

(a) **[1´5 puntos]** ¿Cuánto ha de valer a para que no tengan ningún punto en común?
(b) **[1 punto]** Para $a=0$, determina la posición relativa de los planos.

44. Considera el plano π definido por $2x-y+nz=0$ y la recta r dada por

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{2}$$

con $m \neq 0$.
(a) **[1´25 puntos]** Calcula m y n para que la recta r sea perpendicular al plano π.
(b) **[1´25 puntos]** Calcula m y n que la recta r esté contenida en el plano π.

45. **[2´5 puntos]** Halla el punto simétrico de P (1,1,1) respecto de la recta r de ecuación

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$$

46. Sean los puntos A(2, λ, λ), B($-\lambda$,2,0) y C (0, λ, $\lambda-1$).
(a) **[1 punto]** ¿Existe algún valor de $\lambda \in \Re$ para que los puntos A, B y C estén alineados? Justifica la respuesta.
(b) **[1´5 puntos]** Para λ = 1 halla la ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C. Calcula la distancia del origen de coordenadas a dicho plano.

47. Considera los puntos $P(6,-1,-10)$, $Q(0,2,2)$ y R, que es el punto de intersección del plano $\pi \equiv 2x+\lambda y+z-2=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ y=1 \end{cases}$. Determina λ sabiendo que los puntos P, Q y R están alineados.

48. Halla la perpendicular común a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\alpha \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x=\beta \\ y=\beta-1 \\ z=-1 \end{cases}.$$

En resumen, después de ver este tema y realizar los ejercicios debemos ser capaces de:

1. Hallar el punto intersección de dos rectas (secantes)
2. Hallar el punto intersección de una recta y un plano (no paralelos)
3. Hallar el punto intersección de tres planos (no paralelos dos a dos)
4. Hallar la recta que pasa por un punto y es paralela a otra recta
5. Hallar la recta que pasa por dos puntos
6. Hallar la recta que pasa por un punto y es perpendicular a un plano
7. Hallar la recta determinada por dos planos (secantes)
8. Hallar la recta que pasa por un punto, es paralela a dos planos
9. Hallar la recta que pasa por un punto, es paralela a un plano y perpendicular a otra recta
10. Hallar la recta que pasa por un punto y es perpendicular a otras dos rectas
11. Hallar la recta que corta perpendicularmente a otras dos rectas (que se cruzan)
12. Hallar la recta que pasa por un punto y corta perpendicularmente a otra recta
13. Hallar el plano que pasa por un punto y es paralelo a dos rectas
14. Hallar el plano que contiene una recta y es paralelo a otra recta
15. Hallar el plano que pasa por un punto y contiene a una recta
16. Hallar el plano que pasa por dos puntos y es paralelo a una recta
17. Hallar el plano que pasa por un punto y es paralelo a dos rectas
18. Hallar el plano que pasa por tres puntos (no alineados)
19. Hallar el plano que contiene a dos rectas que se cortan en un punto
20. Hallar el plano que contiene a dos rectas paralelas
21. Hallar el plano que pasa por un punto y es paralelo a otro plano
22. Hallar el plano que pasa por un punto y es perpendicular a una recta
23. Hallar el plano que pasa por un punto y que es perpendicular a otros dos planos
24. Hallar el plano que pasa por un punto, es perpendicular a otro plano y es paralelo a una recta
25. Hallar el plano que es perpendicular a otro plano y contiene una recta
26. Calcular el área de un triángulo.
27. Calcular el volumen de un tetraedro.
28. Hallar el punto simétrico de un punto respecto de una recta.
29. Hallar el punto simétrico de un punto respecto de un plano.
30. Hallar la recta simétrica de una recta respecto de un plano.
31. Hallar la recta que sirve de eje de simetría de dos puntos.
32. Hallar el plano que sirve de eje de simetría de dos puntos.

EJERCICIOS TEMA 4: PROBLEMAS MÉTRICOS.

1. Halla la distancia entre el origen de coordenadas y la recta intersección de los planos de ecuaciones respectivas $x+y+2z=4$ y $2x-y+z=2$.

2. Calcula el punto de la recta de ecuaciones $x-1=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-3}$ más cercano al punto $A=(1,-1,1)$.

3. Calcula el volumen de un cubo sabiendo que dos de sus caras están, respectivamente, en los planos $2x-2y+z-1=0$ y $2x-2y+z-5=0$.

4. Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es (-1,2,1).

5. Considera los planos $\pi_1 \equiv 2x+5=0$ y $\pi_2 \equiv 3x+3y-4=0$
   a) ¿Qué ángulo determinan ambos planos?
   b) Halla el plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos dados.

6. Sea r la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 3x+2y=0 \\ 3x+z=0 \end{cases}$
   a) Halla los puntos de r cuya distancia al origen es de 7 unidades.
   b) Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1,2,-1)$.

7. Halla el punto de la recta $x=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ que equidista del punto $A(1,2,1)$ y del origen de coordenadas.

8. Considera el plano $2x+y+2z-4=0$.
   a) Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano dado con los ejes coordenados.
   b) Calcula la distancia del origen al plano dado.

9. Determina todos los puntos del plano $2x-y+2z-1=0$ que equidistan de los puntos $A(3,0,-2)$ y $B(1,2,0)$. ¿Qué representan geométricamente?

10. Los puntos $A(1,0,2)$ y $B(-1,0,-2)$ son vértices opuestos de un cuadrado.
    a) Calcula el área del cuadrado.
    b) Calcula el plano perpendicular al segmento de extremos A y B que pasa por su punto medio.

11. Calcula el área del triángulo de vértices $A(1,1,2)$, $B(1,0,-1)$ y $C(1,-3,2)$.

12. Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x+3y+z=1 \\ y+z=-1 \end{cases}$ que está más cercano al punto $P(1,-1,0)$

13. Se sabe que los puntos $A(1,0,-1), B(3,2,1)$ y $C(-7,1,5)$ son vértices consecutivos de un Paralelogramo $ABCD$.
   a) Calcula las coordenadas del punto D.
   b) Halla el área del paralelogramo.

14. Considera el plano $\pi \equiv x-2y+1=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x-3y+z=0 \\ x-y+az+2=0 \end{cases}$.
   a) Halla el valor de a sabiendo que la recta está contenida en el plano.
   b) Calcula el ángulo formado por el plano π y la recta $s \equiv \begin{cases} x-3y+z=0 \\ x-y+z+2=0 \end{cases}$.

15. Se sabe que el plano π corta a los semiejes positivos de coordenadas en los puntos A, B y C, siendo las longitudes de los segmentos OA, OB y OC de 4 unidades, donde O es el origen de coordenadas.
   a) Halla la ecuación del plano π.
   b) Calcula el área del triangulo ABC.
   c) Obtén un plano paralelo al plano π que diste 4 unidades del origen de coordenadas.

16. Sabiendo que las rectas $r \equiv x=y=z$ y $s \equiv \begin{cases} x=1+\mu \\ y=3+\mu \\ z=-\mu \end{cases}$ se cruzan, halla los puntos A y B, de r y s respectivamente, que están a mínima distancia.

17. Determina el punto P de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{3}$ que equidista de los planos $\pi_1 \equiv x+y+z+3=0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6-\mu \end{cases}$.

18. Sean los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(2,-1,3)$.
   a) Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por A y por B.
   b) Calcula el área del paralelogramo de vértices consecutivos $ABCD$ sabiendo que la recta determinada por los vértices C y D pasa por el origen de coordenadas.

19. Calcula el área del triángulo de vértices $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$ y C, siendo C la proyección ortogonal del punto $(1,1,1)$ sobre el plano $x+y+z=1$.

20. Las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+2y+z-4=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y-6=0 \\ x+y-z-6=0 \end{cases}$ contienen dos lados de un cuadrado.
   a) Calcula el área del cuadrado.
   b) Halla la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

21. Sean los puntos $A(1,2,1)$, $B(2,3,1)$, $C(0,5,3)$ y $D(-1,4,3)$.
   a) Prueba que los cuatro puntos están en el mismo plano. Halla la ecuación de dicho plano.
   b) Demuestra que el polígono de vértices consecutivos $ABCD$ es un rectángulo.
   c) Calcula el área de dicho rectángulo.

22. Halla la distancia entre las rectas $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y-1=\dfrac{z-2}{-3} \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-1=1-z \\ y=0 \end{cases}$.

23. Se sabe que el triángulo ABC es rectángulo en el vértice C, que pertenece a la recta intersección de los planos $y+z=1$ e $y-3z+3=0$, y que sus otros dos vértices son $A(2,0,1)$ y $B(0,-3,0)$. Halla C y el área del triángulo ABC.

24. **[2´5 puntos]** Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $6x+3y+2z=6$ con los ejes de coordenadas.

25. Considera los puntos A(1,0,2), B(-1,2,4) y la recta r definida por

$$\frac{x+2}{2}=y-1=\frac{z-1}{3}$$

(a) [1´5 puntos] Determina la ecuación del plano formado por los puntos que equidistan de A y de B.
(b) [1 punto] Halla la ecuación del plano paralelo a r y que contiene los puntos A y B.

26. Considera las rectas *r* y *s* de ecuaciones
r: $x-1=y=1-z$ y s: $\begin{cases} x-2y = -1 \\ y+z = 1 \end{cases}$
(a) [0´75 puntos] Determina su punto de corte.
(b) [1 punto] Halla el ángulo que forman r y s.
(c) [0´75 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a r y s.

EJERCICIOS TEMA 5: FUNCIONES.

DOMINIO: Halla el dominio de las siguientes funciones.

1. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x+2}}$
2. $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x^2-2x}}$
3. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x^3-1}\right)$
4. $f(x)=(x+3)e^{-x}$
5. $f(x)=tg(\dfrac{x-3}{2})$

VALOR ABSOLUTO: Define y dibuja las siguientes funciones.

1. $f(x)=|1-x|\cdot|1+x|$
2. $f(x)=||x|-1|+|x^2+|x||$
3. $f(x)=2-x|x|$
4. $f(x)=x|x|$
5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-|x|} & si\ x\neq -1\ y\ x\neq 1\\ 0 & si\ x=-1\ ó\ x=1\end{cases}$
6. $f(x)=x|x-4|$

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES:

1. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-4x-12\,si & x\leq -2\\ -x+2 & si-2<x<4\\ -x^2+14 & si\quad x\geq 4\end{cases}$

b) $f(x)=\sqrt{x-4}$

c) $f(x)=\dfrac{2x-4}{x+1}$

d) $f(x)=\ln(x-1)+2$

e) $f(x)=\begin{cases}e^{x+2} & si & x<-2\\ 1 & si & -2\leq x\leq 2\\ -x^2+6x-7 & si & x>2\end{cases}$

EJERCICIOS TEMA 6: LÍMITES Y CONTINUIDAD.

LÍMITES: Calcula los siguientes límites (sin aplicar L´Hopital).

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x-\sqrt{x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x+1}{x^3+2x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2-1}\right)^{x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$
5. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{2x-4}}{x^2-16}$

ASINTOTAS:

1. Hallar las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de las siguientes funciones.

$$f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2-4}$$

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{x-1}$$

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$$

$$f(x)=\frac{1}{\cos 2x}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

Selectividad:

2. Sea una función definida para $x\neq -2$ por $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$. Hallar las asíntotas de la función f.

3. Sea una función definida para $x\neq 1$ por $f(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$. Hallar las asíntotas de la función f.

4. Considera la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ para $x\neq 1$.
   a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f.
   b) Estudia la posición de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

5. Calcula las asíntotas de: $f(x)=e^{\frac{2x}{x^2+1}}$.

6. Calcula las asíntotas de: $f(x)=\dfrac{9x-3}{x^2-2x}$ para $x\neq 0$ y $x\neq 2$.

7. Considerar la curva de ecuación $y=\dfrac{x^3+2x}{x^2-2x-3}$
   a) Determinar sus asíntotas.
   b) ¿Corta la curva a alguna de sus asíntotas en algún punto? Justificar la respuesta.

8. Dada la función definida para $x\neq -1$ por $f(x)=\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$, determinar:
   a) Las asíntotas de la gráfica de f.
   b) Los puntos de corte, si existen, de dicha gráficas con sus asíntotas.

9. Considera la función f definida por $f(x)=\dfrac{2x^2+2}{x+2}$ para $x\neq -2$.
   a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f.
   b) Estudia la posición de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

10. Halla las asíntotas de la gráfica $f(x)=(x+3)e^{-x}$.

11. Se considera la función $f:[1,+\infty)\to\Re$ definida por

$$f(x)=\sqrt{x^2-x}+x$$

Determina la asíntota de la gráfica de f.

CONTINUIDAD:

1. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & si\ x\leq 0 \\ \sqrt{x+4} & si\ x>0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & si\ x\neq 1 \\ 2 & si\ x=1 \end{cases}$

c) $f(x)=\dfrac{|x^3|}{x}$

d) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

e) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-4}{x+2}\right)$

Selectividad:

2. Sea $f:\Re \to \Re$ la función continua definida por $f(x)=\begin{cases} |2-x| & si\ x<a \\ x^2-5x+7 & si\ x \geq a \end{cases}$ donde a es un número real.
    a) Determinar a.
    b) Halla la función derivada de f.

3. Se sabe que la función $f:(-1,+\infty) \to \Re$ definida por
$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & si\ -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+a}{x+1} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$ es continua en $(-1,+\infty)$.
    a) Halla el valor de a .¿Es f derivable en $x=0$?
    b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

4. Considera la función $f:(-\infty,10) \to \Re$ definida por $f(x)=\begin{cases} a^x-6 & si\ x<2 \\ |x-5| & si\ 2 \leq x<10 \end{cases}$
    a) Determinar el valor de a sabiendo que f es continua (y que $a>0$).
    b) Esboza la gráfica de f.
    c) Estudia la derivabilidad de f.

5. Sea $f:\Re \to \Re$ la función definida por
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si\quad x<0 \\ x^2-3x-1 & si\quad x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Estudia su continuidad.
(b) Determina sus asíntotas.

6. Sea $f:(0,+\infty) \to \Re$ la función dada por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} & si\quad x \neq 1 \\ a & si\quad x=1 \end{cases}$

(a)[1´25 puntos] Sabiendo que f es continua, calcula a (ln denota logaritmo neperiano).
(b)[1´25 puntos] Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función. En caso de que exista, determina su ecuación.

EJERCICIOS TEMA 7: DERIVADAS.

1. $f(x)=\sqrt{x}+x^{\frac{3}{5}}-7x+2$
2. $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{5x^4-5}$
3. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
4. $f(x)=\sqrt[5]{(x^3+4x^2-2)^3}$
5. $f(x)=\sqrt[3]{tgx}$
6. $f(x)=\ln(\sqrt{x^3-2x+8})$
7. $f(x)=sen45^\circ \cdot senx$
8. $f(x)=sen(-3x+6)$
9. $f(x)=\cos(5^x)$
10. $f(x)=\dfrac{senx}{3}$
11. $f(x)=\cos^3 x$
12. $f(x)=\cos^{-2} x$
13. $f(x)=tg^2 x\cos x$
14. $f(x)=tg(x^2+x)^2$
15. $f(x)=arctg(x^2+1)$
16. $f(x)=arctg\sqrt{x}$
17. $f(x)=tg(\cos x)$
18. $f(x)=arctg(\ln x)$
19. $f(x)=arctg\dfrac{1+x}{1-x}$
20. $f(x)=\cos[\ln(x^2+1)]$
21. $f(x)=\sqrt{\ln(tg(x^2+1))}$
22. $f(x)=6^x senx+acrtgx$
23. $f(x)=(1-\cos x)\cot gx$
24. $f(x)=\cot g(-3x+6)^7$
25. $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln(\cos\dfrac{x^2}{2})+tg(x+\dfrac{1}{x})$
26. $f(x)=e^{sen\,x}$
27. $f(x)=3^x\cdot 5^x$
28. $f(x)=e^{\log sen^2 x}$
29. $f(x)=e^{3-x^2}$
30. $f(x)=2^{x^2+1}$
31. $f(x)=\begin{cases} x\log x & si\ 0<x\le 1 \\ 4(1-e^{-x}) & si\ 1<x \end{cases}$
32. $f(x)=x^{tgx}$
33. $f(x)=(senx)^x$
34. $f(x)=(senx)^{senx}$
35. $f(x)=(senx)^x$
36. $f(x)=(senx)^{\cos x}$

Estudio de la derivabilidad.

1. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & si\ x\leq 1 \\ x^4 & si\ -1<x\leq 1 \\ x^2 & si\ 1<x \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x}+1 & si\ x\leq -1 \\ x^3 & si\ -1<x\leq 1 \\ x^2 & si\ 1<x \end{cases}$

c) $f(x)=|x-1|$

d) $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$

e) $f(x)=tg\,e^{\sqrt{x}}$

Selectividad:

1. Sea $f:\Re\to\Re$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si \quad x<0 \\ x^2-3x-1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

(a)[0´75 puntos] Estudia su continuidad y su derivabilidad.
(b)[1´25 puntos] Determina sus asíntotas y sus extremos relativos.
(c) [0´5 puntos] Esboza la gráfica de *f*.

2. Sea $f:\Re\to\Re$ la función definida por $f(x)=x|x-4|$.
   a) Esboza la gráfica de f.
   b) Estudia su derivabilidad en $x=4$.
   c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

3. Estudia la derivabilidad de la función $f:(0,+\infty)\to\Re$ definida por
$f(x)=\begin{cases} \sqrt{3+x^2}-x & si\ 0<x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{4} & si\ x>1 \end{cases}$. Calcula la función derivada.

4. Considera la función $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x)=\begin{cases}3ax+b & si\ x\le 0\\ e^{x(ax+b)} & si\ x>0\end{cases}$. Determinar a y b sabiendo que f es derivable.

5. Estudia la derivabilidad de la función $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{senx}{x} & si\ x>0\\ 1 & si\ x\le 0\end{cases}$

6. **[2´5 puntos]** Se sabe que la función $f:\Re\to\Re$ definida como $f(x)=\begin{cases}-x^2+bx+1 & si \quad x\le 1\\ ax^2-5x+2a & si \quad x>1\end{cases}$ es derivable. Determina los valores de a y b.

7.

8. Sea $f:(0,+\infty)\to\Re$ la función dada por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} & si \quad x\ne 1\\ a & si \quad x=1\end{cases}$

   (a)[1´25 puntos] Sabiendo que f es continua, calcula a (ln denota logaritmo neperiano).
   (b)[1´25 puntos] Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función. En caso de que exista, determina su ecuación.

9. Estudia la derivabilidad de la función $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-|x|} & si\ x\ne -1\ y\ x\ne 1\\ 0 & si\ x=-1\ o\ x=1\end{cases}$

10. Sea la función $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x)=\begin{cases}x^2+3 & si\ x\le 1\\ 2-x^2 & si\ x>1\end{cases}$
    a) Calcula, si es posible, las derivadas laterales de f en $x=1$.
    b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f.

11. Sea $f:\Re\to\Re$ la función definida por $f(x)=2-x|x|$.
    a) Esboza la gráfica de f.
    b) Estudia la derivabilidad de f en $x=0$.
    c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$.